жен и в случае, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$, $\lambda_n > 0$ ($n \geqslant 2$), т. е. когда диссипация вводится лишь по какому-то одному каналу.

2°. В рамках использованных при доказательстве теоремы математических конструкций подобной модели в случае $n = 1$ не существует.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Смейл С.* Дифференцируемые динамические системы // Успехи мат. наук. 1970. Т. 25. Вып. 1. С. 113—185.
2. *Смейл С.* Глобальные вопросы устойчивости в теории динамических систем // Математика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1969. Т. 13. Вып. 2. С. 170—174.
3. *Смейл С.* Математическая модель взаимодействия двух клеток, использующая уравнение Тьюринга // Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. С. 274—283.
4. *Кирпичников С. Н.*, *Степанов А. Г.* О существовании структурно-устойчивых глобальных осцилляторов в одном классе динамических систем шестого порядка // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 12. С. 2057—2063.
5. *Hirsch M. N.*, *Smale S.* Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra. N. Y. Acad. Press, 1974. 358 p.
6. *Рейссиг Р.*, *Сансоне Г.*, *Конти Р.* Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1974. 319 с.
7. *Барбашин Е. А.* Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967. 223 с.
8. *Румянцев В. В.*, *Озиранер А. С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 253 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
1.III.1989

УДК 532.5

П. Н. Свиркунов, Э. А. Фельде

ОБ АВТОМОДЕЛЬНОЙ АСИМПТОТИКЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ

Исследуется гидродинамическая реакция вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей полупространство, на вращательный импульс, приложенный к поверхности. Установлено, что для реализующего в этом случае нестационарного течения существует устойчивая автомодельная асимптотика, не зависящая от формы начального возмущения. Получены асимптотики универсального распределения меридиональной скорости вблизи поверхности и на бесконечности.

Для одного класса нестационарных автомодельных течений идеальной жидкости установлен аналог теоремы Бернулли и в осесимметричном случае получен соответствующий интеграл движения.

1. Изучается класс автомодельных движений вязкой несжимаемой жидкости, поле скоростей которых определяется выражением

$$\mathbf{v} = \sqrt{\frac{\gamma}{t}}\,\mathbf{u}\left(\frac{\mathbf{r}}{\sqrt{\gamma t}}\right) \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{r} \in R^3$ — радиус-вектор, t — время и γ — характерный параметр задачи с размерностью циркуляции. Решения подобного типа могут описывать асимптотическую стадию реакции жидкой среды на локализованные динамические возмущения.

Система уравнений Навье — Стокса для безразмерной вектор-функции $\mathbf{u}$ преобразуется при учете (1.1) к виду

$$(\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u} - {}^1/_2\mathbf{u} - {}^1/_2\,(\mathbf{a}\cdot\nabla)\,\mathbf{u} = -\nabla p + \varepsilon\Delta\mathbf{u}$$
$$(\nabla\cdot\mathbf{u}) = 0, \quad \varepsilon = \nu/\gamma, \quad \mathbf{a} = \mathbf{r}/\sqrt{\gamma t}, \quad p = tP/(\gamma\sigma)$$

(операторы ∇ и Δ действуют на $\mathbf{a}$; P — давление, σ — плотность жидкости).

2. Рассмотрим вначале некоторые общие свойства течений вида (1.1) в пределе исчезающе малой вязкости ($\nu \ll \gamma$), когда последним слагаемым в первом уравнении (1.2) можно пренебречь. Тогда это уравнение можно переписать в виде, аналогичном

уравнению Эйлера в форме Громеки — Лэмба

$$\omega \times (\mathbf{u} - {}^1/_2\mathbf{a}) = -\nabla\Pi, \quad \Pi = p + {}^1/_2\mathbf{u}^2 - {}^1/_2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}) \tag{2.1}$$

Умножая обе части уравнения (2.1) скалярно на $\mathbf{u} - {}^1/_2\mathbf{a}$, получим: $\Pi = \mathrm{const}$ на линиях векторного поля $\mathbf{u} - {}^1/_2\mathbf{a}$, т. е. для рассматриваемого класса нестационарных движений жидкости существует аналог теоремы Бернулли.

