Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 2, 1990

УДК 539.375 : 534.1

И. В. Андронов

РАССЕЯНИЕ ИЗГИБНОЙ ВОЛНЫ НА КОНЕЧНОЙ ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ТРЕЩИНЕ В УПРУГОЙ ПЛАСТИНЕ

Исследуется поле смещений, рассеянное на прямолинейной тонкой трещине конечной длины в изгибно-колеблющейся пластине. Методами, аналогичными разработанным в [1], граничная задача сводится к интегральным уравнениям на отрезке. Далее по методу ортогональных многочленов эти интегральные уравнения заменяются бесконечными алгебраическими системами, решаемыми методом редукции. Эти системы позволяют также найти асимптотику рассеянного поля в случае короткой трещины. Построена асимптотика диаграммы направленности расходящейся от трещины цилиндрической волны и эффективного сечения рассеяния. Результаты проконтролированы при помощи оптической теоремы [2].

1. Постановка задачи и переход к безразмерным величинам. Задача рассеяния падающего поля $\xi^{(0)}(x, y)$ на трещине $\Lambda = \{|x| < a,\ y = 0\}$ в тонкой бесконечно протяженной пластине состоит в отыскании рассеянного поля $\xi^{(1)}(x, y)$, удовлетворяющего уравнению изгибных колебаний

$$\Delta^2\xi^{(1)} - k_0{}^4\xi^{(1)} = 0, \quad (x, y) \notin \Lambda \tag{1.1}$$

такого, чтобы суммарное поле $\xi = \xi^{(0)} + \xi^{(1)}$ удовлетворяло граничным условиям

$$\begin{gathered} S_2{}^{\pm}\xi \equiv \lim_{y\to\pm 0}(\xi_{yy} + \sigma\xi_{xx}) = 0 \\ S_3{}^{\pm}\xi \equiv \lim_{y\to\pm 0}(\xi_{yyy} + (2-\sigma)\xi_{xxy}) = 0, \quad |x| < a \end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь k_0 — волновое число изгибных колебаний пластины, σ — коэффициент Пуассона.

Условия (1.2), означающие отсутствие изгибающего момента и перерезывающей силы на кромках трещины, удобно переписать в виде

$$(S_n{}^+ - S_n{}^-)\xi^{(1)} = 0; \quad S_n{}^+\xi = 0, \quad |x| < a \tag{1.3}$$

Индекс n здесь и ниже принимает значения 2, 3. Первое условие (1.3) выполняется на всей оси и не содержит падающего поля ввиду его непрерывности.

Рассеянное поле должно удовлетворять условию излучения. Для выбора физически осмысленного решения необходимо также задать следующее поведение $\xi^{(1)}$ в окрестности концов трещины:

$$\begin{gathered} \xi^{(1)} = \xi_0{}^{\pm} + \xi_1{}^{\pm}(\theta)r + \xi^{\pm}_{3/2}(\theta)r^{3/2} + \ldots \\ \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x \pm a}\right), \quad r = ((x \pm a)^2 + y^2)^{1/2} \to 0 \end{gathered} \tag{1.4}$$

Отсутствие члена вида $\xi_{1/2}{}^{\pm}(\theta)r^{1/2}$ следует из требования конечности энергии, запасенной любой ограниченной областью пластины, а наличие члена $\xi_{3/2}{}^{\pm}(\theta)r^{3/2}$ приводит к указанной в [1] особенности $r^{-3/2}$ для перерезывающей силы. Можно показать, что, несмотря на такую сильную особенность силы, суммарный поток энергии через окружность малого радиуса, охватывающую конец трещины, за счет специальной зависимости решения от угла в пределе обращается в нуль. Это позволяет доказать теорему единственности решения граничной задачи [3].

Введем безразмерные координаты x', y' и волновое число k_0'

$$x' = x/a, \quad y' = y/a, \quad k_0' = k_0'a \tag{1.5}$$

Поскольку дальнейшее изложение будет проводиться в безразмерных величинах, штрихи ниже опустим. К размерным величинам вернемся только в окончательных формулах, о чем будет указано.

