Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 2, 1990

УДК 521.131

Л. Д. Пустыльников

О НЕКОТОРЫХ ФИНАЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЯХ В ЗАДАЧЕ n ТЕЛ

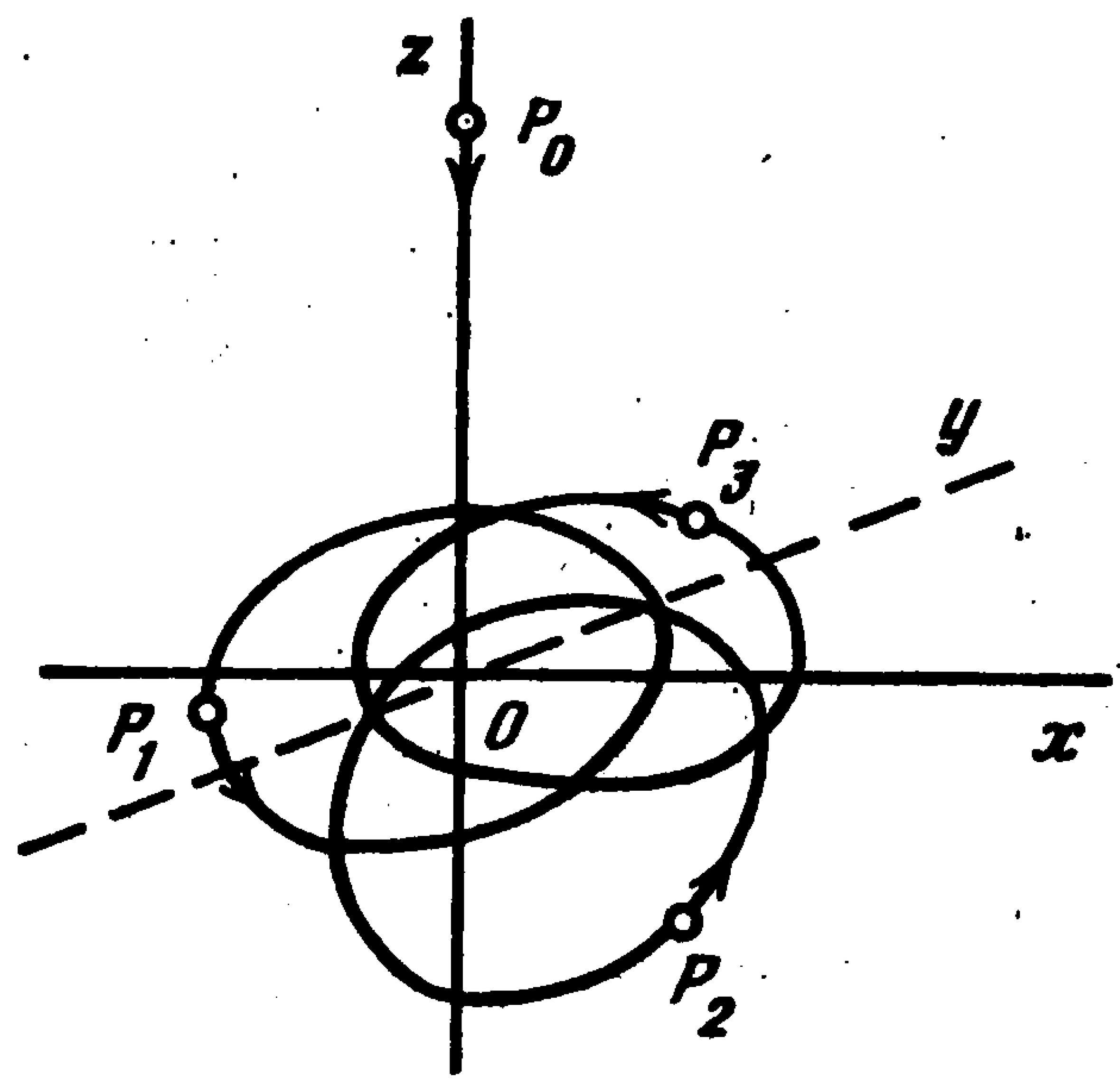
Строятся осциллирующие движения и движения с захватом в задаче n ($n > 3$) тел небесной механики, а также доказывается, что ограниченные, осциллирующие и неограниченные движения при $t \to \infty$ и $t \to -\infty$ (t — время) возможны в любых комбинациях.