В случае, когда движение жидкости обладает осевой симметрией, из (2.1) аналогичным образом получим, что угловой момент ρu_φ (ρ — расстояние до оси симметрии) также постоянен на линиях векторного поля $\mathbf{u} - {}^1/_2\mathbf{a}$. Отсюда при учете аналога интеграла Бернулли следует интеграл уравнения (2.1): $\Pi = F(\rho u_\varphi)$ (F — функция, которую следует определить из граничных условий) аналогично тому, как это имеет место для стационарного случая [1].

3. В качестве примера использования представления поля скорости в виде (1.1) определим реакцию вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей полупространство, на вращательный импульс, приложенный к ее поверхности. В этом случае поле скорости можно искать в виде ([2], с. 192)

$$v_r = rF(z, t), \quad v_\varphi = r\Phi(z, t), \quad v_z = \Psi(z, t), \quad P = P(z, t) \tag{3.1}$$

где r, z, φ — цилиндрические размерные координаты.

Рассмотренные в [2] задачи связаны с исследованием динамики пограничного слоя на вращающемся диске, когда угловая скорость его вращения меняется по закону $\sim t^\alpha$. (Изучаемому в настоящей работе случаю отвечало бы значение $\alpha = -1$.) Однако в окончательной системе уравнений для автомодельных функций опущены нелинейные конвективные слагаемые, которые, как оказывается, играют важную роль в динамике выхода на автомодельную стадию. Ниже данный вопрос изучается на основе численного решения нестационарных уравнений Навье — Стокса применительно к решениям вида (3.1).

Преобразуем уравнение Навье — Стокса, используя замену

$$\mathbf{r} \to \mathbf{a} = \mathbf{r}/\sqrt{\gamma(t + t_0)}, \quad t \to \tau = \ln(1 + t/t_0), \quad \mathbf{v} \to \mathbf{u} = \sqrt{\gamma/(t + t_0)}\,\mathbf{v}$$

Здесь $t \in [0, \infty)$, а $\sqrt{\gamma t_0}$ определяет характерный пространственный масштаб начального возмущения. При этом уравнение (1.3) останется неизменным, а к левой части уравнения (1.2) добавится $\partial u/\partial\tau$. Выход решения на стационарную по τ стадию эквивалентен выходу на автомодельную асимптотику.

Предположим, что в начальный момент времени отлична от нуля только азимутальная компонента скорости $u_\varphi = \rho\Omega_0(\xi)$ ($\xi = z/\sqrt{\gamma(t + t_0)}$), причем $\Omega_0(\xi)$ достаточно быстро убывает в глубь жидкости (при $\xi \to \infty$). Поверхность полагаем неподвижной, что справедливо в случае достаточно малого возмущения, а касательные напряжения на ней считаем отсутствующими. В соответствии с этим ищем решение в виде

$$u_\xi = -W(\xi, \tau), \quad u_\rho = {}^1/_2\partial W/\partial\xi, \quad u_\varphi = \rho\Omega(\xi, \tau), \quad p = p(\xi, \tau)$$

При этом уравнение неразрывности удовлетворяется автоматически. Обозначив $\partial W/\partial\xi$ через Y, имеем из первого уравнения (1.2) систему уравнений относительно безразмерных функций Y, Ω, p (интегрирование по ζ ведется от 0 до ξ)

$$\partial\Omega/\partial\tau = (1 - Y)\Omega + \left(\int Y\,d\xi + \xi/2\right)\partial\Omega/\partial\xi + \varepsilon\partial^2\Omega/\partial\xi^2$$

$$\partial Y/\partial\tau = Y - {}^1/_2Y^2 + 2\Omega^2 + \left(\int Y\,d\xi + \xi/2\right)\partial Y/\partial\xi + \varepsilon\partial^2 Y/\partial\xi^2$$

$$\partial p/\partial\xi = (\partial/\partial\tau)\int Y\,d\xi - (Y + {}^1/_2)\int Y\,d\xi - \xi Y/2 - \varepsilon\partial Y/\partial\xi \tag{3.2}$$

