Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 2, 1990

УДК 539.3

Б. М. Нуллер

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УПРУГИХ ПОЛУПЛОСКОСТЕЙ

Рассматриваются статические и стационарные динамические задачи для системы N упругих изотропных полуплоскостей, сцепленных на произвольных участках своих границ. Вне участков сцепления полуплоскости соприкасаются со штампами и гибкими накладками. Типы смешанных граничных условий, число которых может достигать шести, задаются на каждой полуплоскости независимо. В частности, наиболее важный случай плоскости, $N = 2$, не требует наличия зеркальной симметрии типов на противоположных берегах разрезов, что дает возможность изучать новые классы задач резания, расклинивания, отслаивания включений.

Предлагаемая методика решения позволила в общей постановке свести указанные задачи к краевым задачам Гильберта — Римана на N-листных римановых поверхностях, определенных ветвлением и законом склеивания листов. Если проблема построения алгебраической функции полученной римановой поверхности по ее ветвлению решена (при $N = 2$, т. е. для гиперэллиптической поверхности, эта функция хорошо известна, при $N \leqslant 4$, по-видимому, ее также можно найти в общем случае), то соответствующая контактная задача решается в квадратурах. Рассмотрены примеры.

1. Пусть $\{R_k\}_1^N$ — множество экземпляров комплексной плоскости $z = x + iy$; $S_k = \{z \in R_k\colon\ y > 0\}$, $k = 1, 2, \ldots, N^+$, $N^+ < N$, — верхняя, $S_k = \{z \in R_k\colon\ y < 0\}$, $k = N^+ + 1, N^+ + 2, \ldots, N$ — нижняя упругие полуплоскости, Γ_k — граница S_k. Каждая k-я верхняя полуплоскость соприкасается с $N_k \in [1, N^-]$, $N^- = N - N^+$, какими-либо нижними полуплоскостями; $\Gamma_{kl}' \subset \Gamma_k$ и $\Gamma_{lk}' \subset \Gamma_l$ — границы контакта областей S_k и S_l — совпадают при совмещении R_k и R_l, $\Gamma_{kl}' \cap \Gamma_{km}' = \varnothing$ при $l \neq m$. Пусть упругая область $S_1 \cup S_2 \cup \ldots S_N$ «связана» в том смысле, что для любых k и $l \in [1, N]$ существует цепочка границ $\Gamma_{kr}', \Gamma_{rs}', \ldots, \Gamma_{qp}', \Gamma_{pl}'$, соединяющая области S_k и S_l; Γ_k' — объединение Γ_{kl}' по всем N_k значениям l, $\Gamma_k'' = \Gamma_k \setminus \Gamma_k'$, μ — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, ρ — плотность материала S. На Γ_k поставлены в общем случае разные при разных k типы основных или смешанных граничных условий P_k и указан характер особенностей, допускаемый в точках раздела; в каждой полуплоскости на бесконечности заданы интенсивности полей напряжений, удовлетворяющие условиям равновесия и связности области S. Границы Γ_k движутся относительно неподвижных областей S_k с одинаковой постоянной дозвуковой скоростью $c \geqslant 0$. Требуется определить упругие деформации области S.

В случае $N = 2$ некоторые основные задачи для однородной плоскости с разрезами решены в квадратурах при $P_1 = P_2$ и $P_1 \neq P_2$ [1], для составной плоскости — при $P_1 = P_2$ [2]; смешанные задачи решены в той же форме только при $P_1 = P_2$ [3—6], т. е. при зеркально симметричных типах условий на противоположных берегах разрезов.

Рассматриваемые в настоящей статье независимые типы условий $P_k \neq P_l$, $k \neq l$, $N \geqslant 2$, возникают при изучении резания, расклинивания, отслаивания включений и накладок, скольжения и качения по полуплоскости нескольких упругих дисков. Цель статьи — показать способы, позволяющие свести поставленную задачу к краевым задачам Гильберта — Римана на N-листной римановой поверхности и решить ее в квадратурах.

