

УДК 539.375

© 1990 г.

А. Л. Каламкар, Б. А. Кудрявцев, В. З. Партон

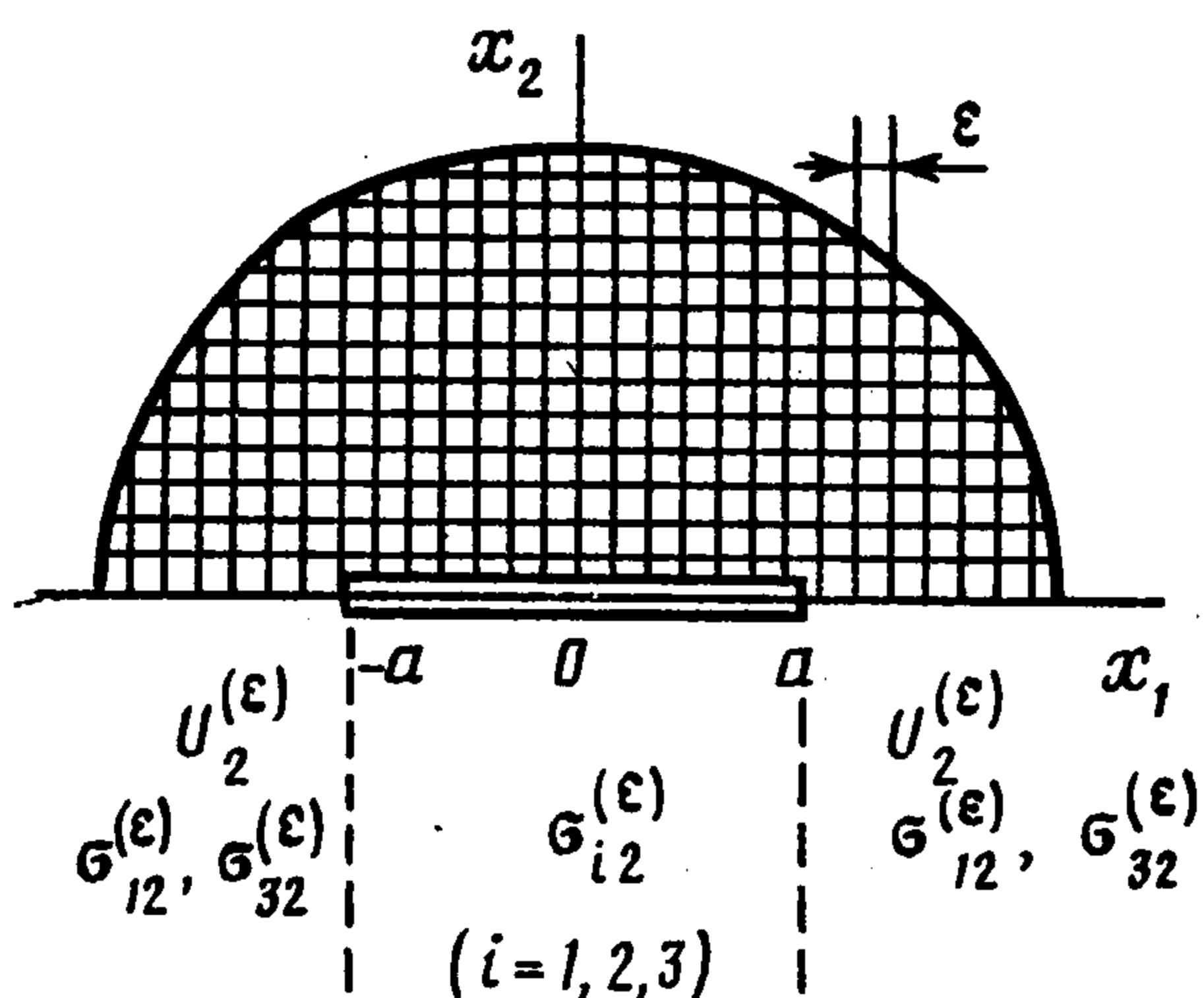
МЕТОД ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В МЕХАНИКЕ РАЗРУШЕНИЯ КОМПОЗИТОВ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

Рассматривается задача о прямолинейной трещине в композиционном материале двоякопериодической структуры. Предполагается, что размер трещины значительно больше размера ячейки периодичности материала. Для анализа поля напряжений в окрестности макротрещины предлагается метод пограничного слоя, основанный на применении асимптотического метода осреднения периодических структур с учетом дополнительных решений типа пограничного слоя [1], позволяющих учесть краевой эффект, возникающий вблизи границы контура трещины.