2. Сведение задачи к интегральным уравнениям первого рода. Рассеянное поле $\xi^{(1)}$ будем искать в виде разложения по плоским волнам с неизвестными функциями $p_j(\tau)$ [1]

$$\xi^{(1)} = \sum_{j=0}^{3} s_j \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ik_0x\tau)\, p_j(\tau)\,(\tau_-^{j-1} \exp(ik_0|y|\tau_-) -$$

$$-(i\tau_+)^{j-1}\exp(-k_0|y|\tau_+))\,d\tau; \quad s_0 = s_2 = 1, \quad s_1 = s_3 = \operatorname{sign}(y) \tag{2.1}$$

$\mu_\pm = (1 \pm \mu^2)^{1/2}$, символ μ заменяется различными переменными x, t, τ. Контур интегрирования проходит вдоль вещественной оси, обходя полюса подынтегрального выражения в точках $\tau = -1$ и $\tau = 1$ сверху и снизу соответственно. Число слагаемых в (2.1) определяется порядком дифференциального оператора (1.1). Слагаемые с номерами 0, 2 образуют четкую по y часть поля, а с номерами 1, 3 — нечетную. Поведение функций p_j на бесконечности определяется асимптотиками (1.4)

$$p_j(\tau) = O(\tau^{1/2-j}) \tag{2.2}$$

Таким образом, интегралы сходятся при всех значениях x, y.

Представление (2.1) автоматически удовлетворяет уравнению (1.1) вне оси $y = 0$, поскольку

$$(\Delta^2 - k_0^4)\,\xi^{(1)} = 4\sum_{j=0}^{3} k_0^{3-j} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ik_0x\tau)\, p_j(\tau)\, d\tau \left(-i\frac{d}{dy}\right)^j \delta(y)$$

Для того чтобы уравнение (1.1) выполнялось всюду вне трещины, остается потребовать обращения в нуль интегралов

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ik_0x\tau)\, p_j(\tau)\, d\tau = 0, \; |x| < 1, \quad 0 \leqslant j \leqslant 3 \tag{2.3}$$

Теперь обратимся к граничным условиям (1.3). Подставляя представление (2.1) и проводя формальное дифференцирование под знаком интеграла (расходящиеся интегралы Фурье будем понимать в смысле обобщенных функций), из первого условия (1.3) находим

$$p_0(\tau) = \sigma\tau^2 p_2(\tau), \quad p_1(\tau) = (2-\sigma)\,\tau^2 p_3(\tau) \tag{2.4}$$

С учетом (2.4) уравнения, возникающие из второго условия (1.3) запишем в виде

$$k_0^{n-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ik_0x\tau)\, G_n(\tau)\, p_n(\tau)\, d\tau = i^{n-1}k_0^{-2} \mathrm{S}_n \xi^{(0)}(x), \quad |x| < 1 \tag{2.5}$$

$$G_2(\tau) = i\,[(1-\sigma)\,\tau^2 - 1]^2\, \tau_-^{-1} - [(1-\sigma)\,\tau^2 + 1]^2\, \tau_+^{-1}$$

$$G_3(\tau) = -i\,[(1-\sigma)\,\tau^2 + 1]^2\, \tau_- - [(1-\sigma)\,\tau^2 - 1]^2\, \tau_+$$

Символ $\pm$ у операторов S_n опущен ввиду непрерывности падающего поля $\xi^{(0)}$.

---

[1] *Коузов Д. П.* Гранично-контактные задачи акустики система пластина-жидкость. Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук. М.: АКИН АН СССР, 1986. 33 с.

Таким образом, задача свелась к решению интегральных уравнений (2.3), (2.5) для p_2 и p_3. Уравнения такого типа часто возникают в задачах дифракции и для больших значений k_0 решаются методом Винера — Хопфа, что позволяет представить поле в виде суперпозиции волн, многократно переотраженных концами неоднородности [4]. Будем интересоваться не слишком большими k_0 и поступим иным образом [1]. Для того чтобы удовлетворить однородным уравнениям вне трещины, представим функции p_i преобразованиями Фурье на отрезке

$$p_n(\tau)=\int_{-1}^{1}\varphi_n(t)\exp(-ik_0t\tau)\,dt \tag{2.6}$$

Подставляя эти представления в (2.5) и вычисляя интегралы по τ, получим интегральные уравнения первого рода

$$\mathbf{K}_n\varphi_n\equiv\int_{-1}^{1}K_n(x-t)\,\varphi_n(t)\,dt=i^{n-1}k_0^{-2}\mathrm{S}_n\xi^{(0)}(x) \tag{2.7}$$

$$K_n(\rho)=k_0^{n-2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(ik_0\rho\tau)\,G_n(\tau)\,d\tau$$

Явный вид ядер K_n, являющихся некоторой комбинацией функций Ганкеля и Макдональда, не потребуется.