Разрежем плоскости P_k по линиям Γ_k', $k = 1, 2, \ldots, N$, и склеим крест-накрест берега разрезов Γ_k' в R_k и Γ_{lk}' в R_l при всех $k \leqslant N^+$ и N_k значениях l для каждого k. На образованную таким путем N-листную риманову поверхность R, определяемую некоторым неприводимым многочленом $F(z, w)$ и основной переменной z, перенесем из п. 1 обозначения линий, полуплоскостей и плоскостей. Упругую область S будем рассматривать как часть римановой поверхности R с краем $\Gamma'' = \Gamma_1'' \bigcup \Gamma_2'' \bigcup \ldots \Gamma_N''$. Последующие построения ведутся на R и S.

2. Пусть решение задачи теории упругости в полуплоскости S_k, представимое через одну функцию $\Phi_k(z)$, кусочно-аналитическую в плоскости R_k, на Γ_k имеет вид

$$\begin{aligned}(u' + iv')_k^{\pm}(x) &= \Psi_1[x, \Phi_k^{\pm}(x), \Phi_k^{\pm}(x)], \quad f' \equiv \partial f/\partial x \\ (\sigma - i\tau)_k^{\pm}(x) &= \Psi_2[x, \Phi_k^{\pm}(x), \Phi_k^{\mp}(x)]\end{aligned} \tag{2.1}$$

и при условиях P_k на Γ_k'' независимо от условий на Γ_k' порождает в R_k краевые условия Гильберта и Римана:

$$\operatorname{Im}[p_k^{\pm}(x)\Phi_k^{\pm}(x)] = g_k^{\pm}(x), \quad x \in E_k^1; \quad \Phi_k^+(x) = p_k(x)\Phi^-(x) + g_k(x), \quad x \in E_k^2 \tag{2.2}$$

Здесь u_k, v_k, $\tau \equiv \tau_{xy}$, $\sigma \equiv \sigma_y$ — касательные и нормальные перемещения и напряжения; заданные коэффициенты и свободные члены удовлетворяют обычным ограничениям [7], $\Gamma_k'' = E_k^{-1} \bigcup E_k^2$, $\Phi_k^{\pm}(x)$ — предельные значения функции $\Phi_k(z)$ на Γ_k'', $k = 1, 2, \ldots, N$.

Тогда при условиях полного сцепления на Γ_{kl}' $(k \leqslant N^+)$

$$(u' + iv')_k^+(x) = (u' + iv')_l^-(x), \quad (\sigma - i\tau)_k^+(x) = (\sigma - i\tau)_l^-(x) \tag{2.3}$$

задача разд. 1 на S сводится к аналогу задачи (2.2) на R.

Действительно, введем аналитическую в $R \setminus \Gamma''$, $\Gamma'' = \Gamma_1'' \bigcup \Gamma_2'' \bigcup \ldots \Gamma_N''$. Функцию $\Phi(z, w) = \Phi_k(z)$, $(z, w) \in R_k$, $k = 1, 2, \ldots, N$. При склейке крест-накрест $\Phi_k^{\pm}(x) = \Phi_l^{\mp}(x)$ на Γ_{kl}' и Γ_{lk}' в силу аналитичности $\Phi(z, w)$ на $\Gamma' = \Gamma_1' \bigcup \Gamma_2' \bigcup \ldots \Gamma_N'$. Поэтому условия (2.3) при подстановке в них выражений (2.1) удовлетворяются тождественно, условия (2.2) становятся эквивалентными следующим условиям на римановой поверхности R с разрезами E^1:

$$\begin{gathered}\operatorname{Im}[p^{\pm}(x, v)\Phi^{\pm}(x, v)] = g^{\pm}(x, v), \ (x, v) \in E^1 \\ \Phi^+(x, v) = p(x, v)\Phi^-(x, v) + g(x, v), \ (x, v) \in E^2 \\ p^{\pm}(x, v) = p_k^{\pm}(x), \ g^{\pm}(x, v) = g_k^{\pm}(x), \ (x, v) \in E_k^1 \\ p(x, v) = p_k(x), \ g(x, v) = g_k(x), \ (x, v) \in E_k^2 \\ E^r = E_1^r \bigcup E_2^r \bigcup \ldots E_N^r, \ r = 1, 2, \ldots\end{gathered}$$

Здесь $\Phi^{\pm}(x, v)$ — предельные значения на $\Gamma'' = E^1 \bigcup E^2$ функции $\Phi(z, w)$, кратной дивизору, согласованному с характером упругих напряжений в особых точках области S.