Анализ поля напряжений в сильно неоднородных (композиционных) материалах с идеализированной гладкой макротрещиной обычно проводят при помощи замены неоднородной композиционной среды некоторой однородной анизотропной средой, эквивалентной композиту по усредненной реакции. Такой подход позволяет свести расчет осредненного поля напряжений в композите с макротрещиной к решению задачи теории упругости для анизотропного однородного материала с математическим разрезом. Если материал имеет неперидическую структуру (что свойственно многим композитам), то осредненные (эффективные) характеристики эквивалентной среды следует определять по методу осреднения периодических структур [1—3], который дает асимптотически правильное приближение к точному решению задачи для исходной неоднородной среды. При этом метод осреднения позволяет с большой степенью точности определить локальную структуру исследуемых полей. Указанный подход применялся в [4] при анализе поля напряжений вблизи макротрещины в слоистых композитах периодической структуры. В ряде случаев получены формулы для коэффициентов интенсивности напряжений, выражающие их через характеристики отдельных компонентов композита и параметры, фиксирующие положение трещины в слоистом материале.

В данной работе предлагается более строгий подход к оценке напряженного состояния композита с трещиной.

1. Ограничимся рассмотрением плоской задачи теории упругости для периодически неоднородной (композиционной) среды с прямолинейной



Фиг. 1

макротрещиной, размер которой значительно больше размера ячейки периодичности. Будем также предполагать, что упругая среда имеет двоякопериодическую неоднородность в плоскости x_1, x_2 , а берега туннельной трещины параллельны границе ячейки периодичности (фиг. 1); ϵ — безразмерный малый параметр, представляющий собой отношение размера ячейки композита к характерному размеру тела. В рамках такой схемы можно рассматривать, например, волокнистый однона-

правленный композит с туннельной трещиной, плоскость которой параллельна волокну, или слоистый композит с плоской трещиной, расположенной перпендикулярно (параллельно) слоям материала.

Пусть прямолинейная макротрещина проходит по границе ячеек периодичности неограниченной области композита, а на ее берегах действует заданная система самоуравновешенных нормальных и касательных нагрузок. Для определения напряженно-деформированного состояния в окрестности такой трещины необходимо построить асимптотическое решение уравнений теории упругости в периодически неоднородной полуплоскости $x_2 > 0$ ($x_2 < 0$) при смешанных условиях на границе $x_2 = 0$.

Граничные условия при $x_2 = 0$ соответствуют заданию напряжений $\sigma_{i\alpha}^{(e)}(x_1, \pm 0)$ ($i = 1, 2, 3$) на участке $|x_1| < a$ и смешанных условий на перемещения и напряжения при $|x_1| > a$ (фиг. 1).

Для того чтобы в рамках асимптотического метода удовлетворить смешанным условиям на границе $x_2 = 0$ периодически неоднородной полуплоскости $x_2 > 0$, построим решения трех вспомогательных плоских задач для области $x_2 > 0$.

2. В первой задаче будем искать решение уравнений

$$\partial \sigma_{i\alpha}^{(e)}(x_1, x_2) / \partial x_\alpha = 0 \quad (2.1)$$

$$\sigma_{i\alpha}^{(e)}(x_1, x_2) = c_{i\alpha k\beta}(y_1, y_2) \partial u_k^{(s)}(x_1, x_2) / \partial x_\beta \quad (2.2)$$

($c_{i\alpha k\beta}(y_1, y_2)$ — однопериодические функции по переменным $y_\alpha = x_\alpha/\varepsilon$; $i, k = 1, 2, 3$; $\alpha, \beta = 1, 2$) в области $x_2 > 0$ при следующих условиях на границе:

$$\sigma_{i2}^{(e)}(x_1, 0) = p_i(x_1) \quad (2.3)$$

где $p_i(x_1)$ — заданные функции «медленной» переменной x_1 .