3. Исследование ядер, существование и единственность решений. Выделим старшую особенность ядер K_2 и K_3. Для этого укажем характер роста их преобразований Фурье при $\tau\to\infty$

$$G_2(\tau)=-\varkappa\,|\,\tau\,|+G_2'(\tau),\quad G_2'(\tau)=O(\tau^{-3})$$

$$G_3(\tau)=\varkappa\,|\,\tau\,|^3+G_3'(\tau),\quad G_3'(\tau)=O(\tau^{-1});\ \varkappa=(1-\sigma)/(3+\sigma)$$

Отсюда находим

$$K_2(\rho)=-2\varkappa k_0^{-2}(d^2/d\rho^2)\ln|\,\rho\,|+K_2'(\rho)$$

$$K_3(\rho)=-2\varkappa\,k_0^{-3}(d^4/d\rho^4)\ln|\,\rho\,|+K_3'(\rho)$$

Поправки K_n' являются функциями, интегрируемыми на отрезке. Таким образом, в следующей записи уравнений (2.7) интегралы понимаются в обычном смысле:

$$-2\varkappa\frac{d^2}{dx^2}\int\ln|x-t|\,\varphi_2(t)\,dt+k_0^2\int K_2'(x-t)\,\varphi_2(t)\,dt=i\mathrm{S}_2\xi^{(0)}(x)$$

$$-2\varkappa\frac{d^4}{dx^4}\int\ln|x-t|\,\varphi_3(t)\,dt+k_0^3\int K_3'(x-t)\,\varphi_3(t)\,dt=-k_0\mathrm{S}_3\xi^{(0)}(x) \tag{3.1}$$

Здесь и далее, если не оговорено противное, интегрирование ведется в пределах от —1 до 1.

Условия (2.2) диктуют следующее поведение функций φ_n:

$$\varphi_2(t)=t_-\varphi_2'(t),\quad \varphi_3(t)=t_-^3\varphi_3'(t) \tag{3.2}$$

Исследуем вопрос существования и единственности решений интегральных уравнений (3.1) в классах функций с заданным формулами (3.2) поведением. Действуя оператором интегрирования на уравнения (3.1) два и четыре раза соответственно, приведем их к виду интегральных уравнений с логарифмической особенностью в ядрах L_n

$$L_n\varphi_n\equiv\int\{\ln|\,x-t\,|+L_n'(x-t)\}\,\varphi_n(t)\,dt=h_n(x) \tag{3.3}$$

Правые части h_2 и h_3 содержат две и четыре произвольные постоянные (постоянные интегрирования) соответственно. Как известно [5], решение уравнения (3.3) существует и единственно для любой функции h_n с производной из класса Гельдера и представимо в виде

$$\varphi_n(t) = \Phi_n(t)/t_- \tag{3.4}$$

где $\Phi_n(t)$ — функции из класса Гельдера.

Используя представление ядер L_n через некоторые аналитические функции $a_n(\rho)$, $b_n(\rho)$

$$L_n(\rho) = \ln|\rho| + a_n(\rho)\ln|\rho| + b_n(\rho), \quad a_n(0) = 0 \tag{3.5}$$

можно показать, что для правой части из $C^\infty[-1, 1]$ функции $\Phi_n \in C^\infty \times [-1, 1]$ (результат сходен с приведенным в [6], где рассматривались интегральные уравнения с более простым ядром (3.5) при $a_n(\rho) \equiv 0$). Предварительно докажем вспомогательную лемму.

Лемма 1. Для любого h из $C^{M+2}[-1, 1]$ решение интегрального уравнения

$$\int \ln|x-t| \sum_{l=0}^{N} q_l (x-t)^l \varphi(t)\,dt = h(x)$$

для любого конечного N представимо в виде

$$\varphi(t) = \Phi(t)/t_- \tag{3.6}$$

с функцией $\Phi(t)$ из класса $C^M[-1, 1]$.

Доказательство. Воспользовавшись формулой дифференцирования выражений вида $\rho^l \ln|\rho|$, перепишем ядро следующим образом:

$$\sum_{l=0}^{N} q_l' \frac{d^{N-l}}{dx^{N-l}}(\ln|x-t|(x-t)^N) + R(x-t)$$

где R — некоторый полином. Меняя порядок дифференцирования и интегрирования относительно $\psi = \mathrm{L}^N\varphi \equiv \int \ln|x-t|(x-t)^N \varphi(t)\,dt$, получим дифференциальное уравнение

$$\sum_{l=0}^{N} q_l' \frac{d^{N-l}}{dx^{N-l}}\psi = h - \int R(x-t)\varphi(t)\,dt$$

Поскольку правая часть лежит в $C^{M+2}[-1, 1]$, решение дифференциального уравнения является функцией из $C^{N+M+2}[-1, 1]$ и $d^N\psi/dx^N \in C^{M+2}[-1, 1]$. Выражение $d^N \mathrm{L}^N \varphi/dx^N$ будем теперь понимать как результат действия на функцию φ оператора $\mathrm{L}^0 \equiv d^N \mathrm{L}^N/dx^N$ с ядром $\ln|x-t| + \mathrm{const}$. Таким образом, функция φ — решение интегрального уравнения $\mathrm{L}^0\varphi = d^N\psi/dx^N$ с правой частью из $C^{M+2}[-1, 1]$. Согласно [6] (теорема 23.2), решение такого уравнения представимо в виде (3.6) с функцией Φ из $C^M[-1, 1]$.