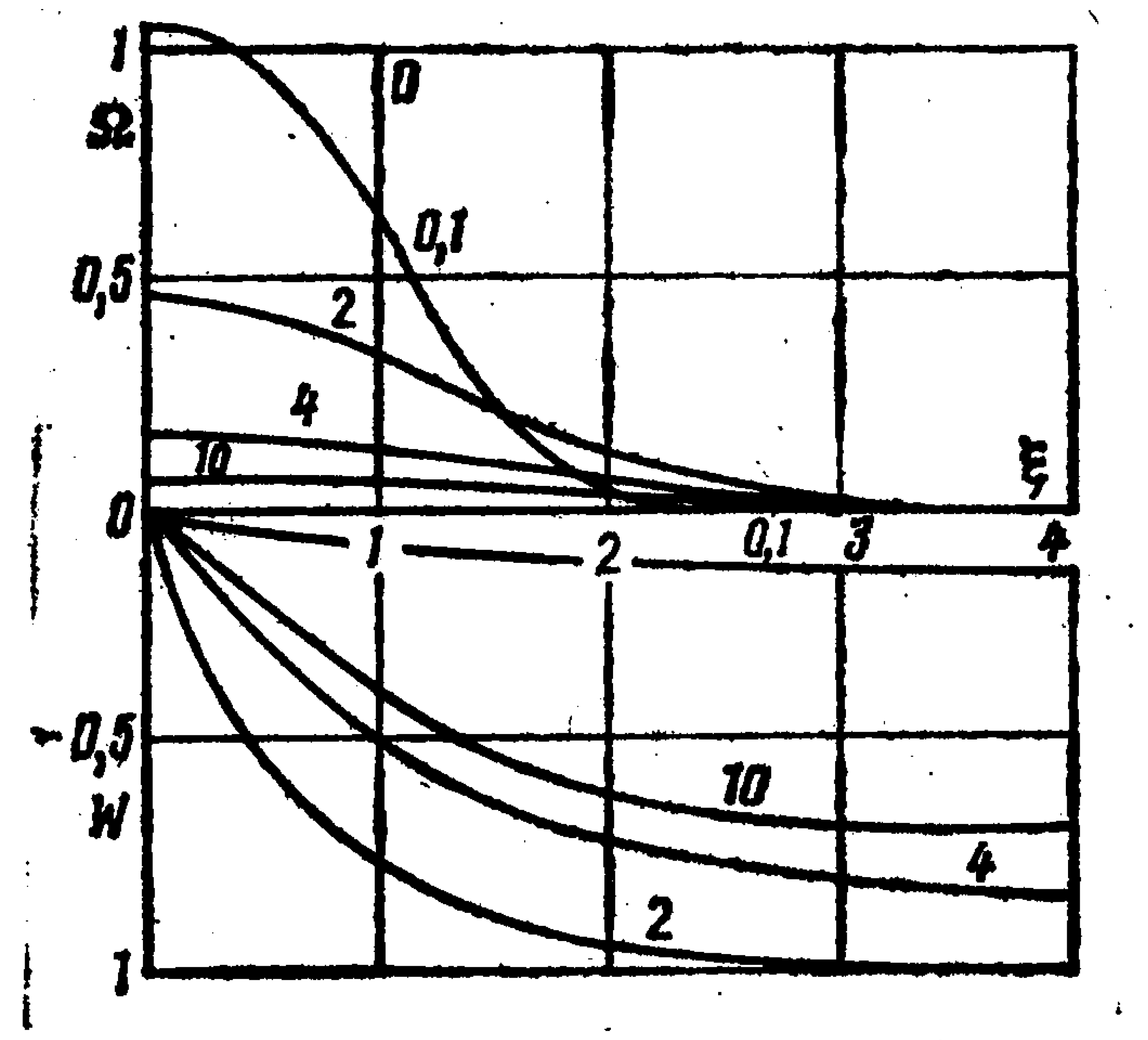
Систему уравнений (3.2) дополняют граничные условия, следующие из отсутствия касательных напряжений на свободной поверхности.

