УДК 531.36 : 534.1
© 1990 г.

С. Н. Кирпичников, А. Г. Степанов

О ВОЗМОЖНОСТИ ВОЗНИКНОВЕНИЯ СТРУКТУРНО УСТОЙЧИВЫХ ГЛОБАЛЬНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ПРИ ВВЕДЕНИИ ДИССИПАТИВНЫХ СИЛ В АСИМПТОТИЧЕСКИ УСТОЙЧИВЫЕ В ЦЕЛОМ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Показано, что при введении диссипативных сил взаимодействия (типа вязкого трения) между двумя грубыми асимптотически устойчивыми в целом механическими автономными системами возможно превращение этих систем в структурно устойчивый глобальный осциллятор. Однако размерность пространств конфигураций каждой из таких систем должна быть не меньше, чем два.

Изучаются динамические системы вида

$$x^{\cdot\cdot} = F(x, x^{\cdot}), \quad x \in \mathrm{R}^n \tag{1}$$

где R^n — евклидово векторное n-мерное пространство, а точкой обозначено дифференцирование по независимой переменной t. Пространства $\mathrm{R}^n = \{x\}$, $\mathrm{R}^{2n} = \{(x, x^{\cdot})\}$ называются соответственно конфигурационным и фазовым пространствами системы (1). Касательные пространства евклидовых векторных пространств отождествляются с самими этими пространствами. В соотношении (1) $F: \mathrm{R}^{2n} \to \mathrm{R}^n = \{x^{\cdot}\}$ — гладкое отображение. Задание системы (1) эквивалентно заданию в ее фазовом пространстве векторного поля $f: \mathrm{R}^{2n} \to \mathrm{R}^{2n}$, $(x, x^{\cdot}) \mapsto (x^{\cdot}, F(x, x^{\cdot}))$. Динамическая система, отвечающая полю f, обозначается $z^{\cdot} = f(z)$, $z = (x, x^{\cdot}) \in \mathrm{R}^{2n}$.

Введем некоторые определения (см., например, [1, 2]). Структурная устойчивость системы (1) означает, что уравнение $z^{\cdot} = f_0(z)$ имеет те же структурные свойства, что и уравнение $z^{\cdot} = f(z)$, если векторное поле f_0 получено из f при помощи C^1-возмущения f. Далее, динамическая система (1) называется глобально асимптотически устойчивой, если у нее существует единственное положение равновесия $x = x_0$, $x^{\cdot} = 0$ и всякое решение при $t \to \infty$ стремится к этому положению равновесия. Наконец, динамическая система (1) называется глобальным осциллятором (ГО), если у нее имеется нетривиальное периодическое решение Г, а любое другое решение, исключая в фазовом пространстве множество Σ меры нуль, стремится к Г при $t \to \infty$. Здесь рассматриваются лишь ГО, у которых множества Σ — гладко вложенные в $\mathrm{R}^{2n} = \{(x, x^{\cdot})\}$ диски положительной коразмерности, а на Σ каждое решение стремится к единственному положению равновесия $(x_0, 0)$.

Будет удобно использовать и механическую терминологию, называя уравнения (1) уравнениями движения механической системы, а F, $x^{\cdot}$, $x^{\cdot\cdot}$ — векторами сил, скоростей и ускорений соответственно.

Пусть динамическая система

$$x^{\cdot\cdot} = S(x, x^{\cdot}), \quad (x, x^{\cdot}) \in \mathrm{R}^{2n} \tag{2}$$

— структурно устойчива и глобально асимптотически устойчива.

Связывая две такие первоначально независимые между собой одинаковые динамические системы (2) диссипативными силами линейного взаимодействия типа «вязкого трения», рассмотрим динамическую систему

$$\begin{aligned} x_1^{\cdot\cdot} &= S(x_1, x_1^{\cdot}) + \mu\cdot(x_2^{\cdot} - x_1^{\cdot}), \\ x_2^{\cdot\cdot} &= S(x_2, x_2^{\cdot}) + \mu\cdot(x_1^{\cdot} - x_2^{\cdot}) \end{aligned} \tag{3}$$

где μ — характеризующая диссипативные силы $(n \times n)$-матрица, которую, не ограничивая общности, считаем диагональной, неотрицательной. Система (3) имеет порядок $4n$ и определена в фазовом пространстве $\mathrm{R}^{4n} = \{(x_1, x_1^{\cdot}, x_2, x_2^{\cdot})\}$.

