

что $C \sim \sqrt{\varepsilon}$, и следовательно, A не зависит от ε . Проведенные расчеты показали, что $C \approx 0,07\varepsilon^{1/2}$ и $A \approx 2,12$.

Таким образом, для поставленной задачи о реакции полубесконечной вязкой несжимаемой среды на вращательный импульс, приложенный к поверхности, существует выход на автомоделную устойчивую асимптотику. В процессе выхода на нее характер первоначального возмущения существенно трансформируется: азимутальная компонента скорости в автомоделной стадии исчезает и остается только меридиональное течение, параметры которого не зависят от амплитуды и формы начального возмущения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
2. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. М.: Физматгиз, 1962. 479 с.
3. Пейре Р., Тейлор Т. Д. Вычислительные методы в задачах механики жидкости. Л.: Гидрометеиздат, 1986. 352 с.
4. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973. 294 с.

Обнинск

Поступила в редакцию
16.VI.1988

УДК 532.516

© 1990 г.

В. А. Авакян, Л. П. Смирнов

ОБОБЩЕНИЯ ФОРМУЛЫ ФАКСЕНА ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Методом интегрирования граничных условий в стоксовом приближении получены выражения для силы сопротивления как сферической капли с обычными граничными условиями и с учетом поверхностной вязкости и изменений поверхностного натяжения, так и твердой сферы с граничными условиями скольжения.

Факсеном были установлены формулы для силы сопротивления и момента, действующих на твердую сферу при граничных условиях прилипания, когда сфера движется и вращается, находясь в произвольном стоксовом (удовлетворяющем уравнениям Стокса) потоке [1]. Обобщение этого результата на случай сферической капли дано в [2], где использовано решение Адамара — Рыбчинского, а также теорема взаимности для стоксовых потоков, обобщенная в [3].

Ниже предлагается сравнительно простой метод определения сил, действующих на сферическую частицу, находящуюся в неоднородном стоксовом потоке. Поля возмущений, вносимых в поток частицей, описываются рядами Ламба [4]. Последующее интегрирование по поверхности сферы граничных условий, поставленных на ее поверхности, позволяет определить нужную интегральную характеристику, через которую выражается сила, действующая на частицу. Окончательные формулы содержат интегралы от характеристик набегающего на сферу неоднородного потока и являются обобщениями формулы Факсена [1].

1. При обтекании сферы произвольным стоксовым потоком, в силу необходимости удовлетворения граничных условий на сфере, возникает поле возмущений, описываемое рядами Ламба. Сила сопротивления, действующая на сферу, оказывается зависящей только от напряжений, получающихся за счет поля возмущений. Можно показать, что интегрирование напряжений, имеющих в основном потоке, по всей поверхности сферы дает нулевой результат для любого стоксова потока. Вклад поля возмущений будет зависеть только от функции p_{-2} (гармоническая функция, входящая в решение Ламба [4]). Остальные члены разложения Ламба не дают вклада в интеграл, выражающий силу сопротивления D , вследствие свойства ортогональности сферических функций различных порядков на сфере. Таким образом, получим

$$D = -3a^{-1} \int_{\Sigma} p_{-2} r ds \quad (1.1)$$

где a — радиус, Σ — поверхность сферы, \mathbf{r} — радиус-вектор, проведенный из центра сферы в точку на ее поверхности.

Пусть сфера находится в набегающем неоднородном потоке \mathbf{v}^∞ , определенном относительно системы отсчета, связанной со сферой. Тогда можно, пользуясь граничными условиями на сфере, получить систему уравнений, из которой определяется значение интеграла (1.1).