Теперь докажем свойство гладкости Φ_n для уравнения (3.3).

Теорема 1. Решение интегрального уравнения (3.3) представимо в виде (3.4) с функцией $\Phi_n \in C^\infty[-1, 1]$ для любой правой части из $C^\infty[-1, 1]$.

Доказательство. Предположим обратное: пусть N-я производная функции Φ_n разрывна. Тогда разложим a_n в ряд Тейлора и удержим в левой части $N + 1$ член, а остаток перенесем в правую часть вместе со сверткой φ_n с b_n. Выполняя дифференцирование под знаком интеграла, можно показать, что правая часть — функция из $C^{N+2}[-1, 1]$. Но, согласно лемме 1, $\Phi_n \in C^N[-1, 1]$. Таким образом, пришли к противоречию, что ввиду единственности решения и доказывает теорему.

С учетом доказанных свойств гладкости Φ_n условия (3.2) означают, что должны быть выполнены равенства

$$\Phi_2(\pm 1) = 0, \quad \Phi_3(\pm 1) = 0, \quad d\Phi_3(\pm 1)/dt = 0 \tag{3.7}$$

Для удовлетворения этим требованиям используем произвол в h_n:

$$h_2 = i(d/dx)^{-2}S_2\xi^{(0)} + c_0 + c_1x, \quad h_3 = -(d/dx)^{-4}S_3\xi^{(0)} + d_0 + d_1x + d_2x^2 + d_3x^3$$

Покажем, что уравнения (3.7) относительно постоянных c_l и d_l разрешимы единственным образом.

Докажем сначала такую разрешимость для первого интегрального уравнения ($n = 2$). Введем в рассмотрение функции ψ_0 и ψ_1, являющиеся решениями уравнений

$$\int L_2(x-t)\,\psi_l(t)\,t_-^{-1}dt = x^l, \quad l = 0, 1 \tag{3.8}$$

Заметим, что символ оператора $\mathbf{L}_2$ имеет положительную мнимую часть, а ядро L_2 — четная функция. Для ψ_l справедлива

Лемма 2. Для интегральных уравнений (3.8) с ядром вида (3.5) и знакоопределенной проекцией символа на некоторое направление в комплексной плоскости значения функций ψ_l на концах промежутка интегрирования отличны от нуля.

Доказательство. С учетом свойств четности ψ_0 и нечетности ψ_1 достаточно доказать отличие их значений от нуля на одном конце.

Предположим обратное. Тогда, продифференцировав уравнение (3.8) по x и перебросив производную с ядра на $\psi_l t_-^{-1}$ (внеинтегральные члены отсутствуют ввиду предположения), имеем

$$\int L_2(x-t)\,(d[\psi_l(t)\,t_-^{-1}]/dt)\,dt = l, \; l = 0, 1$$

Ввиду единственности решения получаем, что для $l = 0$ выражение в квадратных скобках не зависит от t, что на основании структуры решения, установленной в теореме 1, приводит к тождеству $\psi_0 \equiv 0$, противоречащему (3.8). Для $l = 1$ получаем

$$\psi_1(t)\,t_-^{-1} = \int_0^t \psi_0(t')\,t_-'^{-1}\,dt'$$

Домножим интегральные уравнения для ψ_0 на $\overline{\psi}_0(x)\,x_-^{-1}$ (черта — символ комплексного сопряжения) и проинтегрируем по отрезку. После перехода к преобразованию Фурье H ядра имеем

$$\int_0^\infty H(\tau)\,|u(\tau)|^2 d\tau = \frac{1}{2}\int \psi_0(t)\,t_-^{-1}dt = \lim_{t\to 1}\psi_1(t)\,t_-^{-1} = 0$$

$$u(\tau) = \int \psi_0(x)\,x_-^{-1}e^{i\tau x}\,dx$$

В виду знакоопределенности проекции символа $H(\tau)$ с необходимостью приходим к тождеству $u(\tau) \equiv 0$, т. е. $\psi_0(x) \equiv 0$, что противоречит (3.8).

На основании леммы 2 и свойств четности и нечетности ψ_l можно убедиться, что определитель матрицы системы линейных алгебраических уравнений для постоянных c_0, c_1 отличен от нуля. Таким образом, справедлива

Теорема 2. Интегральное уравнение (3.1) относительно φ_2 разрешимо единственным образом в классе функций вида (3.2) для юбой гладкой правой части.