Если функция $F(z, w)$ построена и $E^1 = \varnothing$, то задача Римана (2.4) на R решается в квадратурах; если $E^1 \neq \varnothing$, то задачу Гильберта — Римана (2.4) можно свести снова к задаче Римана на $2N$-листной замкнутой римановой поверхности, построенной в виде дубля поверхности R с краем E^1 [3].

3. Рассмотрим статические деформации, полагая $c = \rho = 0$. Решение Мусхелишвили [1]

$$(u' + iv')_k(z) = \Phi_k(z) - \Phi_k(\bar z) + (z - \bar z)\overline{\Phi_k'(z)}, \quad z \in S_k \tag{3.1}$$
$$2\mu(\sigma - i\tau)_k(z) = \varkappa\Phi_k(z) + \Phi_k(\bar z) - (z - \bar z)\Phi'(z), \quad \varkappa = 3-4\nu$$

имеет форму (2.1) и при смешанных условиях (для краткости однородных) четырех типов

$$u_k' = \sigma_k = 0, \ x \in E_k^1; \ u_k' = v_k' = 0, \ x \in E_k^2 \tag{3.2}$$
$$v_k' = \tau_k = 0, \ x \in E_k^3; \ \tau_k = \sigma_k = 0, \ x \in E_k^4;$$
$$\Gamma_k'' = E_k^1 \cup E_k^2 \cup E_k^3 \cup E_k^4$$

независимо от условий на Γ_k' приводит к задаче (2.2) [8]

$$\operatorname{Re}\Phi_k^\pm(x) = 0, \ x \in E_k^1; \ \Phi_k^+(x) + \varkappa\Phi_k^-(x) = 0, \ x \in E_k^2 \tag{3.3}$$
$$\operatorname{Im}\Phi_k^\pm(x) = 0, \ x \in E_k^3; \ \Phi_k^+(x) - \Phi_k^-(x) = 0, \ x \in E_k^4$$

Согласно связи (2.2)—(2.4), при полном сцеплении областей S_k и (3.3) для функции $\Phi(z, w)$ на R получим задачу Гильберта — Римана

$$\operatorname{Re}\Phi^\pm(x, v) = 0, \ (x, v) \in E^1; \ \Phi^+(x, v) + \varkappa\Phi^-(x, v) = 0, \ (x, v) \in E^2$$
$$\operatorname{Im}\Phi^\pm(x, v) = 0, \ (x, v) \in E^3; \ \Phi^+(x, v) = \Phi^-(x, v), \ (x, v) \in E^4$$

Если граница Γ'' области S свободна от напряжений, то согласно (3.2)—(3.4) $\Gamma'' = E^4$, $\Phi^+(x, v) = \Phi^-(x, v)$ на Γ'', следовательно, функция $\Phi(z, w)$, аналитическая на $\mathrm{R} \setminus \Gamma'$, мероморфна на R; для других типов основных условий (3.2), преобразуя форму (3.1), можно получить аналогичный результат. В то же время при $N = 2$ обычный путь [1] приводит к задаче Римана относительно $\Phi_1(z)$. При смешанных условиях краевая задача (3.4) за счет построения функции $F(z, w)$ также оказывается более простой, чем альтернативная задача на комплексной плоскости, если она существует.