Основная цель работы — доказательство того, что при $n \geqslant 2$ система (3) может быть структурно устойчивым ГО. Этот вывод определяет парадоксальный эффект, который может иметь существенное значение в теоретической механике и механике управляемого движения. А именно, пусть две грубые асимптотически устойчивые в целом механические системы связываются при помощи диссипативных сил взаимодействия, пропорциональных разностям соответствующих скоростей. Такое взаимодействие само по себе имеет тенденцию выравнивать эти скорости. И тем не менее, в результате него объединенная так система может «ожить» — превратиться в структурно устойчивый

ГО. Если механическая система (2) подвержена действию одних лишь потенциальных, гироскопических и определенно диссипативных сил, то, очевидно, рассматриваемый эффект возникнуть не может. Таким образом, для возможности его появления необходимо присутствие в механической системе (2) либо неконсервативных, либо ускоряющих сил, либо сил более сложной структуры.

Подобная задача, когда связываются две грубые глобально асимптотически устойчивые динамические системы общего вида $z^{\cdot} = f(z)$, $z \in \mathbf{R}^m$ линейным взаимодействием типа «диффузии», была исследована в работах [3, 4]. Оказалось, что в результате введения такого взаимодействия может возникнуть структурно устойчивый ГО, если размерность фазового пространства $m \geqslant 3$. Для применения в данной работе методику статьи [3] пришлось существенно видоизменить. Это вызвано тем, что исследуемый здесь класс автономных механических систем уже класса динамических систем общего вида.

Теорема. При $n \geqslant 2$ существуют полиномиальные отображения $S: \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ и неотрицательные диагональные матрицы $\mu = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, такие, что

А) система уравнений (2) структурно устойчива и глобально асимптотически устойчива,

Б) система уравнений (3) является структурно устойчивым ГО.

Доказательство. Учитывая, что достаточно рассмотреть лишь случай $n = 2$, докажем, что существует полиномиальное (кубическое отображение $S: \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$, $(x, x^{\cdot}) \mapsto S(x, x^{\cdot})$ и матрица $\mu = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$, $\lambda_2 > \lambda_1 \geqslant 0$, такие, что, во-первых, начало координат $x = x^{\cdot} = 0$ — грубый глобальный аттрактор системы уравнений $x^{\cdot\cdot} = S(x, x^{\cdot})$ в ее фазовом пространстве $\mathbf{R}^4 = \{(x, x^{\cdot})\}$ и, во-вторых, в фазовом пространстве $\mathbf{R}^8 = \{(x_1, x_1^{\cdot}, x_2, x_2^{\cdot})\}$ соответствующее системе (3) векторное поле

$$(x_1, x_1^{\cdot}, x_2, x_2^{\cdot}) \mapsto (x_1^{\cdot}, S(x_1, x_1^{\cdot}) + \mu\cdot(x_2^{\cdot} - x_1^{\cdot}),$$
$$x_2^{\cdot}, S(x_2, x_2^{\cdot}) + \mu\cdot(x_1^{\cdot} - x_2^{\cdot})) \tag{4}$$

определяет структурно устойчивый ГО.

Векторное поле (4) в фазовом пространстве $\mathbf{R}^8$ касается четырехмерной плоскости $\Delta = \{(x_1, x_1^{\cdot}, x_2, x_2^{\cdot}) \mid x_1 = x_2, x_1^{\cdot} = x_2^{\cdot}\}$, т. е. Δ — интегральное многообразие динамической системы (3), соответствующей векторному полю (4), а на самом Δ векторное поле имеет вид

$$(x, x^{\cdot}) \mapsto (x^{\cdot}, S(x, x^{\cdot})), \quad x = x_1 = x_2, \; x^{\cdot} = x_1^{\cdot} = x_2^{\cdot} \tag{5}$$

Функцию S считаем нечетной, т. е. $S(-x, -x^{\cdot}) = -S(x, x^{\cdot})$. Тогда ортогональная Δ четырехмерная плоскость $\Delta^{\perp} = \{(x_1, x_1^{\cdot}, x_2, x_2^{\cdot}) \mid x_1 = -x_2, x_1^{\cdot} = -x_2^{\cdot}\}$ тоже будет интегральным многообразием динамической системы (3). При этом на самом подпространстве $\Delta^{\perp}$ векторное поле (4) перейдет в векторное поле

$$(x, x^{\cdot}) \mapsto (x^{\cdot}, S(x, x^{\cdot}) - 2\mu\cdot x^{\cdot}), \quad x = x_1 = -x_2, \; x^{\cdot} = x_1^{\cdot} = -x_2^{\cdot} \tag{6}$$