Обратимся к интегральному уравнению (3.1) относительно φ_3. Определение постоянных d_l будем проводить в два этапа. Сначала будем считать d_2 и d_3 известными, а d_0 и d_1 найдем из системы $\Phi_3(\pm 1) = 0$, аналогичной рассмотренной выше, и, следовательно, разрешимой единственным образом. Тогда решение второго уравнения (3.1) представимо в виде $\varphi_3(t) = \Phi_3'(t)\, t_-$ с гладкой функцией Φ_3'. Последняя пара условий (3.7) в терминах Φ_3' означает $\Phi_3'(\pm 1) = 0$. Разрешимость этой системы относительно d_2 и d_3 доказывается аналогично разрешимости первой пары соотношений (3.7) и базируется на установленных в теореме 2 свойствах разрешимости первого уравнения (3.1) в классе (3.2), аналогичных свойствам разрешимости (3.3) в классе (3.4). Таким образом, приходим к следующему утверждению.

Теорема 3. Решение интегрального уравнения (3.1) относительно φ_3 представимо в виде (3.3) с $\varphi_3' \in C^\infty[-1, 1]$ для любой правой части из $C^\infty \times \times [-1, 1]$, и решение в указанном классе единственно.

4. Схема численного решения интегральных уравнений. Для численного решения интегральных уравнений (3.1) воспользуемся методом ортогональных многочленов. Этот метод путем выбора подходящих систем ортогональных многочленов [7] позволяет учесть характер поведения решений у концов интервала интегрирования. Будем искать решения φ_n в виде следующих разложений с неизвестными коэффициентами α_l, β_l:

$$\varphi_2(t) = t_- \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l U_l(t), \quad \varphi_3(t) = t_-^3 \sum_{l=0}^{\infty} \beta_l C_l^{(2)}(t) \tag{4.1}$$

где U_l — полиномы Чебышева второго рода, $C_l^{(2)}$ — полиномы Гегенбауэра. Выбор этих полиномов определяется тем, что они являются собственными функциями главных частей интегральных операторов

$$\frac{d^2}{dx^2} \int \ln|x - t|\, t_- U_l(t)\, dt = \pi (l + 1)\, U_l(x)$$

$$\frac{d^4}{dx^4} \int \ln|x - t|\, t_-^3 C_l^{(2)}(t)\, dt = \pi (l + 1)(l + 2)(l + 3)\, C_l^{(2)}(x)$$

После подстановки разложений (4.1) в соответствующие интегральные уравнения приравняем коэффициенты при полиномах одинаковых номеров и получим бесконечные системы линейных алгебраических уравнений для определения α_l, β_l

$$-\varkappa (l + 1) \alpha_l + \pi^{-2} k_0^2 \sum_{m=0}^{\infty} A_{lm} \alpha_m = \pi^{-2} f_l$$

$$\frac{\varkappa}{4} (l + 1)^2 (l + 2)(l + 3)^2 \beta_l + \pi^{-2} k_0^3 \sum_{m=0}^{\infty} B_{lm} \beta_m = \pi^{-2} g_l \tag{4.2}$$

где f_l и g_l — коэффициенты разложения правых частей

$$f_l = i \int S_2 \xi^{(0)}(x)\, x_- U_l(x)\, dx, \quad g_l = -k_0 \int S_3 \xi^{(0)}(x)\, x_-^3 C_l^{(2)}(x)\, dx$$

Элементы A_{lm} и B_{lm} матриц систем выражаются двойными интегралами

$$A_{lm} = \iint K_2'(x - t)\, t_- U_l(t)\, x_- U_m(x)\, dt\, dx$$

$$B_{lm} = \iint K_3'(x - t)\, t_-^3 C_l^{(2)}(t)\, x_-^3 C_m^{(2)}(x)\, dt\, dx \tag{4.3}$$

Отметим, что элементы A_{lm}, B_{lm} с индексами разной четности обращаются в нуль, что соответствует разбиению поля $\xi^{(1)}$ на четную и нечетную по x части. Таким образом, каждая из систем (4.2) распадается на две независимые системы для коэффициентов α_l и β_l с четными и нечетными номерами.

