

УДК 539.3

© 1990 г.

А. Н. Бородачев

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ НЕОСЕСИММЕТРИЧНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Рассматривается неосесимметричная смешанная краевая задача о давлении (при отсутствии сил трения и сцепления) жесткого кругового в плане штампа с произвольной формой основания на неоднородное упругое полупространство. Модуль сдвига материала полупространства постоянный, а коэффициент Пуассона — произвольная кусочно-непрерывная функция глубины. С использованием теории парных интегральных уравнений, связанных с обобщенным интегральным оператором Ганкеля, указанная задача приводится к последовательности одномерных интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

Показано, что для одного периодического закона изменения упругих свойств материала полупространства по глубине полученные интегральные уравнения допускают построение точных решений. В качестве примера приведено решение неосесимметричной задачи о внецентренном вдавливании штампа с плоским основанием, на основе которого исследовано влияние неоднородности упругого материала на величину параметров перемещения штампа. Выполнен асимптотический анализ решения в случае, когда упругие характеристики материала становятся быстроосциллирующими функциями.

Некоторые задачи для неоднородных материалов с переменным коэффициентом Пуассона исследованы ранее [1—4].

1. Рассмотрим задачу о давлении жесткого штампа на неоднородное упругое полупространство $R_+^3 = \{x^0: x_3 > 0\}$, где $x^0 = (x_1, x_2, x_3)$ — точка пространства R^3 . Модуль сдвига материала полупространства постоянный ($\mu = \text{const} > 0$), а коэффициент Пуассона $\nu = \nu(x_3)$ — произвольная функция, удовлетворяющая стандартным условиям $-1 < \nu(x_3) \leq 1/2$ [5]. При этом модуль упругости материала $E = 2\mu(1 + \nu)$ — положительная функция глубины.

Векторное уравнение равновесия в перемещениях для рассматриваемой модели неоднородности упругого материала имеет вид (объемные силы отсутствуют)

$$\Delta u(x^0) + \nabla[\eta(x_3) \nabla \cdot u(x^0)] = 0, \quad x^0 \in R_+^3 \quad (1.1)$$

$$u = (u_1, u_2, u_3), \quad \eta = (1 - 2\nu)^{-1}$$

где Δ и ∇ — соответственно операторы Лапласа и градиента в R^3 .

Запишем граничные условия и условия на бесконечности

$$\sigma_{\alpha 3}(x, 0) = 0$$

$$\sigma_{33}(x, 0) = 0, \quad x \notin \Omega \quad (1.2)$$

$$u_3(x, 0) = \delta + \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 - f(x), \quad x \in \Omega$$

$$u_i(x^0) \rightarrow 0, \quad \sigma_{ij}(x^0) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |x^0| \rightarrow \infty \quad (1.3)$$

а также уравнения равновесия штампа

$$P = - \iint_{\Omega} \sigma_{33}(x, 0) dx \quad (1.4)$$

$$M_1 = - \iint_{\Omega} \sigma_{33}(x, 0) x_2 dx, \quad M_2 = - \iint_{\Omega} \sigma_{33}(x, 0) x_1 dx$$

Здесь $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, Ω — площадка контакта, σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, δ , ε_1 , ε_2 — заранее неизвестные параметры перемещения штампа как твердого тела, $f(\mathbf{x})$ — заданная функция, описывающая форму основания штампа, P , M_1 , M_2 — главный вектор и главные моменты приложенных к штампу сил. В (1.2), (1.3) и везде далее индексы i, j принимают значения 1, 2, 3, а индекс α — только 1 и 2; суммирование по повторяющимся индексам не проводится.

Общее решение уравнения (1.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{V} + \nabla b, \quad \mathbf{V} = (V_1, V_2, V_3) \\ \Delta \mathbf{V} &= 0, \quad \Delta b = -\frac{1}{2}\gamma \nabla \cdot \mathbf{V}, \quad \gamma = [1 - \nu(x_3)]^{-1} \end{aligned} \quad (1.5)$$

В случае однородного материала формулы (1.5) сводятся к решению Фрейбергера [5], являющемуся модификацией известного представления Папковича — Нейбера. Представление (1.5) остается справедливым и в более общем случае, когда $\nu = \nu(x^\circ)$. Другие формы общего решения уравнения (1.1) указаны в [4, 6].