Рассмотрим жидкую сферу, на поверхности которой должны удовлетворяться следующие граничные условия: равенство нулю радиальных полных скоростей внешнего (индекс e) и внутреннего (индекс i) течений $u_r^e = 0$; $u_r^i = 0$; непрерывность касательных напряжений $P_{r\tau}^e = P_{r\tau}^i$; непрерывность касательных полных скоростей $u_\tau^e = u_\tau^i$. Возникающие благодаря присутствию сферической капли, обтекаемой неоднородным потоком \mathbf{v}^∞ , возмущения скорости описывались рядами Ламба по гармоническим функциям: отрицательного порядка (p_{-m}, φ_{-m}) — для возмущений внешнего течения \mathbf{v}^e , положительного порядка (p_n, φ_n) — для возмущений внутреннего течения \mathbf{v}^i . Таким образом, полные скорости выражаются равенствами $\mathbf{u}^e = \mathbf{v}^\infty + \mathbf{v}^e$, $\mathbf{u}^i = \mathbf{v}^i$. Интегрируя сформулированные граничные условия по поверхности сферы, получим систему четырех линейных соотношений, связывающих четыре векторных интеграла

$$\begin{aligned} X &= \int p_{-2} \mathbf{r} ds, & Y &= \int \varphi_{-2} \mathbf{r} ds \\ Z &= \int p_1 \mathbf{r} ds, & W &= \int \varphi_1 \mathbf{r} ds \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь и в дальнейшем все интегралы берутся по поверхности сферы. Решение этой системы дает

$$X = -\frac{\sigma \mu^e}{2(1+\sigma)} \int \mathbf{v}^\infty ds - \frac{\mu^e}{1+\sigma} \int \mathbf{v}_r^\infty ds + \frac{a}{6(1+\sigma)} \int P_{r\tau}^\infty ds \quad (1.3)$$

где μ^e — вязкость внешней жидкости, μ^i — внутренней, $\sigma = \mu^i/\mu^e$, P_r^∞ — вектор напряжений в набегающем потоке на площадке с нормалью \mathbf{r} ; $P_{r\tau}^\infty = P_r^\infty - P_{rr}^\infty$,

$$P_{rr}^\infty = (P_r^\infty \cdot \mathbf{r} \mathbf{r}^{-1}) \mathbf{r} \mathbf{r}^{-1}.$$

Далее, по формуле (1.1) сопротивление в случае стоксова набегающего потока имеет вид

$$D = \frac{3\mu^e \sigma}{2a(1+\sigma)} \int \mathbf{v}^\infty ds + \frac{3\mu^e}{a(1+\sigma)} \int \mathbf{v}_r^\infty ds - \frac{1}{2(1+\sigma)} \int P_{r\tau}^\infty ds \quad (1.4)$$

Случаю твердой частицы соответствует $\sigma \rightarrow \infty$, случаю пузыря — $\sigma \rightarrow 0$ ¹:

$$\begin{aligned} D &= \frac{3\mu^e}{2a} \int \mathbf{v}^\infty ds \quad (\sigma \rightarrow \infty) \\ D &= \frac{3\mu^e}{a} \int \mathbf{v}_r^\infty ds - \frac{1}{2} \int P_{r\tau}^\infty ds \quad (\sigma \rightarrow 0) \end{aligned}$$

Сравнивая формулу (1.4) с соотношением из работы [2]

$$D = 2\pi \mu^e a \frac{2+3\sigma}{1+\sigma} (\mathbf{v}^\infty)_0 + \pi a^3 \frac{\sigma}{1+\sigma} (\nabla p)_0$$

(где нижний нулевой индекс отмечает значения рассматриваемых величин в начале координат — центре сферы), можно показать, что они совпадут, если интегральные выражения в формуле (1.4) разложить в ряд Тейлора относительно центра сферы, используя аппарат, описанный в [5].

2. Покажем еще на двух примерах, к каким результатам приводит применяемый здесь метод при других граничных условиях, чтобы продемонстрировать универсальность метода.

Рассмотрим твердую сферу в неоднородном потоке при граничных условиях скольжения. При использовании системы отсчета, жестко связанной со сферой, гра-

¹ Формула для $\sigma \rightarrow 0$ совпадает с выражением, полученным в работе: Струминский В. В., Смирнов Л. П., Кульбицкий Ю. И., Гуськов О. Б., Корольков Г. А. Законы механики дисперсных сред и двухфазных систем в связи с проблемами повышения эффективности технологических процессов. Метод классической механики: Препринт № 1. М.: Сектор механики неоднородных сред АН СССР, 1979. 59 с.

граничные условия на ее поверхности будут следующими: $v_r^\infty + v_r = 0$, $v_\tau^\infty + v_\tau = (\kappa/\mu^e)(P_{r\tau}^\infty + P_{r\tau})$, где κ — коэффициент скольжения.