Для того чтобы избавиться от двойных интегралов в представлениях (4.3), перейдем к преобразованиям Фурье ядер K_n'. Интегралы по x и t

после этого легко выразить через функции Бесселя. В результате элементы A_{lm} и B_{lm} запишутся в виде интегралов по полуоси от функций со степенным убыванием порядка $O(\tau^{-6})$ на бесконечности

$$A_{lm} = -2\pi^2 k_0^{-2} (l+1)(m+1) i^{l+m} \int_0^\infty G_2'(\tau) J_{l+1}(k_0\tau) J_{m+1}(-k_0\tau) \tau^{-2} d\tau$$

$$B_{lm} = {}^1/_2 \pi^2 k_0^{-3} (l+1)(l+2)(l+3)(m+1)(m+2)(m+3) i^{l+m} \int_0^\infty G_3'(\tau) J_{l+2}(k_0\tau) J_{m+2}(-k_0\tau) \tau^{-4} d\tau \qquad (4.4)$$

Ускорить сходимость интегралов (4.4) можно путем выделения из ядер K_2', K_3' сингулярных членов вида $(x-t)^2 \ln|x-t|$ и $\ln|x-t|$ соответственно. Интегралы, содержащие выделенные члены, вычисляются аналитически и порождают пятидиагональную матрицу. После выделения сингулярных членов убывание подынтегральных выражений в представлении элементов матриц систем (4.2) ускорится до $O(\tau^{-10})$. Выделяя следующие сингулярные члены, можно добиться степенного убывания с любым показателем. Первый шаг описанной процедуры используется ниже для представления элементов B_{lm} и позволяет получить более точную оценку скорости их убывания по индексам.

Системы (4.2) будем решать методом редукции.

Для оправдания этого метода оценим поведение элементов A_{lm} и B_{lm} по индексам. Рассмотрим представление (4.4) для A_{lm}. Точкой $\tau = T$ разобьем полуось на две части. В интеграле от нуля до T воспользуемся оценкой $|J_m(z)| \leqslant (z/2)^m/m!$ для функций Бесселя и интегрируемостью ядра $G_2'(\tau)$. Для того чтобы в нуле после вынесения функций Бесселя из-под знака интеграла не возникало особенностей, предварительно воспользуемся рекуррентными соотношениями

$$J_m(z) + J_{m+2}(z) = 2(m+1) J_{m+1}(z)/z$$

В результате имеем оценку

$$(l+1)(m+1)\left|\int_0^T G_2'(\tau) J_{l+1}(k_0\tau) J_{m+1}(k_0\tau) \tau^{-2} d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant C_1 k_0^2 \frac{(k_0T/2)^{l+m}}{l!\, m!}\left(1+\frac{(k_0T/2)^2}{(l+1)(l+2)}\right)\left(1+\frac{(k_0T/2)^2}{(m+1)(m+2)}\right)$$

В интеграле от T до бесконечности функции Бесселя оценим единицей и учтем убывание выражения $|G_2'(\tau)\tau^{-2}| \leqslant C_2\tau^{-5}$

$$(l+1)(m+1)\left|\int_T^\infty G_2'(\tau) J_{l+1}(k_0\tau) J_{m+1}(k_0\tau)\tau^{-2} d\tau\right| \leqslant C_2 (l+1)(m+1) T^{-4}$$

Значение T выберем из условия минимальности суммарной оценки, откуда после некоторых огрублений имеем

$$|A_{lm}| \leqslant C_3 (k_0/2)^4 (l+1)(m+1)((l+1)!\,(m+1)!)^{-1/(l+m)}$$

Приведенная оценка на основании формулы Стирлинга для факториала означает, что вблизи диагонали элементы A_{lm} убывают со скоростью m^{-2}, а при $l \ll m$ — со скоростью m^{-3}.

Аналогичная оценка, проведенная непосредственно для интегрального представления (4.4) для B_{lm}, не удовлетворительна. Поэтому сначала выделим из ядра K_3' сингулярный член вида $C_4 \ln|x-t|$, который разложим по полиномам Гегенбауэра

$$B_{lm} = B'_{lm} - {}^1/_8 k_0^{-3}\pi^2 C_4 (\delta_l^m (\chi_l (l+3)^2 + 4(l+2) + (l+1)^2/(l+4)) - $$
$$- 4\delta_l^{m+2}(l+1) + \delta_l^{m+4}(l+3)(l-3))$$

$$\chi_l = \begin{cases} \ln 2/2, & l=0 \\ 1/l, & l>0 \end{cases}$$

Убывание подынтегральных выражений в представлении B'_{lm}, как было отмечено выше, ускорится до $O(\tau^{-10})$, что позволяет получить следующую оценку поведения поправок по индексам:

$$|B'_{lm}| \leqslant C_5 (k_0/2)^5 l^3 m^3 (l!m!)^{-8/(l+m)}$$

т. е. на диагонали элементы B_{lm} имеют слабый рост порядка m, а вдали от диагонали убывают как m^{-5}.