Постулируем разложение [1—3]

$$u_k^{(e)} = u_k^{(0)}(x) + \varepsilon u_k^{(1)}(x, y) + \varepsilon^2 u_k^{(2)}(x, y) + \dots, (x=(x_1, x_2), y=(y_1, y_2)) \quad (2.4)$$

и на основании соотношений (2.2), (2.4) найдем

$$\begin{aligned} \sigma_{i\alpha}^{(e)} &= \sigma_{i\alpha}^{(0)}(x, y) + \varepsilon \sigma_{i\alpha}^{(1)}(x, y) + \dots \\ \sigma_{i\alpha}^{(0)}(x, y) &= c_{i\alpha k\beta}(y) (\partial u_k^{(0)}(x) / \partial x_\beta + \partial u_k^{(1)}(x, y) / \partial y_\beta) \\ \sigma_{i\alpha}^{(1)}(x, y) &= c_{i\alpha k\beta}(y) (\partial u_k^{(1)}(x, y) / \partial x_\beta + \partial u_k^{(2)}(x, y) / \partial y_\beta) \end{aligned} \quad (2.5)$$

В результате подстановки соотношений (2.5) в уравнения (2.1) и условия (2.3) получим следующие краевые задачи:

$$\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \left[c_{i\alpha k\beta}(y) \frac{\partial u_k^{(1)}(x, y)}{\partial y_\beta} \right] = - \frac{\partial c_{i\alpha k\beta}(y)}{\partial y_\alpha} \frac{\partial u_k^{(0)}(x)}{\partial x_\beta} \quad (2.6)$$

$$c_{i2k\beta}(y) \Big|_{y_2=0} \frac{\partial u_k^{(1)}(x, y)}{\partial y_\beta} \Big|_{y_2=0} = - c_{i2k\beta}(y) \Big|_{y_2=0} \frac{\partial u_k^{(0)}(x)}{\partial x_\beta} \Big|_{x_2=0} + p_i(x_1) \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \left[c_{i\alpha k\beta}(y) \frac{\partial u_k^{(2)}(x, y)}{\partial y_\beta} \right] &= - \frac{\partial c_{i\alpha k\beta}(y)}{\partial y_\alpha} \frac{\partial u_k^{(1)}(x, y)}{\partial x_\beta} - \\ &- c_{i\alpha k\beta}(y) \frac{\partial^2 u_k^{(1)}(x, y)}{\partial y_\alpha \partial x_\beta} - c_{i\alpha k\beta}(y) \frac{\partial^2 u_k^{(0)}(x)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - c_{i\alpha k\beta}(y) \frac{\partial^2 u_k^{(1)}(x, y)}{\partial x_\alpha \partial y_\beta} \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$c_{i2k\beta}(y) \Big|_{y_2=0} \frac{\partial u_k^{(2)}(x, y)}{\partial y_\beta} \Big|_{y_2=0} + c_{i2k\beta}(y) \Big|_{y_2=0} \frac{\partial u_k^{(1)}(x, y)}{\partial x_\beta} \Big|_{x_2=0} = 0 \quad (2.9)$$

Решение уравнений (2.6) при условиях (2.7) представим в виде суммы двух слагаемых

$$u_k^{(1)}(x, y) = u_k^{(1,1)}(x, y) + u_k^{(1,2)}(x, y)$$

где $u_k^{(1,1)}(x, y)$ — однопериодические функции по переменным y_1, y_2 , удовлетворяющие уравнениям (2.6), а функции $u_k^{(1,2)}(x, y)$ являются

периодическими только по переменной y_1 и определяются из решения следующей задачи:

$$\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \left[c_{i\alpha k\beta}(y) \frac{\partial u_k^{(1,2)}(x,y)}{\partial y_\beta} \right] = 0 \quad (2.10)$$

$$c_{i2k\beta}(y) \Big|_{y_2=0} \frac{\partial u_k^{(1,2)}(x,y)}{\partial y_\beta} \Big|_{y_2=0} = - c_{i2k\beta}(y) \Big|_{y_2=0} \frac{\partial u_k^{(1,1)}(x,y)}{\partial y_\beta} \Big|_{y_2=0} - \\ - c_{i2k\beta}(y) \Big|_{y_2=0} \frac{\partial u_k^{(0)}(x)}{\partial x_\beta} \Big|_{x_2=0} + p_i(x_1); \quad u_k^{(1,2)}(x,y) \rightarrow 0 \text{ при } y_2 \rightarrow \infty \quad (2.11)$$

Если искать $u_n^{(1,1)}(x,y)$ в виде

$$u_n^{(1,1)}(x,y) = N_{nk\beta}(y) \frac{\partial u_k^{(0)}(x)}{\partial x_\beta} \quad (2.12)$$

где $N_{nk\beta}(y)$ — однопериодические функции, определяемые из решения локальной задачи на ячейке периодичности

$$\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \left[c_{i\alpha n\gamma}(y) \frac{\partial N_{nk\beta}(y)}{\partial y_\gamma} \right] = - \frac{\partial c_{i\alpha k\beta}(y)}{\partial y_\alpha} \quad (2.13)$$