Покажем это на примерах. Пусть S — упругая плоскость с разрезами, $\Gamma_{12}' = [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup \ldots [a_t, b_t]$. Тогда $N = 2$, следовательно, R — гиперэллиптическая риманова поверхность и

$$F(z, w) = w^2 - \prod_{k=1}^{t}(z - a_k)(z - b_k)$$

Пример 1. Пусть $t = 1$, $a_1 = -a$, $b_1 = a > 0$, разрезы $(-\infty, -a)$, (a, ∞) свободный от напряжений. В этом случае, как отмечено, задача (3.4) не возникает. В классе E напряжений, интегрируемых на продолжении разрезов и ограниченных на бесконечности, общее решение (3.1) выражается через мероморфную функцию

$$\Phi(z, w) = (Az + B)w^{-1} + C, \ w = \pm\sqrt{z^2 - 1}, \ (z, w) \in S_{1,2}$$

Комплексные постоянные A, B, C найдем по заданным на бесконечности в S_1 двум составляющим главного вектора и величинам: главного момента — в S_1, общего вращения ε^∞ — в S, постоянных растягивающих напряжений σ_{xk}^∞ — в S_k.

Пример 2. Пусть $t = 1$, $a_1 = -\infty$, $b_1 = 0$, верхний берег разреза $(0, \infty)$ свободен, $\Gamma_1'' = E_1^4$, нижний берег полностью сцеплен с прямолинейным штампом, $E_2^2 = \{[a, b]\}$, $a \in (0, \infty)$; $E_2^1 = E_2^3 = \varnothing$. Для кусочно-аналитической функции $\Phi(z, w)$, $w = \pm\sqrt{z}$, $(z, w) \in S_{1,2}$, имеющей границу E_2^2 и полюс $z = 0$, согласно (3.4), получим задачу Римана $\Phi^+(x, v) + \varkappa\Phi^-(x, v) = 0$, $(x, v) \in E_2^2$. Функция $z = z_1^2$ конформно отображает R в комплексную плоскость z_1, где задача Римана принимает вид $\Phi^+(x_1) + \varkappa\Phi^-(x_1) = 0$, $x_1 \in [\sqrt{a}, \sqrt{b}]$. Выписывая ее решение [7] и возвращаясь в R, получим функцию

$$\Phi(z, w) = w^{-1}(w - \sqrt{a})^{-1/2+i\beta}(w - \sqrt{b})^{-1/2-i\beta}(Aw^2 + Bw + C),$$
$$\beta = \ln(\varkappa/(2\pi))$$

определяющую общее решение (3.1) в E. Комплексные постоянные A, B, C можно найти по двум компонентам силы (X, Y), приложенной к штампу, по величинам ε^∞, $\sigma_{x1}{}^\infty = \sigma_{x2}{}^\infty = \sigma^\infty$ и двум коэффициентам интенсивности $N_{\rm I}$, $N_{\rm II}$ напряжений, убывающих как $z^{-1/2}$ при $z \to \infty$. В частности, если $\varepsilon^\infty = \sigma^\infty = N_{\rm I} = N_{\rm II} = 0$, то $A = B = 0$, $C = -(4\pi)^{-1}(X + iY)$ контактные напряжения под штампом имеют вид

$$(\sigma - i\tau)_2(x) = \frac{C(\varkappa+1)(i\cos\psi - \sin\psi)}{\sqrt{\varkappa x(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{b}-\sqrt{x})}}, \quad \psi = \beta \ln \frac{(x-a)\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{b}}}{(b-x)\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{a}}}$$

Пример 3. В примере 2 изменим только условие под штампом на условие скользящего контакта. Согласно (3.2)—(3.4), в этом случае $E_2{}^3 = \{[a, b]\}$, функция $\Phi(z, w)$, $w^2 = z$, является решением задачи Гильберта на $R \setminus E_2{}^3$: $\operatorname{Im}\Phi^\pm(x, v) = 0$, $(x, v) \in E_2{}^3$. Используя предыдущий прием, получим в E

$$\Phi(z, w) = iw^{-1}(w - \sqrt{a})^{-1/2}(w - \sqrt{b})^{-1/2}(A_1w^2 + A_2w + A_3) +$$
$$+ A_4w^{-1} + A_5)$$

Действительные постоянные $A_1, \ldots, A_5$ можно найти из тех же условий, что в примере 2, ибо теперь $X = 0$. Если $\varepsilon^\infty = \sigma^\infty = N_{\rm I} = N_{\rm II} = 0$, то $A_s = 0$ при $s \neq 3$, $A_3 = -(4\pi)^{-1}Y$, под штампом $\sigma(x) = Y[2\pi\sqrt{x(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{b}-\sqrt{x})}]^{-1}$.