Интегрируя по поверхности сферы граничные условия, получим систему уравнений, связывающих интегралы X , Y (1.2), решив которую, найдем по формуле (1.1)

$$D = - \frac{3\kappa}{2a(1+3\kappa/a)} \int P_{r\tau}^\infty ds + \frac{3\mu^e}{2(a+3\kappa)} \int v^\infty ds + 9 \frac{\mu^e \kappa/a}{a(1+3\kappa/a)} \int v_r^\infty ds \quad (2.1)$$

Соответствующие предельные значения получаются из формулы (2.1) при $\kappa \rightarrow 0$ (прилипание) и при $\kappa \rightarrow \infty$ (граничные условия на поверхности пузыря).

3. Рассмотрим граничные условия, возникающие в случае, когда нужно учесть переменную по поверхности капли величину поверхностного натяжения. Три первых условия на поверхности капли остаются неизменными: $v_r^\infty + v_r^e = 0$, $v_r^i = 0$, $v_\tau^\infty + v_\tau^e = v_\tau^i = v^\circ$.

Четвертое условие включает в себя градиент поверхностного натяжения γ (предполагается осевая симметрия набегающего потока и осесимметричное распределение поверхностного натяжения) и поверхностную вязкость ξ [6]:

$$\bar{P}_{r\tau}^\infty + P_{r\tau}^e - P_{r\tau}^i = - \frac{1}{a} \frac{d\gamma}{d\theta} - \frac{\xi}{a^2} \frac{\partial^2 v^\circ}{\partial \theta^2}$$

Прибавляется еще пятое условие, выражающее равновесие нормальных сил, приложенных к элементу поверхности сферы, включая нормальную составляющую, обусловленную поверхностным натяжением

$$P_{rr}^\infty + P_{rr}^e - P_{rr}^i = 2\gamma/a$$

Примем, что на внешнюю и внутреннюю жидкость при обтекании сферической капли действует поле сил тяжести, которое уравнивает результирующее гидродинамическое сопротивление. Уравнения Стокса для внешнего и внутреннего течений, рассматривая систему отсчета, в которой ось z совпадает с направлением силы тяжести, можно записать в виде

$$\mu^e \Delta v^e = \nabla \Pi^e, \quad \mu^i \Delta v^i = \nabla \Pi^i \quad (\Pi^k = p^k - \rho^k g z, \quad k = e, i) \quad (3.1)$$

где g — ускорение силы тяжести. При интегрировании по поверхности сферы граничных условий получим

$$\begin{aligned} \int v_r^\infty ds + \frac{1}{\mu^e} X - \frac{2}{a^2} Y &= 0 \\ \frac{1}{10\mu^i} Z + \frac{1}{a^2} W &= 0 \\ \int v_\tau^\infty ds + \frac{1}{\mu^e} X + \frac{2}{a^2} Y &= \frac{2}{5\mu^i} Z + \frac{2}{a^2} W \\ \int P_{r\tau}^\infty ds - 12 \frac{\mu^e}{a^3} Y &= \frac{3}{5a} Z - \frac{1}{a} \int \frac{d\gamma}{d\theta} \tau_0 ds - \frac{2\xi}{5\mu^i a^2} Z - \frac{2\xi}{a^4} W \\ \int P_{rr}^\infty ds - \frac{3}{a} X + 12 \frac{\mu^e}{a^3} Y &+ \frac{3}{5a} Z + \frac{4}{3} \pi a^3 g (\rho^i - \rho^e) k = \frac{2}{a^2} \int \gamma r ds \end{aligned}$$

где τ_0 — единичный вектор касательной к меридиональному сечению сферы, направленный в сторону возрастания угла θ (θ отсчитывается от передней критической точки), k — единичный вектор оси z .

