

УДК 539.3 : 534.1

© 1990 г.

М. А. Сумбатян

## ПЛОСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОГО СЛОЯ ПРИ ВЫСОКИХ ЧАСТОТАХ КОЛЕБАНИЯ

Рассматривается задача о вибрации штампа на поверхности упругой полосы, расположенной на жестком основании. Трение в области контакта, а также между полосой и основанием отсутствует. Отмечается, что на высоких частотах применение известных ранее методов приводит к необходимости решения линейных алгебраических систем очень высокого порядка. В данной работе предлагается метод, позволяющий выписать коротковолновую асимптотику решения в явном виде, удобном для качественного и количественного анализов.

1. Будем считать, что зависимость от времени всех функций, входящих в решение задачи, имеет вид  $f(x, t) = \operatorname{Re} [f(x) e^{-i\omega t}]$  ( $\omega$  — круговая частота колебания). Тогда исследуемая задача может быть сведена к интегральному уравнению относительно неизвестного контактного напряжения  $p(x)$ , отнесенного к  $\mu W/h$  [1]

$$\int_{-a}^a p(\xi) K(x - \xi) d\xi = 1, \quad |x| < a \quad (1.1)$$

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} L(u) e^{-i\kappa x u} du, \quad L(u) = L_1(u) - L_2(u)$$

$$L_1(u) = \sigma_1 / \Delta(u), \quad L_2(u) = \sigma_1 P_1(u) / \Delta(u)$$

$$P_1(u) = e^{-2\kappa\sigma_1} + e^{-2\kappa\sigma_2} - e^{-2\kappa(\sigma_1 + \sigma_2)}$$

$$\Delta(u) = 4u^2 \sigma_1 \sigma_2 G_1(u) F_2(u) - (2u^2 - 1)^2 G_2(u) F_1(u)$$

$$G_k(u) = 1 - e^{-2\kappa\sigma_k}, \quad F_k(u) = 1 + e^{-2\kappa\sigma_k}, \quad k = 1, 2$$

$$\sigma_1 = \sqrt{u^2 - \beta^2}, \quad \sigma_2 = \sqrt{u^2 - 1}, \quad \beta^2 = \frac{1 - 2\nu}{2 - 2\nu} = \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2,$$

$$\kappa^2 = \frac{\rho\omega^2 h^2}{\mu}, \quad a = \frac{b}{h}$$

Здесь  $h$  — толщина слоя,  $b$  — полуширина штампа,  $\mu$  и  $\nu$  — модуль сдвига и коэффициент Пуассона,  $\rho$  — плотность. Для определенности основание штампа предполагается плоским, при этом  $W$  — амплитуда его колебаний.

Уравнение (1.1) исследовалось ранее [1, 2]. Оказывается, что при построении его решения существен учет нулей и полюсов символа ядра  $L(u)$ , лежащих на вещественной оси. В подходах [1, 2] задача сводится к линейной алгебраической системе, причем ее порядок равен числу положительных нулей символа  $\alpha_k$  и  $\beta_k$

$$\alpha_k = \sqrt{1 - (\pi k / \kappa)^2} \quad (k = 1, \dots, n_\alpha), \quad \beta_k = \sqrt{\beta^2 - (\pi k / \kappa)^2} \quad (k = 1, \dots, n_\beta) \quad (1.2)$$

Очевидно, что с ростом частоты колебания параметр  $\kappa$  увеличивается, а вместе с ним растет число вещественных нулей  $\alpha_k$  и  $\beta_k$ . Следовательно, при высоких частотах в подходах [1, 2] необходимо решать системы очень большого порядка.

В данной работе предлагается иной подход, основанный на асимптотическом анализе уравнения (1.1) при  $\kappa \rightarrow \infty$ . При этом второй независимый параметр  $a$  считается фиксированным. Развиваемый метод является обобщением метода работы [3],

в которой исследовалось более простое уравнение — для задачи об антиплоских колебаниях штампа. Для успешного применения к задаче, рассматриваемой здесь, метод [3] требует существенного дополнительного исследования.