то можно показать, что условие разрешимости задачи (2.10), (2.11) приводит к равенству

$$C_{i2k\beta}^* \frac{\partial u_k^{(0)}(x)}{\partial x_\beta} \Big|_{x_2=0} = p_i(x_1) \quad (2.14)$$

$$C_{i2k\beta}^* = \int_0^1 C_{i2k\beta}(y_1, 0) dy_1 \quad (2.15)$$

$$C_{i\alpha k\beta}(y) = c_{i\alpha k\beta}(y) + c_{i\alpha n\gamma}(y) \frac{\partial N_{nk\beta}(y)}{\partial y_\gamma}$$

Теперь при учете соотношений (2.12), (2.14) первое условие (2.11) запишем в виде

$$c_{i2k\beta}(y) \Big|_{y_2=0} \frac{\partial u_k^{(1,2)}(x,y)}{\partial y_\beta} \Big|_{y_2=0} = [C_{i2k\beta}^* - C_{i2k\beta}(y) \Big|_{y_2=0}] \frac{\partial u_k^{(0)}(x)}{\partial x_\beta} \Big|_{x_2=0} \quad (2.16)$$

Решение уравнений (2.10) можно найти по формуле

$$u_n^{(1,2)}(x,y) = N_{nk\beta}^{(1)}(y) \frac{\partial u_k^{(0)}(x)}{\partial x_\beta} \quad (2.17)$$

где функции $N_{nk\beta}^{(1)}(y)$ определяются из решения следующей краевой задачи:

$$\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \left[c_{i\alpha n\gamma}(y) \frac{\partial N_{nk\beta}^{(1)}(y)}{\partial y_\gamma} \right] = 0 \quad (2.18) \\ c_{i2n\gamma}(y) \Big|_{y_2=0} \frac{\partial N_{nk\beta}^{(1)}(y)}{\partial y_\gamma} \Big|_{y_2=0} = C_{i2k\beta}^* - C_{i2k\beta}(y) \Big|_{y_2=0} \\ N_{nk\beta}^{(1)}(y) \rightarrow 0 \text{ при } y_2 \rightarrow \infty$$

причем функции $N_{nk\beta}^{(1)}(y)$ однопериодичны по y_1 .

Функции $u_k^{(2)}(x,y)$, удовлетворяющие соотношениям (2.8), (2.9), также будем искать в виде суммы

$$u_k^{(2)}(x,y) = u_k^{(2,1)}(x,y) + u_k^{(2,2)}(x,y)$$

Где $u_k^{(2,1)}(x,y)$ — однопериодические функции по переменным y_1, y_2 , а $u_k^{(2,2)}(x,y)$ — функции, периодические только по y_1 и стремящиеся к нулю при $y_2 \rightarrow \infty$. Опуская громоздкие уравнения для слагаемых $u_k^{(2,1)}(x,y)$, $u_k^{(2,2)}(x,y)$, отметим, что из условия разрешимости задачи относительно $u_k^{(2,1)}(x,y)$ следуют осредненные уравнения

$$\langle C_{i\alpha k\beta} \rangle \frac{\partial^2 u_k^{(0)}(x)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = 0 \quad (2.19)$$

и формулы для эффективных характеристик однородной среды

$$\langle C_{i\alpha k\beta} \rangle = \int_0^1 \int_0^1 \left[c_{i\alpha k\beta}(y) + c_{i\alpha n\gamma}(y) \frac{\partial N_{nk\beta}}{\partial y_\gamma} \right] dy_1 dy_2 \quad (2.20)$$

Таким образом, в рамках теории нулевого приближения [2] смещения в периодически неоднородной полуплоскости с заданной нагрузкой на границе $x_2 = 0$ определяются по формулам

$$u_n^{(e)} \approx u_n^{(0)}(x) + \varepsilon [N_{nk\beta}(y) + N_{nk\beta}^{(1)}(y)] \frac{\partial u_k^{(0)}(x)}{\partial x_\beta} \quad (2.21)$$

где вектор $u_k^{(0)}(x)$ — решение осредненной задачи (2.19) для полуплоскости $x_2 > 0$, удовлетворяющий условию (2.14).