Компоненты тензора напряжений выражаются через функции \mathbf{V} и b соотношениями (δ_{ij} — символ Кронекера, запятая перед индексом означает дифференцирование по соответствующей переменной x_i)

$$\mu^{-1}\sigma_{ij} = \delta_{ij}\nu\gamma\nabla \cdot \mathbf{V} + V_{i,j} + V_{j,i} + 2b_{,ij} \quad (1.6)$$

При отсутствии на границе полупространства касательных напряжений (см. (1.2)) можно без потери общности положить $V_1 = V_2 = 0$. В результате такого упрощения соотношения (1.5) и (1.6) принимают вид

$$u_\alpha = b_{,\alpha}, \quad u_3 = V + b_{,3} \quad (1.7)$$

$$\Delta V = 0, \quad \Delta b = -\frac{1}{2}\gamma V_{,3} \quad (1.8)$$

$$\mu^{-1}\sigma_{12} = 2b_{,12}, \quad \mu^{-1}\sigma_{\alpha 3} = (V + 2b_{,3})_{,\alpha} \quad (1.9)$$

$$\mu^{-1}\sigma_{\alpha\alpha} = \nu\gamma V_{,3} + 2b_{,\alpha\alpha}, \quad \mu^{-1}\sigma_{33} = [(2 - \nu)\gamma V + 2b_{,3}]_{,3}$$

где использовано обозначение $V = V_3$.

2. Введем оператор двумерного интегрального преобразования Фурье по переменным x_1 и x_2

$$F\{\varphi(\mathbf{x}^\circ)\}(\mathbf{k}, x_3) \equiv \varphi^F(\mathbf{k}, x_3) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\mathbf{x}^\circ) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad \mathbf{k} = (k_1, k_2) \quad (2.1)$$

действуя которым на соотношения (1.8) и решая получаемые при этом обыкновенные дифференциальные уравнения с учетом условий на бесконечности (1.3), находим $C(\mathbf{k})$ и $D(\mathbf{k})$ — произвольные функции)

$$V^F(\mathbf{k}, x_3) = C(\mathbf{k}) e^{-kx_3}$$

$$b^F(\mathbf{k}, x_3) = [D(\mathbf{k}) - \frac{1}{4}C(\mathbf{k}) m(x_3)] e^{-kx_3} - \frac{1}{4}C(\mathbf{k}) l(k, x_3) e^{kx_3} \quad (2.2)$$

$$m(x_3) = \int_0^{x_3} \gamma(x_3) dx_3, \quad l(k, x_3) = \int_{x_3}^{\infty} \gamma(x_3) e^{-2kx_3} dx_3, \quad k = |\mathbf{k}|$$

Применяя преобразование Фурье к (1.7), (1.9) и подставляя в полученные соотношения формулы (2.2), в частности, получаем

$$\begin{aligned} u_3^F(\mathbf{k}, x_3) &= [C(\mathbf{k}) - kD(\mathbf{k}) + \frac{1}{4}kC(\mathbf{k}) m(x_3)] e^{-kx_3} - \\ &\quad - \frac{1}{4}kC(\mathbf{k}) l(k, x_3) e^{kx_3} \\ \sigma_{\alpha 3}^F(\mathbf{k}, x_3) &= i\mu k_\alpha \Lambda^+(\mathbf{k}, x_3) \\ \sigma_{33}^F(\mathbf{k}, x_3) &= -\mu k \Lambda^-(\mathbf{k}, x_3) \\ \Lambda^\pm(\mathbf{k}, x_3) &= \frac{1}{2}kC(\mathbf{k}) l(k, x_3) e^{kx_3} \pm \\ &\quad \pm [2kD(\mathbf{k}) - C(\mathbf{k}) - \frac{1}{2}kC(\mathbf{k}) m(x_3)] e^{-kx_3} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Первое граничное условие (1.2) будет удовлетворено, если положить $4kD(\mathbf{k}) = [2 - kl(k, 0)]C(\mathbf{k})$. При этом уравнения (2.3) на границе полупространства R_+^3 принимают вид

$$\begin{aligned} u_3^F(\mathbf{k}, 0) &= 1/2 C(\mathbf{k}), \quad \sigma_{\alpha 3}^F(\mathbf{k}, 0) = 0, \\ \sigma_{33}^F(\mathbf{k}, 0) &= -\mu k^2 L(k) C(\mathbf{k}), \quad L(k) = l(k, 0) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Исключая из первого и третьего соотношений (2.4) функцию C , устанавливаем связь между преобразованиями Фурье нормальных напряжений и нормальных перемещений в точках границы полупространства R_+^3 :

$$\sigma_{33}^F(\mathbf{k}, 0) = -2\mu k^2 L(k) u_3^F(\mathbf{k}, 0) \quad (2.5)$$