Замечание. Смешанные задачи типа 2 и 3 (с одним полубесконечным разрезом и произвольными условиями (3.2) на разрезе) можно решить также путем конформного отображения $z = z_1{}^2$, области S на полуплоскость z_1.

4. Рассматривая динамические стационарные деформации в дозвуковом режиме, положим в разд. 1 $\rho > 0$, $0 < c < c_2$, $c_2{}^2 = \mu\rho^{-1}$. Эта задача имеет решение вида (2.1) [6]

$$\mu u_k' = -\operatorname{Re}[\varphi_{k1}(z_1) + q_2\varphi_{k2}(z_2)], \quad \mu v_k' = \operatorname{Im}[q_1\varphi_{k1}(z_1) + \varphi_{k2}(z_2)]$$
$$\sigma_k = 2\operatorname{Re}[q\varphi_{k1}(z_1) + q_2\varphi_{k2}(z_2)], \quad \tau_k = 2\operatorname{Im}[q_1\varphi_{k1}(z_1) + q\varphi_{k2}(z_2)]$$
$$\varphi_{ks}(z) = q_s{}^{-1/2}[(-1)^{s+1}R^+\Phi(z) + R^-\overline{\Phi(\bar{z})}], \quad R^\pm = \sqrt{q_1q_2} \pm q, \; z_s = x + iq_sy$$
$$q_s = \sqrt{1 - c^2c_s{}^{-2}}, \; 2q = 1 + q_2{}^2, \quad c_1{}^2 = 2(1-\nu)(1-2\nu)^{-1}c_2{}^2, \; s = 1, 2$$

и при условиях (3.2) сведена к уравнениям Гильберта — Римана (2.2). При полном сцеплении (3.3) на Γ' соответствующую задачу Гильберта — Римана для функции $\Phi(z, w)$, аналитической в $R \setminus (\Gamma'' \setminus E^4)$, можно записать в форме

$$\operatorname{Re}\Phi^\pm(x, v) = 0, \; (x, v) \in E^1; \; \operatorname{Im}\Phi^\pm(x, v) = 0, \; (x, v) \in E^3$$
$$\Phi^+(x, v) + Q\Phi^-(x, v) = 0, \; (x, v) \in E^2; \; Q = R^+(1 - \sqrt{q_1q_2})(R^-(1 + \sqrt{q_1q_2}))^{-1}$$

5. Рассмотрим решения статической и динамической задач разд. 1, которые выражаются через две аналитические функции $\Phi_{kr}(z)$, $r = 1, 2$, в форме Галина и на границе области принимают вид [9, 10]

$$u_k'(x) = \operatorname{Re}[a_1\Phi_{k1}(x) + b\Phi_{k2}(x)], \quad \sigma_k(x) = \operatorname{Re}\Phi_{k2}(x) \tag{5.1}$$
$$v_k'(x) = \operatorname{Im}[b\Phi_{k1}(x) + a_2\Phi_{k2}(x)], \quad \tau_k(x) = \operatorname{Im}\Phi_{k1}(x)$$

где при $c = 0$ $f' = \partial f/\partial x$, $4\mu a_j = 1 + \varkappa$, $4\mu b = 1 - \varkappa$; $j = 1, 2$; при $c \in (0, c_2)$ $f' = \partial f/\partial t$, $2\mu R^+R^-b = q_1q_2 - q$, $2\mu R^+R^-a_j = q_j(1-q)$

Эти решения допускают постановку других, важных, в частности, для теории резания [11] граничных условий на линиях контакта:

$$[u'] = [v'] = [\sigma] = [\tau] = 0, \quad x \in D_{kl}{}^3; \quad [v'] = [\sigma] = \tau_k + \rho_{kl}\sigma_k =$$
$$= [\tau] = 0, \; x \in D_{kl}{}^2; \quad [u'] = [\tau] = \sigma_k = \sigma_l = 0, \quad x \in D_{kl}{}^1 \tag{5.2}$$
$$\Gamma_{kl}' = D_{kl}' \cup D_{kl}{}^2 \cup D_{kl}{}^3; \quad [f] = f_k - f_l, \quad x \in \Gamma_{kl}'$$