При этом выражения для микронапряжений в ячейке композита имеют вид

$$\sigma_{i\alpha}^{(e)} \approx \sigma_{i\alpha}^{(0)}(x, y) = \left[c_{i\alpha k\beta}(y) + c_{i\alpha n\gamma}(y) \left(\frac{\partial N_{nk\beta}}{\partial y_\gamma} + \frac{\partial N_{nk\beta}^{(1)}}{\partial y_\gamma} \right) \right] \frac{\partial u_k^{(0)}(x)}{\partial x_\beta} \quad (2.22)$$

3. Рассмотрим вторую вспомогательную задачу для периодически неоднородной полуплоскости с заданными смещениями на ее границе

$$u_i^{(e)}|_{x_2=0} = v_i(x_1) \quad (3.1)$$

Если воспользоваться разложением (2.4), то из условия (3.1) следует, что

$$u_i^{(0)}(x)|_{x_2=0} = v_i(x_1) \quad (3.2)$$

причем функции $u_i^{(1)}(x, y)$, $u_i^{(2)}(x, y)$ должны удовлетворять уравнениям (2.6), (2.8) и условиям

$$u_i^{(1)}(x, y)|_{x_2=0} = 0, \quad u_i^{(2)}(x, y)|_{x_2=0} = 0 \quad (3.3)$$

Аналогично предыдущей задаче будем искать $u_k^{(1)}(x, y)$ в виде суммы двух слагаемых: $u_k^{(1,1)}(x, y)$ и $u_k^{(1,2)}(x, y)$. Асимптотический анализ этой задачи проведен в [1] и показано, что указанные функции могут быть представлены в виде

$$u_n^{(1,1)}(x, y) = N_{nk\beta}(y) \frac{\partial u_k^{(0)}(x)}{\partial x_\beta}, \quad u_n^{(1,2)}(x, y) = N_{nk\beta}^{(2)}(y) \frac{\partial u_k^{(0)}(x)}{\partial x_\beta}$$

где $N_{nk\beta}(y)$ — однопериодические функции по переменным y_1, y_2 , удовлетворяющие уравнениям (2.13), а $N_{nk\beta}^{(2)}(y)$ — однопериодические по y_1 решения следующей задачи для полуплоскости $y_2 > 0$:

$$\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \left[c_{i\alpha n\gamma}(y) \frac{\partial N_{nk\beta}^{(2)}(y)}{\partial y_\gamma} \right] = 0 \quad (3.4)$$

$$N_{nk\beta}^{(2)}(y)|_{y_2=0} = -N_{nk\beta}(y)|_{y_2=0} + h_{nk\beta}^{(2)}, \quad N_{nk\beta}^{(2)}(y) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad y_2 \rightarrow \infty \quad (3.5)$$

Постоянные $h_{nk\beta}^{(2)}$, входящие в первое условие (3.5), однозначно определяются из условия разрешимости задачи (3.4), (3.5), см. [1].

В данном случае решения уравнений (2.8) при нулевых условиях на границе полуплоскости также можно определить в виде суммы двух слагаемых, из которых первое — решение, периодическое по y_1, y_2 , а второе периодически только по y_1 и стремится к нулю при $y_2 \rightarrow \infty$. При этом из условия разрешимости локальной задачи для периодической по y_1, y_2 составляющей полного решения следуют глобальные (осредненные) уравнения (2.19).

Итак, в рамках нулевого приближения имеем следующее выражение для смещений в периодически неоднородной полуплоскости:

$$u_n^{(e)} \approx u_n^{(0)}(x) + \varepsilon [N_{nk\beta}(y) + N_{nk\beta}^{(2)}(y)] \partial u_k^{(0)}(x) / \partial x_\beta \quad (3.6)$$

причем $u_k^{(0)}(x)$ определяются из решения осредненной задачи — уравнения (2.19) и условия (3.2), а для составляющих микронапряжений в ячейке композита справедливы формулы

$$\sigma_{i\alpha}^{(e)} \approx \sigma_{i\alpha}^{(0)}(x, y) = \left[c_{i\alpha k\beta}(y) + c_{i\alpha n\gamma}(y) \left(\frac{\partial N_{nk\beta}(y)}{\partial y_\gamma} + \frac{\partial N_{nk\beta}^{(2)}(y)}{\partial y_\gamma} \right) \right] \frac{\partial u_k^{(0)}(x)}{\partial x_\beta} \quad (3.7)$$

4. Если на границе $x_2 = 0$ неоднородной полуплоскости $x_2 > 0$ задавать смешанные граничные условия, например в виде

$$\sigma_{i2}^{(e)}|_{x_2=0} = p_i(x_1) \quad (i = 1, 3), \quad u_2^{(e)}|_{x_2=0} = v_2(x_1) \quad (4.1)$$