Бесконечная система квазивполне регулярна [8], если для каждой строки ее матрицы суммы абсолютных величин внедиагональных элементов после нормировки на диагональные элементы конечны, а начиная с некоторого номера строки N меньше $1 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. С учетом полученных оценок поведения элементов A_{lm} и B_{lm} по индексам можно установить, что выполняется

Теорема 4. Бесконечные системы (4.2) квазивполне регулярны при любом конечном k_0.

Как известно, для квазивполне регулярных систем метод редукции сходится к решению бесконечной системы, если конечная система N первых уравнений разрешима. При больших значениях k_0 число N становится велико и матрицы систем (4.2), по-видимому, становятся плохо обусловленными.

5. Исследование решения. Диаграмма направленности. После того, как системы (4.2) решены, рассеянное поле строится по формулам (2.1), (2.4), (2.6) и (4.1). Упростим получающееся представление для $\xi^{(1)}$. Для этого с учетом (2.4) перепишем (2.1) в виде суммы четной и нечетной по y составляющих поля смещений

$$\xi^{(1)} = -\int_{-\infty}^{\infty} \exp(ik_0 x\tau)\, p_2(\tau) \left(\frac{\zeta_-}{\tau_-} \exp(ik_0 |y| \tau_-) - \frac{\zeta_+}{\tau_+} \exp(-k_0 |y| \tau_+)\right) +$$
$$+ \operatorname{sign}(y) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ik_0 x\tau)\, p_3(\tau) (\zeta_+ \exp(ik_0 |y| \tau_-) - \zeta_- \exp(-k_0 |y| \tau_+))\, d\tau \tag{5.1}$$

$$\xi_\pm = ((1-\sigma)\tau^2 \pm 1)$$

Для функций $p_{2,3}$ после подстановки (4.1) в (2.6) и вычисления интегралов получим разложения по функциям Бесселя

$$p_2(\tau) = \pi \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l (-i)^l (l+1) \frac{J_{l+1}(k\tau_0)}{k_0\tau}.$$

$$p_3(\tau) = \frac{\pi}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \beta_l (-i)^l (l+1)(l+2)(l+3) \frac{J_{l+2}(k_0\tau)}{(k_0\tau)^2} \tag{5.2}$$

На основании доказанной в п. 3 гладкости решений интегральных уравнений можно утверждать, что в разложениях (5.2) коэффициенты α_l и β_l убывают с номером сверхстепенным образом [9]. Поэтому пределы суммирования можно заменить некоторым числом N с внесением сколь угодно малой погрешности. Тогда поле выражается однократным интегралом суммы некоторого конечного числа слагаемых.

Значительный интерес представляет асимптотика рассеянного поля на бесконечности. Пусть падающее поле — плоская волна $\xi^{(0)} = \exp(ik_0(x\cos\vartheta_0 + y\sin\vartheta_0))$. Введем полярные координаты $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$ и вычислим интегралы в (5.1) по методу стационарной фазы. Вторые слагаемые в каждом интеграле дают экспоненциально малый вклад при $k_0 r \to \infty$, а первые формируют расходящуюся цилиндрическую волну

$$\xi^{(1)} \sim \left(\frac{2\pi}{k_0 r}\right)^{1/2} \exp\left(ik_0 r - i\frac{\pi}{4}\right) \Psi(\vartheta, \vartheta_0)$$

Диаграмма направленности Ψ выражается через значения p_2 и p_3 в точке $\tau = \cos\vartheta$

$$\Psi(\vartheta, \vartheta_0) = -p_2(\cos\vartheta)((1-\sigma)\cos^2\vartheta - 1) + \\ + p_3(\cos\vartheta)((1-\sigma)\cos^2\vartheta + 1)\sin\vartheta \tag{5.3}$$

Формула (5.3) является точной. Она справедлива для произвольного падающего поля, характеристики которого содержатся в функциях p_2 и p_3, определяемых, согласно (5.2), по решениям систем (4.2).

Исследуем асимптотику Ψ при $k_0 \to 0$, т. е. изучим рассеяние на короткой трещине. Функции Бесселя в (5.2) заменим старшими членами разложений в ряды Тейлора

$$p_2(\tau) \approx \frac{\pi}{8}\sum_{l=0}^{\infty}\alpha_l(-i)^l(l+1)(k_0\tau)^l$$

$$p_3(\tau) \approx \frac{\pi}{8}\sum_{l=0}^{\infty}\beta_l(-i)^l(l+1)(l+2)(l+3)(k_0\tau)^l$$