Тем самым задача сведена к нахождению полиномиального нечетного отображения $S: \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$, $(x, x^{\cdot}) \mapsto S(x, x^{\cdot})$, обладающего свойствами:

1) начало координат $x = x^{\cdot} = 0$ — глобальный аттрактор векторного поля (5) $(x, x^{\cdot}) \mapsto (x^{\cdot}, S(x, x^{\cdot}))$ в пространстве $\mathbf{R}^4 = \{(x, x^{\cdot})\}$,

2) векторное поле (6) $(x, x^{\cdot}) \mapsto (x^{\cdot}, S(x, x^{\cdot}) - 2\mu\cdot x^{\cdot})$ определяет структурно устойчивый ГО в $\mathbf{R}^4 = \{(x, x^{\cdot})\}$,

3) подпространство $\Delta^{\perp}$ — глобальный аттрактор векторного поля (4) в пространстве $\mathbf{R}^8 = \{(x_1, x_1^{\cdot}, x_2, x_2^{\cdot})\}$.

В пространстве $\mathbf{R}^4 = \{(x, x^{\cdot})\}$ и соответствующем пространстве $\mathbf{R}^2 = \{x^{\cdot}\}$ сделаем линейную замену координат $y = Ax$, $y^{\cdot} = Ax^{\cdot}$, (2×2)-матрицу A которой конкретизируем позже. В $(y, y^{\cdot})$-координатах отображение $S: \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ будем искать в виде суммы $S = S_1 + S_3$ линейного отображения S_1: $\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$, $(y, y^{\cdot}) \mapsto S_1(y, y^{\cdot})$ с матрицей S_1 и кубического отображения S_3: $\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$, $S_3(y, y^{\cdot}) = (-(y^{1\cdot})^3, 0)$, где $y = (y^1, y^2)$, $y^{\cdot} = (y^{1\cdot}, y^{2\cdot})$. В новых координатах $y^{1\cdot}$, $y^{2\cdot}$ пространства $\mathbf{R}^2$ матрица μ перейдет в матрицу μ_1, подобную μ. Положим

$$S_1 - 2M_1 = \begin{Vmatrix} -k_1 & 0 & b_{11} & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & -b_{22} \end{Vmatrix}$$
$$M_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ 0 & 0 & \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{Vmatrix}, \quad \mu_1 = \begin{Vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{Vmatrix} \tag{7}$$

где k_1, k_2, b_{11}, b_{22} — положительные постоянные. В $(y, y^{\cdot})$-координатах дифференциальные уравнения, соответствующие векторному полю (6) $(y, y^{\cdot}) \mapsto (y^{\cdot}, S(y, y^{\cdot}) - 2\mu_1 \cdot y^{\cdot})$, будут $dy^1/dt = y^{1\cdot}$, $dy^{1\cdot}/dt = -k_1 y^1 + b_{11} y^{1\cdot} - (y^{1\cdot})^3$

$$dy^2/dt = y^{2\cdot},\ dy^{2\cdot}/dt = -k_2 y^2 - b_{22} y^{2\cdot} \tag{8}$$

Двумерная плоскость $R^2 = \{(y^1, y^{1\cdot})\}$ в пространстве $R^4 = \{(y, y^{\cdot}) = (y^1, y^2, y^{1\cdot}, y^{2\cdot})\}$ будет аттрактором векторного поля (6), причем в самой этой плоскости уравнения поля эквивалентны уравнению Релея [5, 6] $y^{1\cdot\cdot} = -k_1 y^1 + b_{11} y^{1\cdot} - (y^{1\cdot})^3$. Таким образом, если матрица $S_1 - 2M_1$ имеет вид (7), то векторное поле $(y, y^{\cdot}) \mapsto (y^{\cdot}, S(y, y^{\cdot}) - 2\mu_1 \cdot y^{\cdot})$ в пространстве $R^4 = \{(y, y^{\cdot})\} \equiv \{(x, x^{\cdot})\}$, эквивалентное полю (6) в исходных координатах, определяет структурно устойчивый ГО.