Введем на плоскости $x_3 = 0$ полярные координаты соотношениями $x_1 = r \cos \varphi$, $x_2 = r \sin \varphi$ и рассмотрим случай, когда площадка контакта имеет форму круга с радиусом a : $\Omega = \{r, \varphi: 0 \leq r \leq a, -\pi < \varphi \leq \pi\}$. Представим функции $\sigma(\mathbf{x}) = -\sigma_{33}(\mathbf{x}, 0)$ и $u(\mathbf{x}) = u_3(\mathbf{x}, 0)$ комплексными рядами Фурье

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u(r, \varphi) \\ \sigma(r, \varphi) \end{Bmatrix} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} u_n(r) \\ \sigma_n(r) \end{Bmatrix} e^{in\varphi} \\ \begin{Bmatrix} u_n(r) \\ \sigma_n(r) \end{Bmatrix} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \begin{Bmatrix} u(r, \varphi) \\ \sigma(r, \varphi) \end{Bmatrix} e^{-in\varphi} d\varphi \end{aligned} \quad (2.6)$$

после чего, переходя в соотношении (2.5) к полярным координатам и выполняя интегрирование по угловой координате, получаем связь между функциями $u_n(r)$ и $\sigma_n(r)$ (используется обозначение для обобщенного интегрального оператора Ганкеля [7])

$$\begin{aligned} S_{N/2,0} \{u_n(r)\}(\rho) &= [2\mu\rho^2 L(\rho)]^{-1} S_{N/2,0} \{\sigma_n(r)\}(\rho), \quad N = |n| \\ (S_{\nu,\beta} \{\varphi(r)\}(\rho) &= \left(\frac{2}{\rho}\right)^\beta \int_0^\infty r^{1-\beta} \varphi(r) J_{2\nu+\beta}(\rho r) dr \end{aligned} \quad (2.7)$$

Обращая соотношения (2.7), получаем

$$\begin{aligned} u_n(r) &= (2\mu)^{-1} (1 - \nu_0) r S_{(N-1)/2,1} \{(1 + G) \Psi_n\}(r) \\ \Psi_n(\rho) &= S_{N/2,0} \{\sigma_n(r)\}(\rho), \quad \nu_0 = \nu(0) \\ 1 + G(\rho) &= [2(1 - \nu_0)\rho L(\rho)]^{-1}, \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} G(\rho) = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

причем, очевидно,

$$\sigma_n(r) = S_{N/2,0} \{\Psi_n(\rho)\}(r) \quad (2.9)$$

Переходя во втором и в третьем граничных условиях (1.2) к полярным координатам и подставляя в них представления (2.6) при учете соотношений (2.8) и (2.9), приходим к системе парных интегральных уравнений относительно вспомогательных функций $\Psi_n(\rho)$

$$\begin{aligned} S_{(N-1)/2,1} \{[1 + G(\rho)] \Psi_n(\rho)\}(r) &= f_n^*(r), \quad 0 \leq r < a \\ S_{N/2,0} \{\Psi_n(\rho)\}(r) &= 0, \quad a < r < \infty \\ f_n^*(r) &= 2\mu [(1 - \nu_0) r]^{-1} f_n(r) \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$f_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\delta + \varepsilon_1 r \cos \varphi + \varepsilon_2 r \sin \varphi - f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)] e^{-in\varphi} d\varphi$$

Подставляя в (2.10) представление

$$\Psi_n(\rho) = 2\mu \pi^{-1/2} (1 - \nu_0)^{-1} S_{N/2,-1/2} \{x^{-1} g_n(x)\}(\rho) \quad (2.11)$$