После исключения из всей системы уравнений четырех неизвестных векторов X , Y , Z , W получим интегральное соотношение, которому должно удовлетворять поверхностное натяжение капли, сохраняющей свою сферическую форму]

$$\begin{aligned} \int P_{rr}^\infty ds + \frac{9\mu^e + 6\xi/a}{a\beta} \int v_r^\infty ds + \frac{9\mu^i + 6\sigma\xi/a}{2a\beta} \int v^\infty ds + \frac{3(2\sigma + 1)}{2\beta} \times \\ \times \left\{ \int P_{r\tau}^\infty ds + \frac{1}{a} \int \frac{d\gamma}{d\theta} \tau_0 ds \right\} + \frac{4}{3} \pi a^3 g (\rho^i - \rho^e) k = \frac{2}{a^2} \int \gamma r ds; \quad \beta_1 = 3 + 3\sigma + \xi/\mu^e a \end{aligned} \quad (3.2)$$

Для вектора X имеем выражение

$$X = \frac{a}{2\beta} \left\{ \int P_{r\tau}^\infty ds + \frac{1}{a} \int \frac{d\gamma}{d\theta} \tau_0 ds \right\} - \frac{3\mu^e}{\beta} \int v_r^\infty ds - \frac{3\mu^i}{2\beta} \int v^\infty ds \quad (3.3)$$

Для однородного потока $v^\infty = -Uk$ соотношение (3.3) принимает вид

$$D = 6\pi\mu^e aU \frac{3\sigma + 2 + \xi_*}{3\sigma + 3 + \xi_*} - \frac{3}{2a(3\sigma + 3 + \xi_*)} \int \frac{d\gamma}{d\theta} \tau_0 ds, \quad \xi_* = \frac{\xi}{a\mu^e} \quad (3.4)$$

При постоянном поверхностном натяжении формула (3.4) совпадает с силой сопротивления, полученной Буссинеском [6]. Частным случаем формулы (3.4) при $U = 0$ и $\xi = 0$ является выражение для силы сопротивления, полученное в [7].

При косинусоидальной зависимости коэффициента поверхностного натяжения γ от угла θ без учета поверхностной вязкости ($\gamma = \gamma_0 + \alpha \cos \theta$, $\xi = 0$) соотношение (3.2) в случае $v^\infty = U = -Uk$ запишется в виде

$$-\frac{1+2\sigma}{2a(1+\sigma)} \int \alpha \sin \theta \tau_0 ds + \frac{3\mu^i}{2a(1+\sigma)} 4\pi a^2 U + \frac{3\mu^e}{a(1+\sigma)} \frac{4}{3} \pi a^2 U + \frac{4}{3} \pi a^3 g (\rho^i - \rho^e) k = \frac{2}{a^2} \int \alpha \cos \theta r ds \quad (3.5)$$

Используя равенства

$$\int \sin \theta \tau_0 ds = -\frac{8\pi a^2}{3} k, \quad \int \cos \theta r ds = \frac{4}{3} \pi a^3 k$$

и то, что векторы U и k имеют противоположные направления, получим

$$\frac{4}{3} \pi a^3 g (\rho^i - \rho^e) = 6\pi\mu^e aU \frac{\sigma + 2/3}{\sigma + 1} + \frac{4\pi a \alpha}{3(1+\sigma)} \quad (3.6)$$

Этот результат показывает, что разность силы веса и архимедовой силы уравновешивает сопротивление, определяемое по формуле Адамара — Рыбчинского, суммированное с дополнительным слагаемым, пропорциональным коэффициенту α . В то же время из равенства (3.3) при $\xi = 0$ и условии однородности потока вытекает

$$X = \frac{4\pi a^2}{9(1+\sigma)} \alpha k - \left(\frac{\mu^i}{2} + \frac{\mu^e}{3} \right) \frac{4\pi a^2}{1+\sigma} U$$

Далее имеем $D = -3a^{-1}X$ и для величины D получаем значение, равное правой части соотношения (3.6). Таким образом, результат (3.6), вычисляемый из интегрального соотношения (3.5), согласуется с непосредственным вычислением силы сопротивления.