Рассмотрим $n \geqslant 3$ материальных точек (тел) $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$, взаимодействующих друг с другом по закону Ньютона с гравитационной постоянной $\gamma > 0$.

Определение 1. Будем говорить, что имеет место захват, если при $t \to \infty$ (t — время) все попарные расстояния между телами ограничены, тогда как при $t \to -\infty$ хотя бы одно из попарных расстояний стремится к бесконечности.

Определение 2. Движение называется осциллирующим при $t \to \infty$ ($t \to -\infty$), если в конфигурационном пространстве замыкание соответствующей полутраектории при $t \to \infty$ ($t \to -\infty$) не компактно, но и не стремится к бесконечности.

В случае $n = 3$ осциллирующие движения и движения с захватом были найдены [1—3] для одного частного случая задачи трех тел. Цель данной работы — распространить указанные результаты для любого $n > 3$. Рассмотрим следующий частный случай задачи n тел. Предположим, что в некоторой прямоугольной системе координат x, y, z тела $P_1, \ldots, P_{n-1}$, имеющие одну и ту же массу $m > 0$, двигаются так, что в плоскости $z = \text{const}$ они всегда находятся в вершинах правильного $(n-1)$-угольника, центр которого лежит на оси z, а тело P_0, имеющее массу m_0, двигается по оси z (фигура). Предположим сначала, что масса $m_0 = 0$, а тела $P_1, \ldots, P_{n-1}$ расположены в плоскости $z = 0$. Тогда существует движение этих тел, при котором они описывают периодические траектории, находясь все время в вершинах правильного $(n-1)$-угольника с центром в начале координат [4, с. 109].



Определение 3. Будем говорить, что движение тела P_0, входящего в систему из n тел $P_0, \ldots, P_{n-1}$, принадлежит к классу симметричных моделей с параметрами n, m (сокращенно $CM(n, m)$), зависящему от траектории тел $P_1, \ldots, P_{n-1}$, если выполняются следующие условия.

1). При $k \neq 0$ масса тела P_k равна $m > 0$, а масса тела P_0 равна нулю.

2). Тела $P_1, \ldots, P_{n-1}$ совершают в плоскости $z = 0$ периодические движения, находясь все время в вершинах правильного $(n-1)$-угольника с центром в точке $O = (0, 0, 0)$ так, что их траектории никогда через точку O не проходят, а тело P_0 двигается вдоль оси z.

В формулируемой далее теореме 1 $x_k^{(n)}(t, m)$, $y_k^{(n)}(t, m)$, $z_k^{(n)}(t, m)$ — соответственно координаты x, y, z в момент времени t тела P_k ($k = 0, 1, \ldots, n-1$) для произвольной траектории из класса $CM(n, m)$, а λ_n — величины

$$\lambda_n = \sum_{s=1}^{n-2}\left(\exp\left(2\pi i \frac{s}{n-1}\right)-1\right)\left|\exp\left(2\pi i \frac{s}{n-1}\right)-1\right|^{-3}$$

которые в силу их определения вещественны и отрицательны.

Теорема 1. Для любого $n \geqslant 3$ и произвольного класса $CM(3, m)$ существует такой класс $CM(n, \lambda_3\lambda_n^{-1}m)$, что функции $z_0^{(3)} = z_0^{(3)}(t, m)$, $z_0^{(n)} = z_0^{(n)}(t, \lambda_3\lambda_n^{-1}m)$ удовлетворяют уравнениям

$$\partial^2 z_0^{(3)}/\partial t^2 = -Q_3(z_0^{(3)}, t), \quad \partial^2 z_0^{(n)}/\partial t^2 = -Q_n(z_0^{(n)}, t)$$