Условие $W(\xi = 0) = 0$ использовано при записи уравнений (3.2).

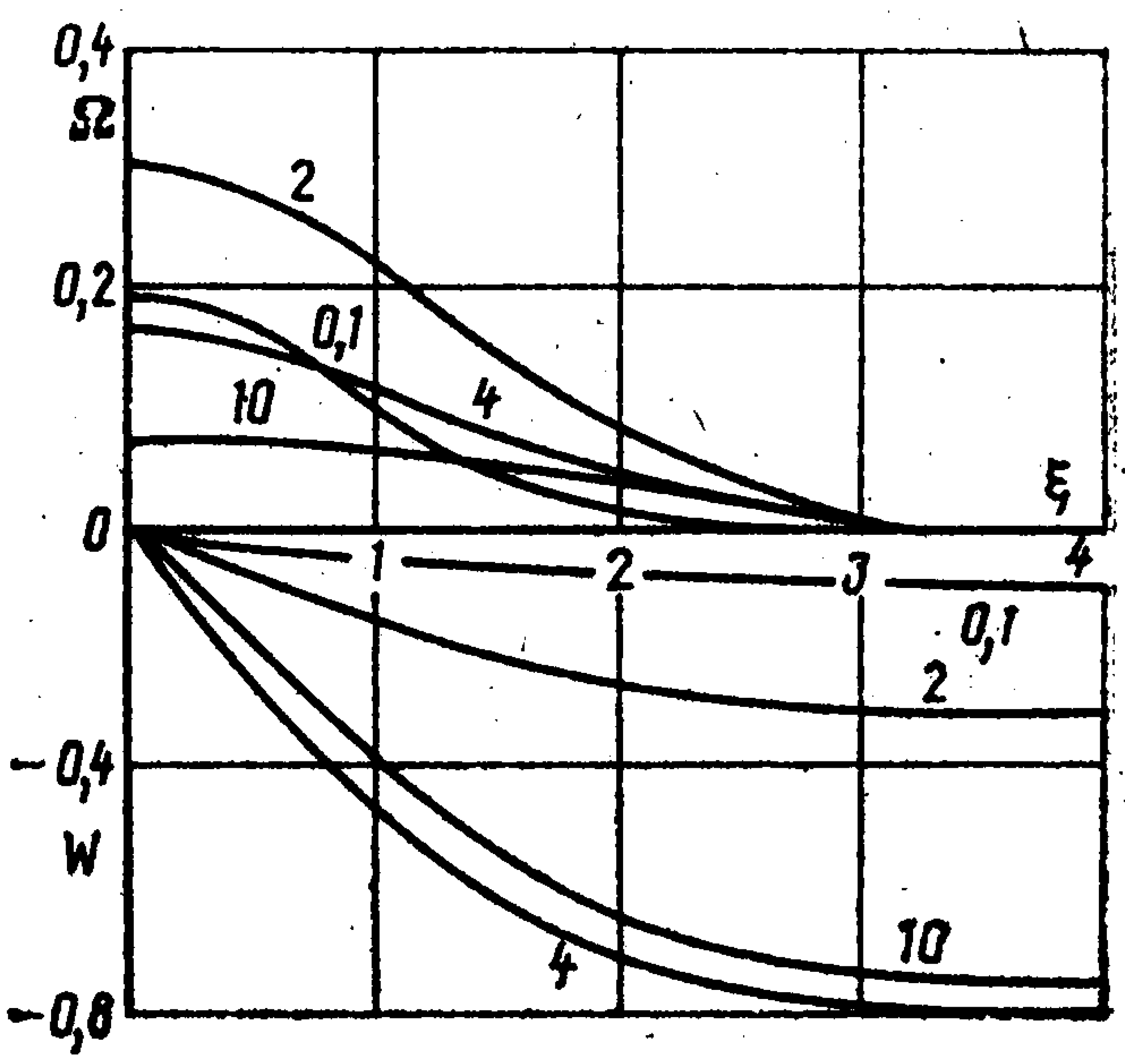
Получившаяся краевая задача решалась численно для различных начальных распределений $\Omega(\xi, 0) = \Omega_0(\xi)$ при условии $Y(\xi, 0) = 0$. Использовалась явная схема, которая, как известно [3], устойчива и сходится к решению для достаточно малого шага по τ. В результате расчетов выяснено, что для произвольных начальных профилей $\Omega_0(\xi)$, локализованных вблизи $\xi = 0$, возникает меридиональное течение, профиль которого асимптотически ($\tau \gg 1$) стремится к универсальному, не зависящему от $\Omega_0(\xi)$ виду, при этом вращение исчезает.