Подставим выражение (3.3) в соотношение (3.2), имея в виду равенство $D = -3a^{-1}X = -\frac{4}{3}\pi a^3 g (\rho^i - \rho^e) k$ и положим $\xi = 0$. Получим условие, налагаемое на распределение поверхностного натяжения для сферической капли

$$\int P_r^\infty ds + \frac{1}{a} \int \frac{d\gamma}{d\theta} \tau_0 ds = \frac{2}{a^2} \int \gamma r ds \quad (3.7)$$

В случае стоксовости набегающего потока, в частности при однородном потоке, первое слагаемое в левой части (3.7) равно нулю. При осесимметричном распределении поверхностного натяжения отсюда следует

$$\int \left(\frac{d\gamma}{d\theta} \sin \theta + 2\gamma \cos \theta \right) ds = 0 \quad (3.8)$$

Можно показать, что любая функция $\gamma(\theta)$, разложимая в тригонометрический ряд по синусам и косинусам кратных дуг, будет удовлетворять соотношению (3.8).

В качестве приложения были использованы обобщения формулы Факсена (1.4) и (2.1) для определения сил сопротивления двух сфер с учетом их гидродинамического взаимодействия [8]. В работе [8] в выражениях для сил сопротивления двух жидких сфер были допущены описки. Ниже приводится правильная запись формулы (7) из статьи [8] для сил сопротивления двух жидких сфер при равенстве их радиусов

$$D_a = D_b = 6\pi\mu^e aU \lambda_1 \left(1 + \frac{1}{2} \lambda_2 \frac{a^3}{d^3} \right) \left(1 + \frac{3}{2} \lambda_1 \frac{a}{d} - \frac{1}{2} \lambda_2 \frac{a^3}{d^3} \right)^{-1} \\ \lambda_1 = \frac{\sigma + \frac{2}{3}}{\sigma + 1}, \quad \lambda_2 = \frac{\sigma}{\sigma + 1}$$

Если радиусы сфер не равны, то сопротивления сфер D_a , D_b определяются из системы двух уравнений, одно из которых имеет вид

$$D_a = 6\pi\mu^e aU \lambda_1 + 3\pi\mu^e aU \lambda_1 \lambda_2 \frac{b^3}{d^3} - \left(\frac{3}{2} \frac{a}{d} - \frac{1}{2} \frac{a^3}{d^3} \right) \lambda_1 D_b - \frac{1}{1+\sigma} \frac{a}{d} D_b$$

а второе получается заменой a на b и b на a .

ЛИТЕРАТУРА

1. Faxen H. Der Widerstand gegen die Bewegung einer starren Kugel in einer zähen Flüssigkeit, die zwischen zwei parallelen, ebenen Wänden eingeschlossen ist // Ark. Mat. Astron. Fis. 1924. V. 18. No. 29. S. 1—52.
2. Hetsroni G., Wacholder E., Haber S. The hydrodynamic resistance of a fluid sphere submerged in Stokes flows // ZAMM. 1971. V. 51. № 1. P. 45—50.
3. Ханпель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с.
4. Ламб Г. Гидродинамика. Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
5. Brenner H. The Stokes resistance of an arbitrary particle. IV Arbitrary fields of flow // Chem. Eng. Sci. 1964. V. 19. № 10. P. 703—727.
6. Boussinesq I. Sur l'existence d'une viscosité superficielle dans la mince couche de transition separant un liquide d'un autre fluide contigue // Ann. Chim. Phys. 1913. V. 29. P. 349—371.
7. Subramanian R. S. The Stokes force on a droplet in an unbounded fluid medium due to capillary effects // J. Fluid Mech. 1985. V. 153. P. 389—400.
8. Авакян В. А., Смирнов Л. П. Сопротивление двух жидких, твердых и газообразных сфер в однородном осесимметричном потоке с учетом их взаимодействия // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1987. № 1. С. 39—43.