находим, что $g_n(x) \equiv 0$ при $a < x$, а на отрезке $0 \leq x \leq a$ функции $g_n(x)$ удовлетворяют интегральным уравнениям Фредгольма второго рода

$$g_n(x) + x^{1/2} \int_0^a g_n(s) s^{1/2} ds \int_0^\infty G(t) J_{N-1/2}(xt) J_{N-1/2}(st) t dt = \\ = \frac{1}{x^N} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f_n(r) r^{N+1} dr}{(x^2 - r^2)^{1/2}} \quad (2.12)$$

Определяющие распределение контактного давления под штампом функции $\sigma_n(r)$ выражаются через вспомогательные функции $g_n(x)$ при помощи квадратур

$$\sigma_n(r) = - \frac{2\mu r^{N-1}}{\pi(1-\nu_0)} \frac{d}{dr} \int_r^a \frac{g_n(x) x^{1-N} dx}{(x^2 - r^2)^{1/2}}, \quad 0 \leq r < a \quad (2.13)$$

Вводя комплексный главный момент $M = M_2 + iM_1$ и переходя в уравнениях равновесия штампа (1.4) к полярным координатам, получаем

$$P = 2\pi \int_0^a \sigma_0(r) r dr = 4\mu(1-\nu_0)^{-1} \int_0^a g_0(x) dx \\ M = 2\pi \int_0^a \sigma_{-1}(r) r^2 dr = 8\mu(1-\nu_0)^{-1} \int_0^a g_{-1}(x) x dx \quad (2.14)$$

Таким образом, решение контактной задачи для кругового штампа с произвольной формой основания свелось к построению бесконечной последовательности функций $g_n(x)$, удовлетворяющих интегральным уравнениям Фредгольма второго рода (2.12) и уравнениям равновесия штампа (2.14). Для представляющих практический интерес форм основания штампа указанная последовательность обычно содержит лишь несколько отличных от нуля членов.

Далее ограничимся рассмотрением неосесимметричной задачи о внецентренном вдавливании кругового штампа с плоским основанием. В этом случае $f(x) = 0$ и

$$f_0(r) = \delta, \quad f_{\pm 1}(r) = 1/2 (\varepsilon_1 \mp i\varepsilon_2) r \\ f_n(r) = 0 \text{ при } |n| > 1 \quad (2.15)$$

Подставляя последнее соотношение (2.15) в (2.12), заключаем, что $g_n(x) = 0$ при $|n| > 1$, так что в данном случае отличны от нуля лишь функции $g_0(x)$ и $g_{\pm 1}(x)$.

Переходя в оставшихся интегральных уравнениях (2.12) к новым вспомогательным функциям

$$y_0(x) = \delta^{-1} g_0(x), \quad y_{\pm 1}(x) = (\varepsilon_1 \mp i\varepsilon_2)^{-1} g_{\pm 1}(x) \quad (2.16)$$

получаем

$$y_0(x) + \int_0^a K_0(x, s) y_0(s) ds = 1, \quad 0 \leq x \leq a \\ y_{\pm 1}(x) + \int_0^a K_{\pm 1}(x, s) y_{\pm 1}(s) ds = x, \quad 0 \leq x \leq a \quad (2.17)$$

$$\begin{Bmatrix} K_0(x, s) \\ K_{\pm 1}(x, s) \end{Bmatrix} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty G(t) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} xt \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} st dt$$

откуда, в частности, следует, что функции $y_{\pm 1}(x)$, в отличие от $g_{\pm 1}(x)$, равны между собой.

Подставляя (2.16) в (2.14), приходим к следующим формулам связи между параметрами перемещения штампа и величинами внешних нагрузок:

$$\delta = 2\theta Y_0^{-1}P, \quad \varepsilon_1 = \theta Y_1^{-1}M_2, \quad \varepsilon_2 = \theta Y_1^{-1}M_1 \quad (2.18)$$

$$\theta = (8\mu)^{-1}(1 - \nu_0), \quad Y_0 = \int_0^a y_0(x) dx, \quad Y_1 = \int_0^a y_1(x) x dx$$

Контактное давление под штампом в рассматриваемом случае принимает вид

$$\sigma(r, \varphi) = -\frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{P}{Y_0 r} \frac{d}{dr} \int_r^a \frac{y_0(x) x dx}{(x^2 - r^2)^{1/2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{M_2 \cos \varphi + M_1 \sin \varphi}{Y_1} \frac{d}{dr} \int_r^a \frac{y_1(x) dx}{(x^2 - r^2)^{1/2}} \right\}, \quad 0 \leq r < a \quad (2.19)$$

3. Известные точные решения пространственных контактных задач для неоднородного полупространства [8—12] относятся к случаю, когда упругие характеристики материала полупространства — монотонные функции глубины. Рассматриваемая в данной работе модель неоднородности позволяет получить аналитическое решение контактной задачи для периодического закона изменения упругих характеристик.