2. Выделим из ядра  $K(x)$  функцию  $K_1(x)$  с символом  $L_1(u)$ , обладающим алгебраическим поведением при  $u \rightarrow \pm \infty$  и не имеющим нулей на вещественной оси. При таком разложении вместо мероморфной функции  $L(u)$  появляются функции  $L_1(u)$  и  $L_2(u)$ , имеющие точки ветвления. Для выделения однозначных ветвей в плоскости комплексного переменного  $u$  известным образом проводятся разрезы [1].

Перепишем уравнение (1.1) в виде

$$\int_{-a}^a p(\xi) K_1(x - \xi) d\xi = 1 + \int_{-a}^a p(\xi) K_2(x - \xi) d\xi \quad (2.1)$$

Для уравнения (2.1) поставим задачу обращения оператора с ядром  $K_1(x)$ , стоящего в левой части. Известно [4, 5], что при  $\kappa \rightarrow \infty$  область  $(-a, a)$  распадается на основную, внешнюю область и две малые пограничные области длиной  $\sim 1/\kappa$ , прилегающие к концам интервала. Будем рассматривать глобальную структуру решения — его поведение во внешней области. Из результатов монографии [1] следует, что если исключить случаи особых значений параметра  $\kappa$ , при которых на вещественной оси имеются двукратные нули или полюсы, то внешнее решение может быть получено распространением оператора  $K_1$  на всю вещественную ось. Это связано с тем, что символ  $L_1(u)$  не имеет вещественных нулей.

В дальнейшем предполагается, что параметр  $\kappa$  может принимать любые большие значения, лежащие вне малых  $\varepsilon$ -окрестностей указанных особых значений. Тогда при  $\kappa \rightarrow \infty$  оператор  $K_1$  превращается в оператор свертки, и явное его обращение приводит к уравнению

$$\int_{-a}^a p(\xi) Q(x - \xi) d\xi = l_0, \quad |x| < a \quad (2.2)$$

$$l_0 = \frac{\Delta}{\sigma_1} \Big|_{u=0} = -\frac{i}{\beta} (1 + e^{2i\kappa\beta}) (1 - e^{2i\kappa})$$

$$Q(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} G(u) e^{-i\kappa ux} du, \quad G(u) = G_1(u) G_2(u)$$

Поскольку символ  $G(u)$  в уравнении (2.2) сохраняет все нули исходного символа  $L(u)$ , то отмеченная выше трудность, связанная с наличием этих нулей, в уравнении (2.2) не преодолена. Тем не менее переход от уравнения (1.1) к уравнению (2.2) позволяет существенно упростить получение окончательного решения. Кроме того, поскольку, как будет показано ниже, (2.2) — интегральное уравнение второго рода с непрерывным ядром и при этом его ядро выражается при  $\kappa \gg 1$  в элементарном виде, то к этому уравнению может быть эффективно применен прямой численный метод решения.

3. Учитывая равенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} e^{-i\kappa ux} du = \frac{1}{\kappa} \delta(x)$$

уравнение (2.2) можно привести к виду

$$p(x) - \kappa \int_{-a}^a p(\xi) Q_1(x - \xi) d\xi = l_0 \kappa, \quad |x| < a \quad (3.1)$$

$$Q_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} P_1(u) e^{-i\kappa ux} du, \quad P_1(u) = 1 - G(u)$$

Очевидно, что ядро  $Q_1(x)$  непрерывно (на самом деле оно даже бесконечно дифференцируемое).

Было показано [3—5], что уравнение вида (3.1) эквивалентно двум уравнениям относительно новых неизвестных функций  $\varphi(x)$  и  $v(x)$ :

$$\varphi(x) - \kappa \int_0^{\infty} \varphi(\xi) Q_1(x - \xi) d\xi = l_0 \kappa - \kappa \int_0^{\infty} [\varphi(2a + \xi) - v] Q_1(x + \xi) d\xi, \quad x > 0 \quad (3.2)$$

$$v(x) - \kappa \int_0^{\infty} v(\xi) Q_1(x - \xi) d\xi = l_0 \kappa, \quad |x| < \infty \quad (3.3)$$

есть только

$$p(x) = \varphi(a + x) + \varphi(a - x) - v, \quad |x| < a \quad (3.4)$$

В задачах, где символ  $G(u)$  не имеет нулей на вещественной оси, обычно удается доказать [4, 5], что  $\varphi(x) \rightarrow v$  при  $\kappa \rightarrow \infty$ . В этом случае последний интеграл в (3.2) оказывается мал, и уравнения (3.2), (3.3) становятся независимыми. При этом (3.2) превращается в уравнение Винера — Хопфа и решается методом факторизации, а (3.4) является уравнением свертки и решается элементарно применением преобразования Фурье.