Будем считать, что матрицы S_1, μ_1 имеют вид

$$S_1 = \begin{Vmatrix} -k_1 & 0 & -b_1 & b \\ 0 & -k_2 & -b & -b_2 \end{Vmatrix},\quad \mu_1 = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} -(b_{11}+b_1) & b \\ -b & (b_{22}-b_2) \end{Vmatrix} \tag{9}$$

где b, b_1, b_2 — некоторые постоянные, причем $b_1 > 0$, $b_2 > 0$.

Введем функцию

$$E(y^1, y^2, y^{1\cdot}, y^{2\cdot}) = {}^1/_2\,[(y^{1\cdot})^2 + (y^{2\cdot})^2 + k_1 (y^1)^2 + k_2 (y^2)^2] \tag{10}$$

На траекториях динамической системы, определяемой векторным полем (5), будем иметь

$$dE/dt = -b_1 (y^{1\cdot})^2 - b_2 (y^{2\cdot})^2 - (y^{1\cdot})^4 \leqslant 0 \tag{11}$$

Отсюда по теореме [7, 8] об асимптотической устойчивости в целом заключаем, что начало координат (0, 0) — глобальный аттрактор векторного поля (5).

Теперь при выполнении условий

$$\begin{gathered} b_{22} > b_{11} + b_1 + b_2 \\ (b_{11} + b_1)(b_{22} - b_2) \leqslant b^2 < (b_{11} + b_{22} + b_1 - b_2)^2/4 \end{gathered} \tag{12}$$

матрица μ_1 имеет различные вещественные собственные числа $\lambda_2 > \lambda_1 \geqslant 0$. При этом в пространстве $R^2 = \{(y^1, y^2)\}$ существует базис из вещественных собственных векторов матрицы μ_1. Соответствующие ему линейные координаты x^1, x^2 в пространстве $R^2 = \{(y^1, y^2)\}$ и $x^1, x^2, x^{1\cdot}, x^{2\cdot}$ в пространстве $R^4 = \{(y^1, y^2, y^{1\cdot}, y^{2\cdot})\}$ и возьмем в качестве исходных координат x и x, $x^{\cdot}$. Матрица A — вещественная матрица преобразования координат от y^1, y^2 к x^1, x^2.

В качестве примера рассмотрим матрицы

$$S_1 = \begin{Vmatrix} -k_1 & 0 & -\varepsilon & 3 \\ 0 & -k_2 & -3 & -8 \end{Vmatrix},\quad \mu_1 = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} -(1+\varepsilon) & 3 \\ -3 & 7 \end{Vmatrix}$$

$$S_1 - 2M_1 = \begin{Vmatrix} -k_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & -15 \end{Vmatrix} \tag{13}$$

Если $\varepsilon \in (0, 2/7]$, то все сформулированные выше условия выполнены, причем при $\varepsilon = 2/7$ одно из собственных чисел $(\lambda_1 = 40/7)$ положительно, а второе $(\lambda_1 = 0)$ нулевое.

Переходим к проверке последнего условия 3) и покажем, что $\Delta^{\perp}$ — притягивающее многообразие векторного поля (4). Учитывая, что

$$x_1^{\cdot\cdot} + x_2^{\cdot\cdot} = S(x_1, x_1^{\cdot}) + S(x_2, x_2^{\cdot}) \tag{14}$$

в $(y, y^{\cdot})$-координатах для производной от функции $E(y_1^1 + y_2^1, y_1^2 + y_2^2, y_1^{1\cdot} + y_2^{1\cdot}, y_1^{2\cdot} + y_2^{2\cdot})$ на траекториях векторного поля (4) имеем

$$dE/dt = -b_1 (y_1^{1\cdot} + y_2^{1\cdot})^2 - b_2 (y_1^{2\cdot} + y_2^{2\cdot})^2 - (y_1^{1\cdot} + y_2^{1\cdot})((y_1^{1\cdot})^3 + (y_2^{1\cdot})^3) \leqslant 0 \tag{15}$$

причем знак равенства здесь возможен лишь при $x_1^{\cdot} = -x_2^{\cdot}$. В фазовом пространстве $R^8 = \{(x_1, x_1^{\cdot}, x_2, x_2^{\cdot})$ при выполнении условия $x_1^{\cdot} = -x_2^{\cdot}$ целые фазовые кривые, отличные от положения равновесия — начала координат, могут лежать лишь в плоскости $\Delta^{\perp}$. Таким образом, в соответствии с вышеупомянутой теоремой [7, 8] заключаем, что плоскость $\Delta^{\perp}$ является глобальным аттрактором векторного поля (4).