Пусть, к примеру,

$$\gamma(x_3) = b_1 + b_2 \cos b_3 x_3 \quad (3.1)$$

так что коэффициент Пуассона и модуль упругости — периодические функции глубины с периодом $T = 2\pi b_3^{-1}$. При этом

$$G(t) = \frac{b\lambda^2}{t^2 + \lambda^2}, \quad b = \frac{b_2}{b_1}, \quad \lambda^2 = \frac{\beta^2}{1+b}, \quad \beta^2 = \frac{b_3^2}{4} \quad (3.2)$$

и ядра интегральных уравнений (2.17) вычисляются в элементарных функциях, причем

$$K_0(x, s) = b\lambda \begin{cases} e^{-\lambda x} \operatorname{ch} \lambda s, & x \geq s \geq 0 \\ e^{-\lambda s} \operatorname{ch} \lambda x, & s \geq x \geq 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

а выражение для $K_1(x, s)$ соответствует замене в (3.3) ch на sh .

При учете (3.3) интегральное уравнение относительно функции $y_0(x)$ запишем в виде

$$y_0(x) = 1 - b\lambda e^{-\lambda x} \int_0^x y_0(s) \operatorname{ch} \lambda s ds - b\lambda \operatorname{ch} \lambda x \int_x^a y_0(s) e^{-\lambda s} ds \quad (3.4)$$

и, в частности,

$$y_0(0) = 1 - b\lambda \int_0^a y_0(s) e^{-\lambda s} ds \quad (3.5)$$

Дифференцируя равенство (3.4) по x , получаем

$$y_0'(0) = 0 \quad (3.6)$$

Дважды дифференцируя (3.4) по x , находим, что решение интегрального уравнения (3.4) удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$y_0''(x) - \beta^2 y_0(x) = -\lambda^2 \quad (3.7)$$

а также, как было установлено, начальным условиям (3.5) и (3.6).

Решение задачи Коши (3.5)—(3.7) имеет вид

$$y_0(x) = \frac{1}{1+b} \left(1 + \frac{b\lambda \operatorname{ch} \beta x}{\lambda \operatorname{ch} \beta a + \beta \operatorname{sh} \beta a} \right) \quad (3.8)$$

Аналогичным образом устанавливаем, что функция $y_1(x)$, а следовательно, и $y_{-1}(x)$, определяется формулой

$$y_1(x) = \frac{1}{1+b} \left[x + \frac{b(1+\lambda a) \operatorname{sh} \beta x}{\lambda \operatorname{sh} \beta a + \beta \operatorname{ch} \beta a} \right] \quad (3.9)$$

Подставляя соотношения (3.8) и (3.9) в (2.18), получаем следующие представления для параметров перемещения штампа:

$$\delta = \delta^\circ [1 + \zeta(b, \kappa)], \quad \varepsilon_\alpha = \varepsilon_\alpha^\circ [1 + \xi(b, \kappa)], \quad \alpha = 1, 2 \quad (3.10)$$

$$\delta^\circ = \frac{(1-\nu_0)P}{4\mu a}, \quad \varepsilon_1^\circ = \frac{3(1-\nu_0)M_2}{8\mu a^3}, \quad \varepsilon_2^\circ = \frac{3(1-\nu_0)M_1}{8\mu a^3}$$

$$\zeta = b \frac{\kappa + (\kappa g - 1) \operatorname{th} \kappa}{\kappa + (\kappa g + b) \operatorname{th} \kappa}$$

$$\xi = b \frac{\kappa(\kappa^2 g - 3h) + (\kappa^3 + 3h) \operatorname{th} \kappa}{\kappa(\kappa^2 g + 3bh) + (\kappa^3 - 3bh) \operatorname{th} \kappa}$$

$$\kappa = \beta a = 1/2 ab_3, \quad g = (1+b)^{1/2}, \quad h = \kappa + g$$

где δ° и ε_α° — параметры перемещения штампа для однородного полупространства с коэффициентом Пуассона $\nu = \nu_0$. Таким образом, величины ζ и ξ , зависящие от двух безразмерных параметров b и κ , характеризуют влияние неоднородности упругого материала на параметры перемещения штампа. Можно убедиться, что при $b = 0$ или при $\kappa = 0$ (эти значения соответствуют однородному материалу) $\zeta = \xi = 0$.