Москва

Поступила в редакцию
19.VII.1988

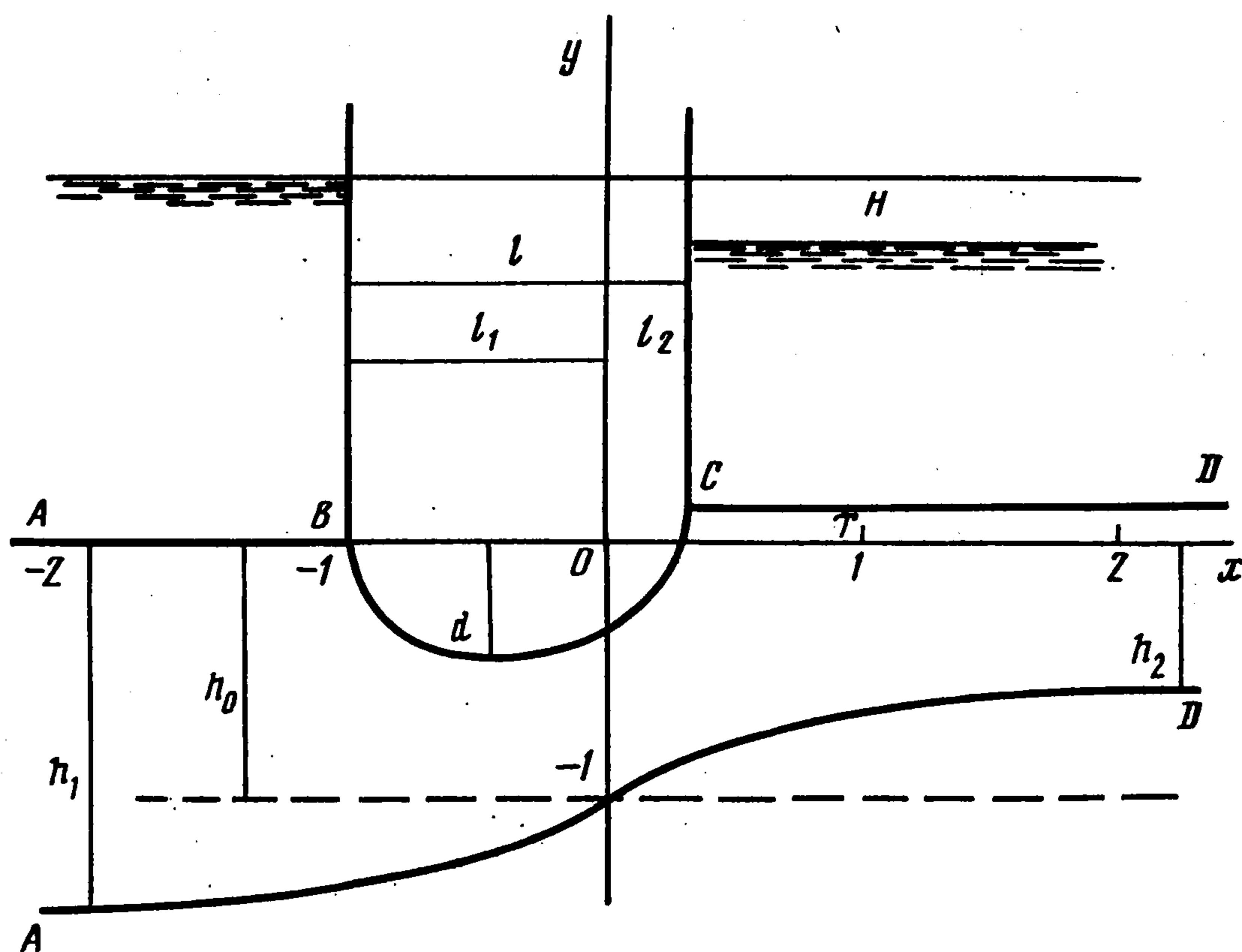
УДК 532.546

© 1990 г.

Э. Н. Береславский

ПОСТРОЕНИЕ КОНТУРА ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТИ ОСНОВАНИЯ ГИДРОСООРУЖЕНИЯ ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ ДВУХ ЖИДКОСТЕЙ РАЗНОЙ ПЛОТНОСТИ

Строится подземный контур постоянной скорости в случае, когда при движении воды под плотиной на некоторой глубине имеется слой покоящейся соленой воды.



Фиг. 1

Приводятся результаты численных расчетов и дается анализ влияния основных определяющих параметров модели на форму и размеры подземного контура плотины. Отмечаются предельные случаи течения: схема с водопором [1], а также [фильтрация] вокруг точечного шпунта [2—4].

1. **Постановка задачи.** Рассматривается плоское установившееся движение пресных вод плотности ρ_1 под непроницаемым подземным контуром плотины BC, когда на неко-