то можно показать, что асимптотическое решение задачи по-прежнему имеет вид (2.21), (2.22), но при этом вместо функций $N_{nk\beta}^{(1)}(y)$ в эти формулы следует подставить функции $N_{nk\beta}^{(3)}(y)$, которые определяются из решения следующей задачи в области $y_2 > 0$:

$$\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \left[c_{i\alpha n\gamma}(y) \frac{\partial N_{nk\beta}^{(3)}(y)}{\partial y_\gamma} \right] = 0 \quad (i, k, n = 1, 2, 3) \quad (4.2)$$

$$c_{i2n\gamma}(y)|_{y_2=0} \frac{\partial N_{nk\beta}^{(3)}(y)}{\partial y_\gamma} \Big|_{y_2=0} = C_{i2k\beta}^* - C_{i2k\beta}(y)|_{y_2=0} \quad (i = 1, 3) \quad (4.3)$$

$$N_{2k\beta}^{(3)}(y)|_{y_2=0} = -N_{2k\beta}(y)|_{y_2=0} + h_{2k\beta}^{(3)}; \quad N_{nk\beta}^{(3)}(y) \rightarrow 0 \quad \text{при } y_2 \rightarrow \infty$$

причем функции $N_{nk\beta}^{(3)}(y)$ однопериодичны по y_1 .

В данном случае вектор $u_k^{(0)}(x)$ — решение уравнений (2.19) при условиях

$$C_{i2k\beta}^* \partial u_k^{(0)}(x) / \partial x_\beta |_{x_2=0} = p_i(x_1) \quad (i = 1, 3), \quad u_2^{(0)}(x)|_{x_2=0} = v_2(x_1) \quad (4.4)$$

5. Воспользуемся результатами решения указанных выше задач для анализа напряженного состояния в окрестности вершины прямолинейной макротрещины нормального разрыва, которая проходит по границе прямоугольных ячеек периодичности композиционной среды. Пусть на берегах этой трещины отсутствуют касательные напряжения $\sigma_{12}^{(e)}$, $\sigma_{23}^{(e)}$ и задано нормальное напряжение

$$\sigma_{22}^{(e)}|_{x_2=\pm 0} = p_2(x_1), \quad |x_1| < a$$

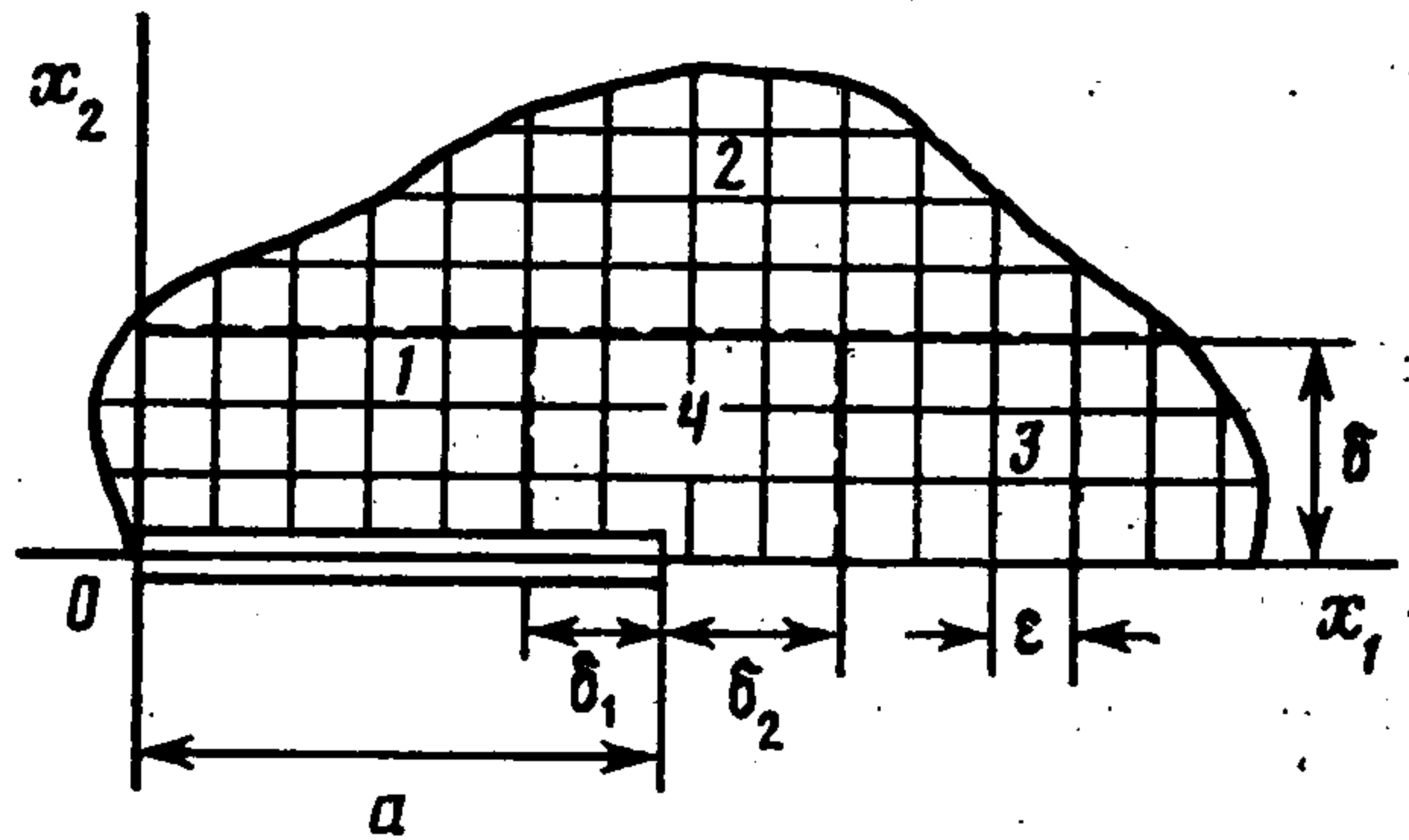
Тогда в силу симметрии напряженно-деформированного состояния относительно оси x_1 можно ограничиться рассмотрением только верхней полуплоскости ($x_2 > 0$), на границе которой должны выполняться следующие условия (фиг. 1):