Установим области допустимых значений параметров b и κ . Так как фигурирующая в (3.1) функция $\cos b_3 x_3$ четна, то без потери общности можно положить $b_3 \geq 0$. Следовательно, область допустимых значений параметра κ — полуось $[0, +\infty)$. Диапазон изменения параметра b определяется интервалом допустимых значений функции $\nu(x_3)$. В частности, если $0 \leq \nu(x_3) \leq 1/2$ (эти ограничения имеют место для большинства природных и конструкционных материалов), то

$$(2\nu_0 - 1)(3 - 2\nu_0)^{-1} \leq b \leq \nu_0(2 - \nu_0)^{-1}$$

В этом случае область допустимых значений параметра b — отрезок $[-1/3, 1/3]$. Вообще говоря, диапазон изменения параметра b может быть более широким, так как существуют материалы с отрицательным значением коэффициента Пуассона [13].

Особый интерес представляет исследование поведения параметров перемещения штампа при $\kappa \rightarrow \infty$ (что при фиксированном значении a эквивалентно случаю $b_3 \rightarrow \infty$), когда функции $\nu(x_3)$ и $E(x_3)$ становятся быстроосциллирующими и их период $T \rightarrow 0$. Выполняя указанный предельный переход в (3.10), находим

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \delta = \delta^\circ(1+b), \quad \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \varepsilon_\alpha = \varepsilon_\alpha^\circ(1+b) \quad (3.11)$$

где были учтены соотношения $\zeta(b, \infty) = \xi(b, \infty) = b$.

Введем в рассмотрение однородное упругое полупространство с постоянными модулем сдвига μ и коэффициентом Пуассона ν^* , обозначив соответствующие значения параметров перемещения штампа через δ^* и ε_α^* (эти значения получаются из выражений для δ° и ε_α° при замене ν_0 на ν^*). Если положить $\nu^* = \nu_0 - b(1 - \nu_0)$, то на основании (3.11) получаем