В данной задаче докажем малость упомянутого интеграла, исходя из свойств ядра  $Q_1(x)$ . Вначале получим асимптотическое выражение для  $Q_1(x)$  при  $\kappa \rightarrow \infty$ . Основную трудность здесь представляет оценка интеграла вида

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} e^{-i\kappa u x} e^{-2\kappa(\sigma_1 + \sigma_2)} du$$

Можно показать, что основной вклад в  $J$  дает окрестность стационарной точки  $u_*$  фазы  $S$ :

$$S(u, x) = ux + 2\sqrt{1 - u^2} + 2\sqrt{\beta^2 - u^2} \quad (3.5)$$

причем  $0 < u_* < \beta$ . Можно также показать что  $S_u$  — монотонно убывающая непрерывная функция для любого фиксированного  $x > 0$ , причем  $S_u > 0$  при  $u = 0$  и  $S_u < 0$  при  $u = \beta - 0$ . Следовательно, уравнение  $S_u = 0$ , определяющее стационарную точку  $u_*$ , всегда имеет единственное решение, которое легко находится численно, например методом половинного деления. В итоге получаем, что при  $\kappa \rightarrow \infty$

$$J \sim \frac{\exp(-i\pi/4)}{\sqrt{2\pi\kappa}} \frac{\exp(i\kappa S(u_*, x))}{\sqrt{|S_{uu}(u_*, x)|}}$$

Используя асимптотики двух других слагаемых, входящих в ядро  $Q_1(x)$  [3], имеем оценку

$$Q_1 \sim \kappa^{-1/2} [A_1(x) \exp(i\kappa S(u_*, x)) + A_2(x) \exp(i\kappa\beta\sqrt{4+x^2}) + A_3(x) \exp(i\kappa\sqrt{4+x^2})] \quad (3.6)$$

где  $A_1(x)$ ,  $A_2(x)$ ,  $A_3(x)$  — гладкие, не зависящие от  $\kappa$  функции.

Дальнейшая оценка интеграла в правой части (3.2) будет основана на применении хорошо известного в таких случаях приема интегрирования по частям. Поскольку при  $x > 0$  фазовая функция  $(4+x^2)^{1/2}$  не имеет стационарных точек, такое интегрирование по частям показывает, что вклад в рассматриваемый интеграл от слагаемых, соответствующих функциям  $A_2$  и  $A_3$ , имеет порядок  $\kappa^{-1/2}$ . Для выяснения асимптотического поведения слагаемого, соответствующего функции  $A_1$ , сначала убеждаем-

ся в отсутствии при  $x > 0$  стационарных (по  $x$ ) точек у функции  $S(u_*, x)$ . В самом деле, равенство

$$S_u(u, x) = 0 \quad (3.7)$$

определяет стационарную точку  $u_* = u_*(x)$ , поэтому  $S(u_*, x) = S[u_*(x), x]$ . Отсюда следует  $dS/dx = S_u u_{*x} + S_x$ , или при учете (3.7) и (3.6)  $dS/dx = S_x = u = u_*(x)$ .

Таким образом,  $dS/dx = 0$  лишь при  $u_* = 0$ , а это возможно только при  $x = 0$ , что доказывается непосредственно. Отсюда следует, что и от слагаемого с  $A_1$  вклад в интеграл правой части (3.2) имеет порядок  $\kappa^{-1/2}$ . Таким образом, этот интеграл при  $\kappa \rightarrow \infty$  может быть отброшен.