$$\sigma_{i2}^{(e)}|_{x_2=0} = 0 \quad (i = 1, 3), \quad |x_1| < \infty$$

$$\sigma_{22}^{(e)}|_{x_2=0} = p_2(x_1), \quad |x_1| < a; \quad u_2^{(e)}|_{x_2=0} = 0, \quad |x_1| > a \quad (5.1)$$

Анализируя напряженное состояние неоднородной полуплоскости с граничными условиями (5.1), можно выделить в окрестности границы полуплоскости несколько характерных областей. Прежде всего рассмотрим в окрестности точек $x_1 = \pm a$, $x_2 = 0$ область 4 в форме прямоугольника со сторонами $\delta_1 + \delta_2$, δ (фиг.2). Эта область содержит конечное (достаточно малое) число ячеек периодичности и напряженно-деформированное состояние внутри нее должно быть определено непосредственно из решения задачи теории упругости без применения асимптотических мето-

дов осреднения. Область 4 является частью неограниченной полосы $0 < x_2 < \delta$, $|x_1| < \infty$, внутри которой выделяются участки $0 < x_2 < \delta$, $|x_1| < a$ (область 1) и $0 < x_2 < \delta$, $|x_1| > a$ (область 3), где возможно использование асимптотических решений вида, изложенного в разд. 2 для области 1, и вида, изложенного в разд. 4 для области 3. При этом необходимо отметить, что функции $N_{nk\beta}^{(1)}(y)$ и $N_{nk\beta}^{(3)}(y)$, определяемые из решения погранслоевых задач (2.18) и (4.2), (4.3), являются решениями типа пограничного слоя и поэтому в области 2 ($x_2 > \delta$) можно полагать



Фиг. 2

$$N_{nk\beta}^{(1)}(y) = 0, N_{nk\beta}^{(3)}(y) = 0$$

Таким образом, величина δ находится в результате решения задач (2.18) и (4.2), (4.3) из условия

$$N_{nk\beta}^{(1)}(y_1, \delta) \approx 0, N_{nk\beta}^{(3)}(y_1, \delta) \approx 0$$

Выбор величин δ_1, δ_2 (фиг. 2) может быть произведен на основании следующих соображений. Возмущение напряженного состояния, обусловленное сменой граничных условий в окрестности точки $x_1 = a, x_2 = 0$ (вершины трещины), локализовано в области 4 и не распространяется за ее пределы. При этом характерный размер области возмущения можно оценить по известным асимптотикам для напряжений в окрестности трещины. Кроме того, значения $\delta, \delta_1, \delta_2$ удобно выбирать так, чтобы границы области 4 совпадали с границами ячеек периодичности композита (см. фиг. 2).

Располагая решениями задач (2.18) и (4.2), (4.3), можно задавать напряжения на трех сторонах прямоугольника 4, т. е. на участках $x_1 = a - \delta_1, x_1 = a + \delta_2, 0 < x_2 < \delta$ и $a - \delta_1 < x_1 < a + \delta_2, x_2 = \delta$. Так как граничные условия на участке $a - \delta_1 < x_1 < a + \delta_2, x_2 = 0$ известны (соотношения (5.1)), то решение плоской задачи теории упругости в области 4 может быть построено, например, при помощи численных методов.