В заключение отметим, что как положение равновесия, так и построенный предельный цикл имеют гиперболическую структуру.

Замечания. 1°. Следует учитывать возможность возникновения изученных выше автоколебаний в сложных управляемых механических системах, особенно, когда в управляющих воздействиях присутствуют неконсервативные силы (силы радиальной коррекции) или ускоряющие силы. При этом важно, что рассматриваемый эффект возможен и в случае, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$, $\lambda_n > 0$ $(n \geqslant 2)$, т. е. когда диссипация вводится лишь по какому-то одному каналу.

2°. В рамках использованных при доказательстве теоремы математических конструкций подобной модели в случае $n = 1$ не существует.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Смейл С.* Дифференцируемые динамические системы // Успехи мат. наук. 1970. Т. 25. Вып. 1. С. 113—185.
2. *Смейл С.* Глобальные вопросы устойчивости в теории динамических систем // Математика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1969. Т. 13. Вып. 2. С. 170—174.
3. *Смейл С.* Математическая модель взаимодействия двух клеток, использующая уравнение Тьюринга // Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. С. 274—283.
4. *Кирпичников С. Н.*, *Степанов А. Г.* О существовании структурно-устойчивых глобальных осцилляторов в одном классе динамических систем шестого порядка // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 12. С. 2057—2063.
5. *Hirsch M. N.*, *Smale S.* Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra. N. Y. Acad. Press, 1974. 358 p.
6. *Рейссиг Р.*, *Сансоне Г.*, *Конти Р.* Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1974. 319 с.
7. *Барбашин Е. А.* Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967. 223 с.
8. *Румянцев В. В.*, *Озиранер А. С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 253 с.

Ленинград

Поступила в редакцию 1.III.1989

УДК 532.5

П. Н. Свиркунов, Э. А. Фельде

ОБ АВТОМОДЕЛЬНОЙ АСИМПТОТИКЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ

Исследуется гидродинамическая реакция вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей полупространство, на вращательный импульс, приложенный к поверхности. Установлено, что для реализующего в этом случае нестационарного течения существует устойчивая автомодельная асимптотика, не зависящая от формы начального возмущения. Получены асимптотики универсального распределения меридиональной скорости вблизи поверхности и на бесконечности.

Для одного класса нестационарных автомодельных течений идеальной жидкости установлен аналог теоремы Бернулли и в осесимметричном случае получен соответствующий интеграл движения.

1. Изучается класс автомодельных движений вязкой несжимаемой жидкости, поле скоростей которых определяется выражением

$$\mathbf{v} = \sqrt{\frac{\gamma}{t}}\,\mathbf{u}\left(\frac{\mathbf{r}}{\sqrt{\gamma t}}\right) \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{r} \in R^3$ — радиус-вектор, t — время и γ — характерный параметр задачи с размерностью циркуляции. Решения подобного типа могут описывать асимптотическую стадию реакции жидкой среды на локализованные динамические возмущения.

Система уравнений Навье — Стокса для безразмерной вектор-функции $\mathbf{u}$ преобразуется при учете (1.1) к виду

$$(\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u} - {}^1\!/_2\mathbf{u} - {}^1\!/_2\,(\mathbf{a}\cdot\nabla)\,\mathbf{u} = -\,\nabla p + \varepsilon\Delta\mathbf{u}$$
$$(\nabla\cdot\mathbf{u}) = 0, \quad \varepsilon = \nu/\gamma, \quad \mathbf{a} = \mathbf{r}/\sqrt{\gamma t}, \quad p = tP/(\gamma\sigma)$$

(операторы ∇ и Δ действуют на $\mathbf{a}$; P — давление, σ — плотность жидкости).

2. Рассмотрим вначале некоторые общие свойства течений вида (1.1) в пределе исчезающе малой вязкости ($\nu \ll \gamma$), когда последним слагаемым в первом уравнении (1.2) можно пренебречь. Тогда это уравнение можно переписать в виде, аналогичном