и при любых z, t выполнено равенство

$$Q_n(z, t) = {}^1/_2(n-1)\, Q_3(z, t)$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную траекторию

$$(x_k^{(n)}, y_k^{(n)}, z_k^{(n)}) = (x_k^{(n)}(t), y_k^{(n)}(t), z_k^{(n)}(t)) \quad (k = 0, \ldots, n-1)$$

при которой движение тела P_0 принадлежит классу $CM(n, m)$. Для $k = 1, \ldots, n-1$ введем комплексные переменные $\xi_k = x_k^{(n)} + iy_k^{(n)}$. Тогда уравнение движения тела P_k $(k = 1, \ldots, n-1)$ можно записать в комплексной форме

$$\frac{\partial^2 \xi_k}{\partial t^2} = m\gamma \sum_{l \neq k}(\xi_l - \xi_k)\, r_{kl}^{-3} \tag{1}$$

а уравнение движения тела P_0 — в виде

$$\frac{\partial^2 z_0^{(n)}}{\partial t^2} = -m\gamma \sum_{k=1}^{n-1} z_0^{(n)} r_{k0}^{-3} \tag{2}$$

где r_{kl} $(l = 0, \ldots, n-1)$ — расстояние между телами P_k и P_l.

Предположим теперь, что $\xi_k = \zeta_k q_n$ $(k = 1, \ldots, n-1)$, $\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}$ — различные комплексные числа, а $q_n = q_n(t, m)$ — комплексная функция, отличная от нуля. В этом случае уравнения (1), (2) переходят соответственно в уравнения

$$\zeta_k \frac{\partial^2 q_n}{\partial t^2} = q_n |q_n|^3 m\gamma \sum_{l \neq k}(\zeta_l - \zeta_k)|\zeta_l - \zeta_k|^{-3} \quad (k = 1, \ldots, n-1) \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 z_0^{(n)}}{\partial t^2} = -m\gamma z_0^{(n)} \sum_{k=1}^{n-1}(|q_n|^2|\zeta_k|^2 + (z_0^{(n)})^2)^{-3/2} \tag{4}$$

Согласно (3), выражение

$$q^{1/2}\bar{q}_n^{3/2}\partial^2 q_n/\partial t^2 = c \tag{5}$$

($\bar{q}_n$ — величина, комплексно-сопряженная q_n) не зависит от t и

$$\zeta_k c = m\gamma \sum_{l \neq k}(\zeta_l - \zeta_k)|\zeta_l - \zeta_k|^{-3} \quad (k = 1, \ldots, n-1) \tag{6}$$

Предполагая теперь, что комплексные числа ζ_k — вершины правильного $(n-1)$-угольника, вписанного в окружность радиуса $r \neq 0$ с центром в точке O, при $k = 1, \ldots$ $\ldots, n-1$ получим равенство

$$\zeta_k^{-1} \sum_{l \neq k}(\zeta_l - \zeta_k)|\zeta_l - \zeta_k|^{-3} = \lambda_n r^{-3} \tag{7}$$

где λ_n — число, введенное в обозначениях. Поэтому в силу (6), (7) уравнение (5) приобретает вид

$$q_n^{1/2}\bar{q}_n^{3/2}\partial^2 q_n/\partial t^2 = m\gamma\lambda_n r^{-3} \tag{8}$$

а уравнение (4) переходит в уравнение

$$\partial^2 z_0^{(n)}/\partial t^2 = -m\gamma z_0^{(n)}(n-1)(|q_n|^2 r^2 + (z_0^{(n)})^2)^{-3/2} = -Q_n(z_0^{(n)}, t) \tag{9}$$

Если $n = 3$, а массы тел P_1 и P_2 равны M, то в плоскости xy точки P_1 и P_2 двигаются по периодическим орбитам симметрично относительно начала координат, и в этом случае согласно (8), (9) функция $q_3 = q_3(t, M)$ удовлетворяет уравнению

$$q_3^{1/2}\bar{q}_3^{3/2}\partial^2 q_3/\partial t^2 = M\gamma\lambda_3 r^{-3} \tag{10}$$

а функция $z_0^{(3)} = z_0^{(3)}(t, M)$ — уравнению

$$\partial^2 z_0^{(3)}/\partial t^2 = -2M\gamma z_0^{(3)}(|q_3|^2 r^2 + (z_0^{(3)})^2)^{-3/2} = -Q_3(z_0^{(3)}, t) \tag{11}$$

Подставляя в уравнение (8) вместо $q_n(t, m)$ функцию $q_3(t, M)$, в силу (10) получим, что равенство (8) будет выполнено, если $m = M\lambda_3\lambda_n^{-1}$ и в этом случае $q_n(t, m) = q_3(t, M)$. Сравнивая теперь равенства (9) и (11), получим утверждение теоремы 1.