4. Опуская подробности решения уравнения Винера — Хопфа (3.2) и уравнения свертки (3.3), выпишем окончательный результат

$$p(x) = \frac{\kappa}{\beta \operatorname{tg} \kappa \beta} - \frac{i\pi l_0 \kappa}{2G_-(0)} \left\{ \sum_{k=1}^{n_\alpha} \frac{kG_+(\alpha_k) H_k(x, 1)}{1 - \exp[-2\kappa\sigma_1(\alpha_k)]} + \sum_{k=1}^{n_\beta} \frac{kG_+(\beta_k) H_k(x, \beta)}{1 - \exp[-2\kappa\sigma_2(\beta_k)]} \right\} \quad (4.1)$$

$$H_k(x, \beta) = \{ \exp[i\sqrt{(\kappa\beta)^2 - (\pi k)^2}(a+x)] + \exp[i\sqrt{(\kappa\beta)^2 - (\pi k)^2} \cdot (a-x)] \} \times [(\kappa\beta)^2 - (\pi k)^2]^{-1}, \quad G(\alpha) = G_+(\alpha) G_-(\alpha)$$

(функция  $G_+(\alpha)$  аналитична в верхней полуплоскости).

Приведем также точный вид решения аналогичной антиплоской задачи, поскольку в [3] вкратились опечатки

$$\tau(x) = \frac{\kappa}{\operatorname{tg} \kappa} - \frac{i\pi l_0 \kappa}{2G_-(0)} \sum_{k=1}^n kG_+(\alpha_k) H_k(x, 1), \quad G(u) = 1 - \exp(-2\kappa\sigma_2) \quad (4.2)$$

(величины  $\sigma_2, \alpha_k$  определяются из (1.1), (1.2)). Сложное вычисление фактора  $G_+(\alpha)$  функции  $G(\alpha)$  при  $\kappa \gg 1$  может быть упрощено. Именно интегралы вида

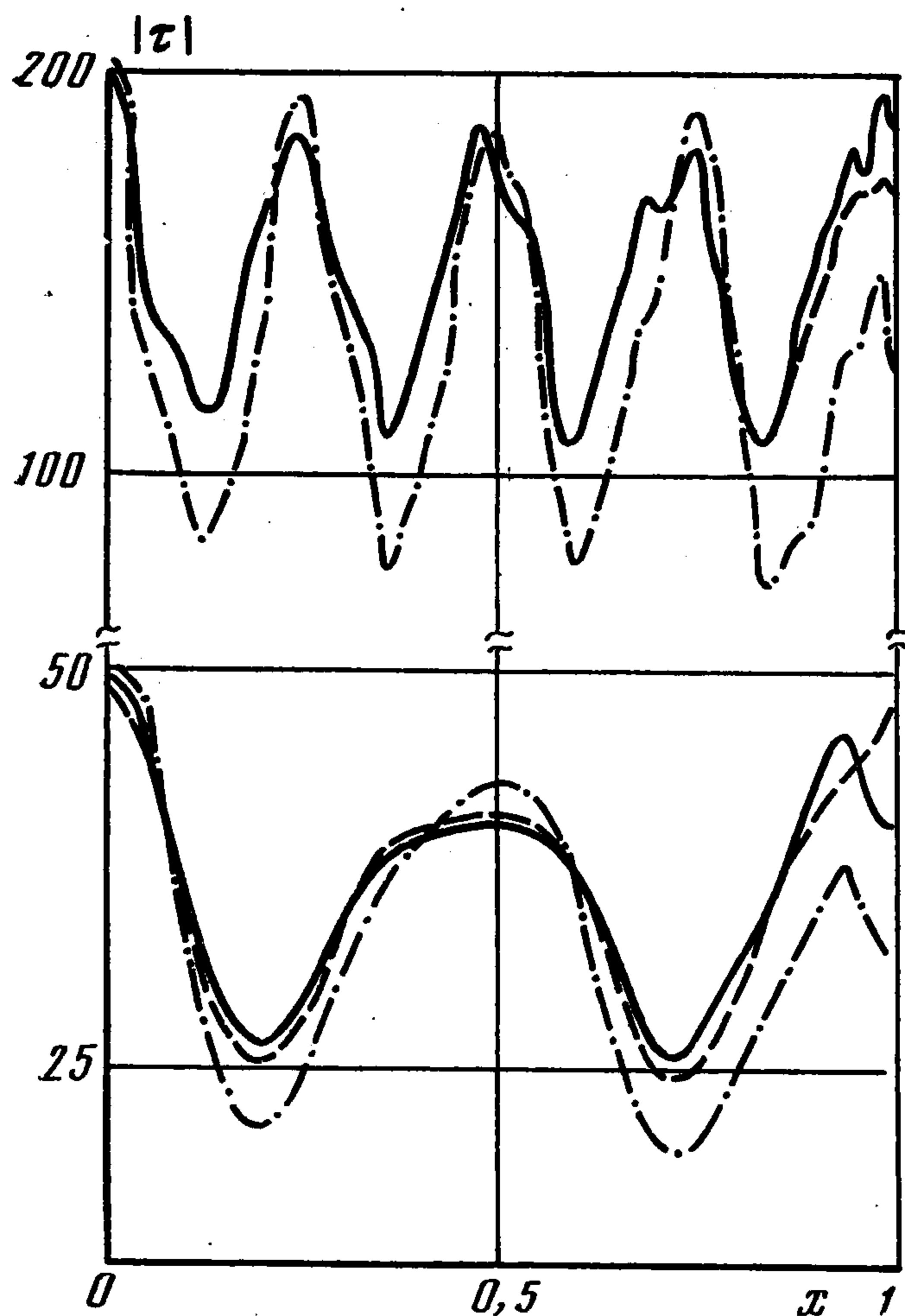
$$G_+(\alpha) = \exp \left\{ \frac{1}{2i\pi} \int_{i\infty}^{-i\infty} \frac{\ln[1 - \exp(-2\kappa\sqrt{u^2 - \gamma^2})]}{u - \alpha} du \right\} \quad (4.3)$$