Для того чтобы определить порядки коэффициентов α_l и β_l по k_0, исследуем асимптотику матриц систем (4.2). Для коэффициентов B_{lm} получим следующую оценку: $B_{lm} = O(k_0)$. Для A_{lm} потребуется более точная асимптотика, которую можно получить на основании исследования разложения ядра K_2' в окрестности точки $t = x$:

$$A_{00} = \frac{i\pi^3}{32}(3\sigma^2 + 2\sigma + 3) + O(k_2^2), \quad A_{lm} = O(k_0^2)$$

Для случая падения плоской волны коэффициенты f_l и g_l вычисляются явно и имеют асимптотики

$$f_l = -i^{l+1}k_0^2\pi\theta_0(\sigma)(l+1)J_{l+1}(k_0\cos\vartheta_0)/(k_0\cos\vartheta_0) \sim \\ \sim -{}^1/_2 i^{l+1}k_0^2\pi\theta_0(\sigma)(l+1)(k_0\cos\vartheta_0)^l$$

$$g_l = {}^1/_2 i^{l+1}k_0^4\pi\sin\vartheta_0\theta_0(2-\sigma)(l+1)(l+2)(l+3)J_{l+2}(k_0\cos\vartheta_0)/ \\ /(k_0\cos\vartheta_0)^2 \sim {}^1/_8 i^{l+1}k_0^4\pi\sin\vartheta_0\theta_0(2-\sigma)(l+1)(l+2)(l+3)\cdot \\ \cdot(k_0\cos\vartheta_0/2)^l$$

$$\theta_0(\sigma) = (\sin^2\vartheta_0 + \sigma\cos^2\vartheta_0)$$

Решая системы (4.2) для старших членов разложения φ_2 и φ_3, получим следующую асимптотику диаграммы направленности:

$$\Psi(\vartheta, \vartheta_0) = \nu\varkappa^{-1}\theta(\sigma)\theta_0(\sigma)\,(i - {}^1/_8\nu\pi\varkappa^{-1}(3\sigma^2 + 2\sigma + 3) + \\ + i\nu\cos\vartheta\cos\vartheta_0 + O(\nu^2)) + 2\nu^2\varkappa^{-1}\theta(2-\sigma)\theta_0(2 - \\ - \sigma)\sin\vartheta\sin\vartheta_0(i + O(\nu)) \tag{5.4}$$

$$\nu = (k_0a/2)^2, \quad \theta(\sigma) = (\sin^2\vartheta + \sigma\cos^2\vartheta)$$

(в формуле (5.4) вернулись к размерным величинам).

Как известно, эффективное сечение рассеяния определяется как отношение энергии, рассеянной при дифракции на неоднородности, к энергии, приходящейся на единицу длины фронта падающей волны, и выражается через диаграмму направленности двумя способами [2]

$$\Sigma = \frac{2\pi}{k_0}\int_{-\pi}^{\pi}|\Psi(\vartheta, \vartheta_0)|^2 d\vartheta, \quad \Sigma = -\frac{4\pi}{k_0}\operatorname{Re}(\Psi(\vartheta_0, \vartheta_0)) \tag{5.5}$$

Проверим указанное тождество, носящее название оптической теоремы. Старший член разложения Ψ — чисто мнимый и, следовательно, не дает вклада во второе равенство (5.5). Таким образом, надо сравнивать вклад этого члена в первое равенство (5.5) с вкладом вещественного слагаемо в следующем члене разложения диаграммы направленности. Проводя соответствующие вычисления, убедимся, что в старшем члене оптическая теорема выполняется, и для поперечника рассеяния справедлива асимптотика

$$\Sigma = k_0^3 a^4 \frac{\pi}{32} \frac{3\sigma^2 + 2\sigma + 3}{(1-\sigma)^2 (3+\sigma)^2} (\sigma \cos^2 \vartheta_0 + \sin^2 \vartheta_0)^2 + O(k_0^5 a^5)$$

Автор благодарит Б. П. Белинского за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 344 с.
2. *Белинский Б. П.* Оптическая теорема для рассеяния волн в упругой пластине // Зап. науч. сем. ЛОМИ. Т. 104. Математические вопросы теории распространения волн. 1981. Вып. 11. С. 20—23.
3. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Гостехиздат, 1953. 679 с.
4. *Белинский Б. П.* Интегральные уравнения стационарных задач дифракции коротких волн на препятствиях типа отрезка // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1973. Т. 13. № 2. С. 373—384.
5. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
6. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
7. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами // Под ред. Абрамовица М. и Стиган И. М.: Наука, 1979. 832 с.
8. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 696 с.
9. *Натансон И. П.* Конструктивная теории функция. М.; Л.: Гостехтеоретиздат. 1949. 686 с.

Ленинград

Поступила в редакцию 22.III.1989