Это автомодельное решение отлично от того, которое можно получить, следуя [2], положив $\alpha = -1$), и которое дает $\Omega \neq 0$ в автомодельной стадии. Это отличие связано с неучетом в [2] конвективного переноса, которое обусловливает вынос завихренности в радиальном направлении на бесконечность.

На фиг. 1, 2 проиллюстрирована динамика выхода на автомодельную стадию для двух различных профилей $\Omega_0(\xi)$: $\Omega_0 = 1$ при $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, $\Omega_0 = 0$ при $\xi > 1$ (фиг. 1) и $\Omega_0 = 0{,}2 \exp(-\xi^2)$ (фиг. 2). Цифры у кривых соответствуют значениям τ.



Фиг. 1



Фиг. 2

Проанализируем подробнее поле скоростей в асимптотической стадии, когда $\Omega = 0$, $\partial Y/\partial\tau = 0$. Уравнение для компоненты скорости $W(\xi)$ в этом случае имеет вид (штрих означает производную по ξ)

$$\varepsilon W''' + (W + \xi/2) W'' + (1 - W'/2) W = 0 \tag{3.3}$$

Аналитически уравнение (3.3) вряд ли разрешимо, поэтому для анализа его решения, удовлетворяющего необходимым граничным условиям, воспользуемся методом сращиваемых асимптотических разложений в предположении $\varepsilon \ll 1$ [4].

В области $\xi \gg \sqrt{\varepsilon}$ можно пренебречь вязким слагаемым, тогда нетрудно получить решение в параметрическом виде

$$W = -\frac{\xi}{2} + \frac{Ct^{5/2}}{(2-t)^{1/2}}, \quad \xi = 2C\int_0^t \frac{x^{3/2}\,dx}{(2-x)^{3/2}}, \quad Y = 2 - t \tag{3.4}$$

Здесь $t \in (0, 2)$ — параметр, определяющий зависимость W и Y от ξ, C — постоянная, пропорциональная скорости на бесконечности W_∞. Переходя к пределу $t \to 2$ и раскрывая неопределенность, получим

$$W_\infty = 3\pi C \tag{3.5}$$

При $\xi \to 0$ из (3.4) имеем асимптотику

$$Y = 2 - \left(\frac{5\xi}{\sqrt{2}C}\right)^{2/5} + O(\xi^{4/5}) \tag{3.6}$$

Во внутренней области $\xi \ll \sqrt{\varepsilon}$, сделав замену $Y = 2 + N$ и линеаризовав (3.3), получим уравнение

$$\varepsilon N'' + {}^5/_2\xi N' - N = 0$$

решение которого, удовлетворяющее нужному условию $N'(0) = 0$ имеет вид

$$N = A \cdot F(-{}^1/_5, {}^1/_2, -5\xi^2/(4\varepsilon))$$

где $F(\alpha, \beta, x)$ — вырожденная гипергеометрическая функция. Используя асимптотический вид F для $\xi \gg \sqrt{\varepsilon}$, имеем $N \sim \xi^{2/5}$ [5]. Из условия сращивания с решением (3.6) получим связь между постоянными A и C