( $\gamma = 1$  или  $\gamma = \beta$ ) путем последовательных замен переменных  $u = -it$ ,  $t = [z(z + 2\gamma)]^{-1/2}$ ,  $z = t/\kappa$ , деформации контура, выделения основного вклада при  $\kappa \rightarrow \infty$  и последней замены переменной  $t = iz$  удается свести к виду

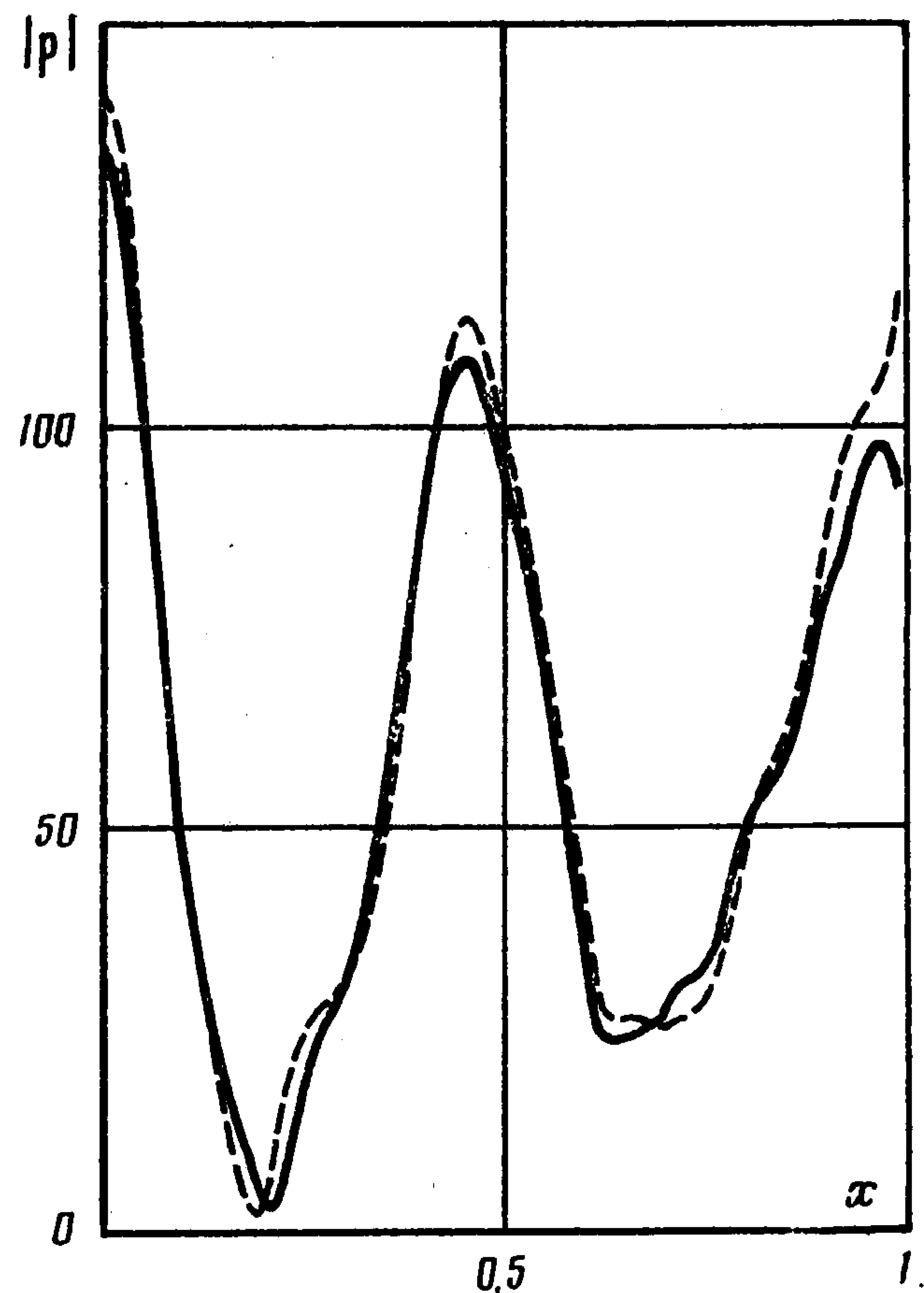
$$G_+(\alpha) = \exp \left\{ \sqrt{\frac{i\kappa\gamma}{2}} \frac{\alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{\ln[1 - \exp(2i\kappa\gamma - 2z)]}{\kappa\alpha^2 + 2i\gamma z} \frac{dz}{\sqrt{z}} \right\} \quad (4.4)$$