и вне контакта

$$\sigma_k = \tau_k = 0,\ x \in E_k^1;\ v_k' = \tau_k + \rho_k\sigma_k,\ x \in E_k^2 \qquad (5.3)$$
$$u_k' = \sigma_k = 0,\quad x \in E_k^3;\quad E_k'' = E_k^1 \cup E_k^2 \cup E_k^3$$

где $\rho_{kl} \equiv \rho_{kl}(x)$, $\rho_k \equiv \rho_k(x)$ — коэффициенты сухого трения.

Действительно, вводя на N-листных римановых поверхностях с краем $S^r = S \setminus D^{3-r}$, $D^r = \bigcup_{k,l} D_{kl}^r$, $r = 1, 2$, аналитические функции $\Phi_r(z, w) = \Phi_{kr}(z)$, $(z, w) \in S_k$, получим на S^r из условий (5.1)—(5.3) две скалярные задачи Гильберта:

$$\operatorname{Re}\Phi_2 = 0,\quad (x, v) \in D^1 \cup E^1 \cup E^3;\quad a_2 \operatorname{Im}\Phi_2 - b\rho_* \operatorname{Re}\Phi_2 = 0,$$
$$(x, v) \in E^2$$
$$\operatorname{Im}\Phi_1 = -\rho_* \operatorname{Re}\Phi_2\quad (x, v) \in D^2 \cup E^2;\quad \operatorname{Im}\Phi_1 = 0,\quad (x, v) \in E^1$$
$$\operatorname{Re}\Phi_1 = 0,\ (x, v) \in E^3;\quad \Phi_k \equiv \Phi_k(x, v);\ \rho_* \equiv \rho_k(x),\ (x, v) \in E_k^2$$
$$\rho_* \equiv \rho_{kl}(x),\ (x, v) \in D_{kl}^2$$

Эти задачи можно свести к задачам Римана на N-листных замкнутых поверхностях, являющихся дублями S^r [3]. При $N = 2$ они представляют собой задачи Гильберта на комплексной плоскости с разрезами относительно функций $\Phi_r(z) = \Phi_{kr}(z)$, $z \in S_k$, $k, r = 1, 2$, и могут быть решены иным методом [5, 6].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 607 с.
2. *Черепанов Г. П.* О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение 1962. № 1. С. 131—138.
3. *Зверович Э. И.* Краевые задачи теории аналитических функций в гельдеровских классах на римановых поверхностях // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26. Вып. 1. С. 113—179.
4. *Симонов И. В.* Динамика трещины отрыва—сдвига на границе раздела двух упругих материалов // Докл. АН СССР. 1983. Т. 271. № 1. С. 65—68.
5. *Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М.* О некоторых краевых задачах и их приложениях в теории упругости // Изв. ВНИИ им. Веденеева. 1984. Т. 172. С. 7—13.
6. *Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М.* О дозвуковом стационарном движении штампов и гибких накладок по границе упругой полуплоскости и составной плоскости // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 1. С. 134—144.
7. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
8. *Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М.* Давление системы штампов на упругую полуплоскость при общих условиях контактного сцепления и скольжения // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 2. С. 284—293.
9. *Симонов И. В.* О дозвуковом движении края сдвиговой подвижки с трением вдоль границы раздела упругих материалов // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 3. С. 497—506.
10. *Симонов И. В.* Об интегрируемом случае краевой задачи Римана — Гильберта для двух функций и решение некоторых смешанных задач для составной упругой плоскости // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 6. С. 951—960.
11. *Нуллер Б. М., Шехтман И. И.* О стационарной задаче резания упругого материала // Докл. АН СССР. 1988. Т. 303. № 6. С. 1327—1330.

Ленинград

Поступила в редакцию
16.VI.1989