Теорема 2. Для любого $n \geqslant 3$ существует такой класс $CM(n, m)$, в котором реализуются захват и осциллирующие движения, причем ограниченные, осциллирующие и неограниченные движения при $t \to \infty$ и $t \to -\infty$ возможны в любых комбинациях.

Доказательство. Была доказана [2, 3] теорема 2 для случая $n = 3$; эти результаты получены в качестве следствия аналогичных утверждений о решениях уравнения

$$\partial^2 z / \partial t^2 = -Q(z, t) \tag{12}$$

где $Q(z, t)$ — гладкая функция, имеющая период 2π по t и удовлетворяющая некоторым общим условиям (так как если эксцентриситеты орбит тел P_1 и P_2 малы, то функция $Q_3(z_0^{(3)}, t)$ в (11) удовлетворяет тем же условиям, что и $Q(z, t)$ в (12)).

В случае же, когда $n > 3$, согласно теореме 1 существует такое число $m > 0$, равное массам тел $P_1, \ldots, P_{n-1}$, что функция $Q_n(z_0^{(n)}, t)$ в (9) отличается от функции $Q_3(z_0^{(3)}, t)$ постоянным множителем $^1/_2(n-1)$. Поэтому из работ [2, 3] следует, что функция $Q_n(z_0^{(n)}, t)$ и уравнение (9) удовлетворяют тем же условиям, что и функция $Q(z, t)$ и уравнение (12) для случая потенциальной ямы конечной глубины. При этом наименее очевидна проверка условия, согласно которому две замкнутые кривые, соответствующие параболическим движениям при $t \to \pm\infty$, имеют трансверсальную точку пересечения (условие 8° в [3], с. 22). Указанная проверка для функции $Q_n(z, t) = {}^1/_2(n-1)\,Q(z, t)$ дословно проводится так же, как соответствующая проверка в доказательстве теоремы 9 из [3] для функции $Q(z, t)$, так как постоянный множитель $^1/_2(n-1)$ не влияет на само это доказательство.

Теорема 3. Утверждение теоремы 2 справедливо, если в условиях этой теоремы масса m_0 тела P_0 достаточно мала и отлична от нуля.

Доказательство теоремы 3 при учете теорем 1, 2 повторяет доказательство этой теоремы для случая $n = 3$ [5].

В качестве следствия теорем 2 и 3 получаем решение проблемы захвата в задаче n тел небесной механики [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ситников К. А.* Существование осциллирующих движений в задаче трех тел // Докл. АН СССР. 1960. Т. 133. № 2. С. 303—306.
2. *Алексеев В. М.* Квазислучайные динамические системы. II. Одномерные нелинейные колебания в периодически возмущаемом поле // Мат. сб. 1968. Т. 77. № 4. С. 545—600.
3. *Алексеев В. М.* Квазислучайные динамические системы. III. Квазислучайные колебания одномерных осцилляторов // Мат. сб. 1969. Т. 78. № 1. С. 3—50.
4. *Зигель К. Л.* Лекции по небесной механике. М.: ИЛ, 1959. 300 с.
5. *Алексеев В. М.* Квазислучайные колебания и качественные вопросы небесной механики // Девятая летняя математическая школа. Лекции. Кацивели, 1971. Киев: АН УССР, 1976. С. 212—341.
6. *Littlewood J. E.* On the problem of n bodies // Meddel. Lunds Univ. mat. Sem., Suppl. M. Riesz., 1932. P. 143—151.

Москва

Поступила в редакцию
3.VII.1989