При этом формулировка задачи будет следующей:

$$\frac{\partial \sigma_{\gamma\alpha}^{(e)}(x)}{\partial x_\alpha} = 0, \sigma_{\gamma\alpha}^{(e)}(x) = c_{\gamma\alpha\kappa\beta}(y) \frac{\partial u_\kappa^{(e)}(x)}{\partial x_\beta} \quad (\alpha, \beta, \gamma, \kappa = 1, 2)$$

$$\sigma_{12}^{(e)}(x_1, 0) = 0, a - \delta_1 < x_1 < a + \delta_2; \sigma_{22}^{(e)}(x_1, 0) = p_2(x_1), a - \delta_1 < x_1 < a$$

$$u_2^{(e)}(x_1, 0) = 0, a < x_1 < a + \delta_2$$

$$\sigma_{\gamma\alpha}^{(e)} \Big|_{x_1=a-\delta_1} = \left[c_{\gamma\alpha\kappa\beta}(y) + c_{\gamma\alpha n\theta}(y) \left(\frac{\partial N_{n\kappa\beta}}{\partial y_\theta} + \frac{\partial N_{n\kappa\beta}^{(1)}}{\partial y_\theta} \right) \right] \Big|_{y_1=0} \frac{\partial u_\kappa^{(0)}}{\partial x_\beta} \Big|_{x_1=a-\delta_1}$$

$$\sigma_{\gamma\alpha}^{(e)} \Big|_{x_1=a+\delta_2} = \left[c_{\gamma\alpha\kappa\beta}(y) + c_{\gamma\alpha n\theta}(y) \left(\frac{\partial N_{n\kappa\beta}}{\partial y_\theta} + \frac{\partial N_{n\kappa\beta}^{(3)}}{\partial y_\theta} \right) \right] \Big|_{y_1=0} \frac{\partial u_\kappa^{(0)}}{\partial x_\beta} \Big|_{x_1=a+\delta_2}$$

$$\sigma_{\gamma\alpha}^{(e)} \Big|_{x_2=\delta} = \left[c_{\gamma\alpha\kappa\beta}(y) + c_{\gamma\alpha n\theta} \frac{\partial N_{n\kappa\beta}}{\partial y_\theta} \right] \Big|_{y_2=0} \frac{\partial u_\kappa^{(0)}}{\partial x_\beta} \Big|_{x_2=\delta}$$

Отметим, что постоянные $h_{2k\beta}^{(3)}$ из условий, определяемых последним равенством (4.3), в данные соотношения не входят.

Функции $u_\kappa^{(0)}(x)$ ($\kappa = 1, 2$) — решения следующей осредненной задачи:

$$\langle C_{\gamma\alpha\kappa\beta} \rangle \partial^2 u_\kappa^{(0)}(x) / \partial x_\alpha \partial x_\beta = 0, x_2 > 0$$

$$\begin{aligned}
C_{12\alpha\beta}^* \partial u_{\alpha}^{(0)}(x) / \partial x_{\beta} \Big|_{x_2=0} &= 0, \quad |x_1| < \infty; \\
C_{22\alpha\beta}^* \partial u_{\alpha}^{(0)}(x) / \partial x_{\beta} \Big|_{x_2=0} &= p_2(x_1), \quad |x_1| < a \\
u_2^{(0)}(x) \Big|_{x_2=0} &= 0, \quad |x_1| > a
\end{aligned}$$

Коэффициенты, входящие в формулировку осредненной задачи, были определены выше (см. соотношения (2.15) и (2.20)).

Отметим, что возможность выделения локальной области 4 с известными граничными условиями на ее контуре позволяет провести достаточно строгий анализ напряженного состояния в этой области при любом положении кончика трещины в ячейке композита, и в частности для случая, когда вершина трещины находится на границе раздела двух разнородных компонентов.

Предложенный метод погранслойных решений может быть также использован в различных контактных задачах теории упругости композиционных материалов периодической структуры, например в задаче о штампе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
2. Победра Б. Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
3. Каламбаров А. Л., Кудряцев Б. А., Партон В. З. Асимптотический метод осреднения в механике композитов регулярной структуры // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНТИ, 1987. Т. 19. С. 78—147.
4. Партон В. З., Кудряцев Б. А. О разрушении слоистых композитов // Физ.-хим. механика материалов. 1986. № 1. С. 76—84.

Москва

Поступила в редакцию
16.III.1989