Интеграл в (4.4) удобен для численной реализации, поскольку подынтегральная функция не имеет особенностей при  $z > 0$  и экспоненциально убывает при  $z \rightarrow \infty$ .

На фиг. 1 изображена амплитуда контактного напряжения антиплоской задачи при  $\kappa = 40$  (нижняя часть фигуры) и при  $\kappa = 150$  (верхняя часть). Фиг. 2 соответствует плоской задаче при  $\kappa = 80$ . Везде полагалось  $a = 1$ ,  $\nu = 0,3$ . Сплошными линиями изображены решения, соответствующие явным асимптотическим формулам (4.1), (4.2), штриховыми — результаты численного решения упрощенного уравнения (3.1) и аналогичного ему уравнения в [3], штрихпунктирными — результаты численного



Фиг. 1



Фиг. 2

решения исходного интегрального уравнения. Все численные решения получены методом коллокации. В верхней части фиг. 1 штриховые кривые отличаются от сплошных лишь в окрестности конца интервала.

Прямое численное решение исходного уравнения сопряжено с большими трудностями. Это объясняется тем, что при  $\kappa \gg 1$  его ядро представляет сумму дельта-образной и нескольких сильно осциллирующих функций, что делает процесс вычислений очень неустойчивым. Реализовать построение такого решения удастся только в антиплоском случае, где ядро исходного уравнения [3] в отличие от (1.1) имеет довольно простой вид. Неустойчивость счета требует также критического отношения к кривым, изображенным штрихпунктирными линиями, — можно говорить лишь о качественном сравнении их с кривыми, полученными устойчиво реализуемыми методами.

С ростом частоты колебания  $\kappa$  эпюра контактных напряжений носит все более и более волнообразный характер. Это явление объясняется многократным переотражением лучей от дна слоя и отличается от аналогичной задачи для полуплоскости [5], где контактное напряжение при  $\kappa \rightarrow \infty$  стремится к постоянному значению.

В заключение заметим, что случай, когда полоса сцеплена с жестким основанием [1, 2], также может быть исследован методом, предложенным в данной работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Воронич И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
2. Бабешко В. А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 254 с.
3. Сумбатян М. А. Асимптотика решения контактной задачи для упругого слоя при высоких частотах колебания // Докл. АН СССР. 1988. Т. 299. № 6. С. 1344—1346.
4. Александров В. М. Асимптотические методы в контактных задачах теории упругости // ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 4. С. 672—683.
5. Боев С. И., Сумбатян М. А. Динамическая контактная задача для упругой полуплоскости при высоких частотах колебания // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 6. С. 1039—1043.