$$A = \pi^{-1/2}\Gamma(7/10)\,(10\varepsilon/C^2)^{1/5}$$

Учитывая соотношение (3.5), а также то обстоятельство, что замена $W \to W_* = \varepsilon^{-1/2}W$, $\xi \to \xi_* = \varepsilon^{-1/2}\xi$ убирает параметр ε из уравнения (3.3), можно заключить, что $C \sim \sqrt{\varepsilon}$, и следовательно, А не зависит от ε. Проведенные расчеты показали, что $C \approx 0{,}07\varepsilon^{1/2}$ и $A \approx 2{,}12$.

Таким образом, для поставленной задачи о реакции полубесконечной вязкой несжимаемой среды на вращательный импульс, приложенный к поверхности, существует выход на автомодельную устойчивую асимптотику. В процессе выхода на нее характер первоначального возмущения существенно трансформируется: азимутальная компонента скорости в автомодельной стадии исчезает и остается только меридиональное течение, параметры которого не зависят от амплитуды и формы начального возмущения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
2. *Лойцянский Л. Г.* Ламинарный пограничный слой. М.: Физматгиз, 1962. 479 с.
3. *Пейре Р., Тейлор Т. Д.* Вычислительные методы в задачах механики жидкости. Л.: Гидрометеоиздат, 1986. 352 с.
4. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
5. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973. 294 с.

Обнинск

Поступила в редакцию 16.VI.1988

УДК 532.516

В. А. Авакян, Л. П. Смирнов

ОБОБЩЕНИЯ ФОРМУЛЫ ФАКСЕНА ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Методом интегрирования граничных условий в стоксовом приближении получены выражения для силы сопротивления как сферической капли с обычными граничными условиями и с учетом поверхностной вязкости и изменений поверхностного натяжения, так и твердой сферы с граничными условиями скольжения.

Факсеном были установлены формулы для силы сопротивления и момента, действующих на твердую сферу при граничных условиях прилипания, когда сфера движется и вращается, находясь в произвольном стоксовом (удовлетворяющем уравнениям Стокса) потоке [1]. Обобщение этого результата на случай сферической капли дано в [2], где использовано решение Адамара — Рыбчинского, а также теорема взаимности для стоксовых потоков, обобщенная в [3].

Ниже предлагается сравнительно простой метод определения сил, действующих на сферическую частицу, находящуюся в неоднородном стоксовом потоке. Поля возмущений, вносимых в поток частицей, описываются рядами Ламба [4]. Последующее интегрирование по поверхности сферы граничных условий, поставленных на ее поверхности, позволяет определить нужную интегральную характеристику, через которую выражается сила, действующая на частицу. Окончательные формулы содержат интегралы от характеристик набегающего на сферу неоднородного потока и являются обобщениями формулы Факсена [1].

1. При обтекании сферы произвольным стоксовым потоком, в силу необходимости удовлетворения граничных условий на сфере, возникает поле возмущений, описываемое рядами Ламба. Сила сопротивления, действующая на сферу, оказывается зависящей только от напряжений, получающихся за счет поля возмущений. Можно показать, что интегрирование напряжений, имеющихся в основном потоке, по всей поверхности сферы дает нулевой результат для любого стоксова потока. Вклад поля возмущений будет зависеть только от функции p_{-2} (гармоническая функция, входящая в решение Ламба [4]). Остальные члены разложения Ламба не дают вклада в интеграл, выражающий силу сопротивления D, вследствие свойства ортогональности сферических функций различных порядков на сфере. Таким образом, получим

$$\mathbf{D} = -3a^{-1}\int\limits_{\Sigma} p_{-2}\mathbf{r}\, ds \qquad (1.1)$$