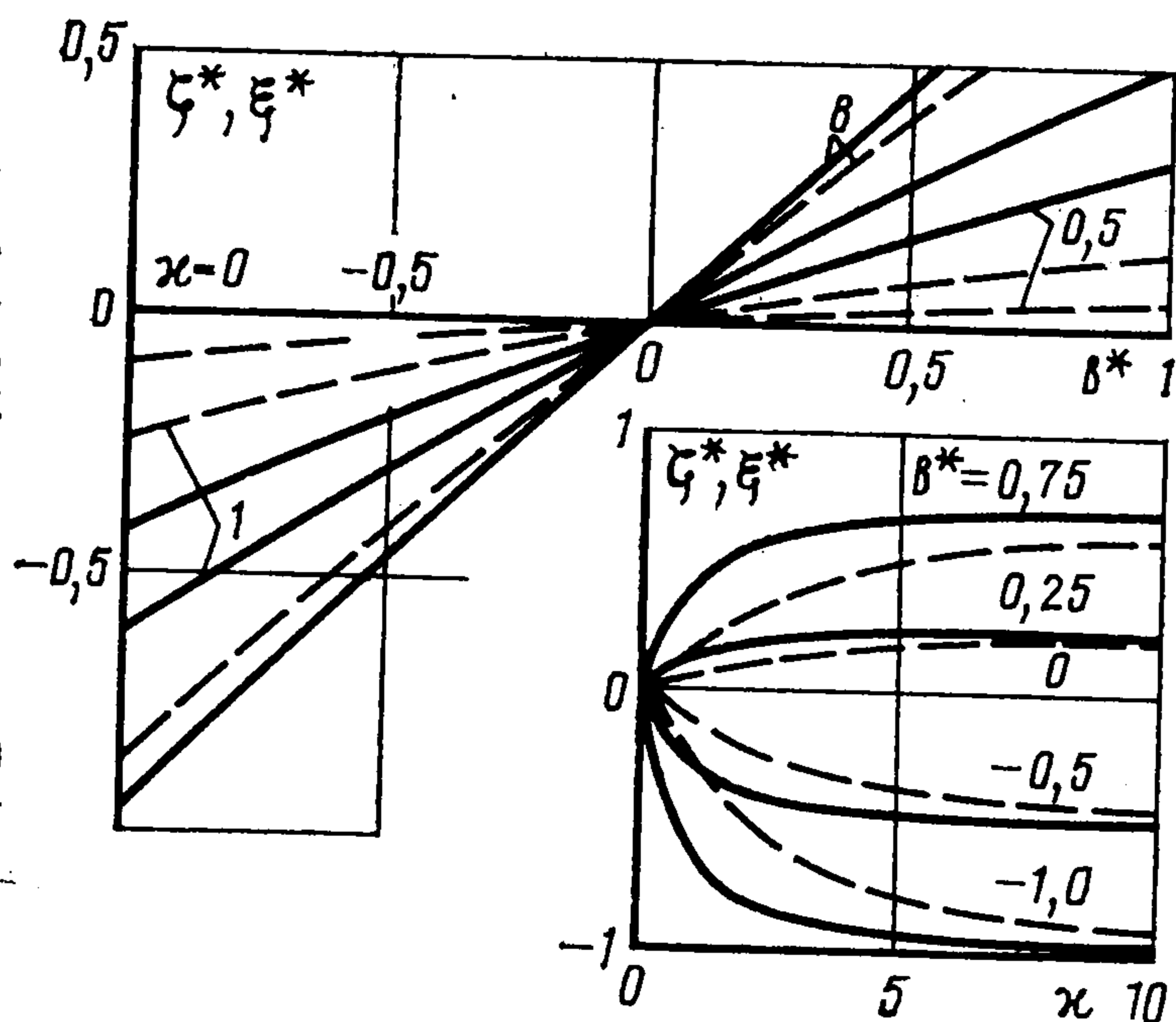
$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \delta = \delta^*, \quad \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \varepsilon_\alpha = \varepsilon_\alpha^* \quad (3.12)$$

Следовательно, с ростом параметра κ перемещения штампа на неоднородном полупространстве с коэффициентом Пуассона (3.1) стремятся к соответствующим значениям для однородного полупространства с коэффициентом Пуассона ν^* . Величину ν^* можно следующим образом выразить через среднее значение функции $\gamma(x_3)$ по периоду:

$$\nu^* = 1 - \frac{1}{\langle \gamma(x_3) \rangle}, \quad \langle \gamma(x_3) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \gamma(x_3) dx_3$$

откуда, в частности, видно, что $\nu^* \in [0, 1/2]$ при $0 \leq \nu(x_3) \leq 1/2$.

На фигуре приведены зависимости $\zeta^* = 3\zeta$ (сплошные линии) и $\xi^* = 3\xi$ (штриховые) от κ при фиксированных значениях $b^* = 3b$ и от b^*



при фиксированных значениях κ . Заметим, что $|\zeta|$ и $|\xi|$ монотонно возрастают с ростом κ и достаточно быстро приближаются к предельным значениям, равным $|b|$. Зависимости ζ и ξ от b близки к линейным; строго линейные зависимости получаются при $\kappa = \infty$, когда $\zeta = \xi = b$.

4. В заключение укажем более общий класс периодических моделей неоднородности упругого материала, для которого возможно получение аналитических решений рассматриваемой несимметричной контактной задачи.

Пусть (как и ранее, $\mu = \text{const}$)

$$\gamma(x_3) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m a_k \cos \frac{k\pi x_3}{H_k} \quad (4.1)$$

где a_k и H_k — некоторые постоянные. При $m = 1$ из (4.1) в качестве частного случая (с точностью до обозначений) получается закон (3.1). Если рассматривать (4.1) как отрезок ряда Фурье по косинусам, определяющего функцию $\gamma(x_3)$ на интервале $[0, H]$ (в этом случае $H_k = H$ при $k = 1, 2, \dots, m$), то

$$a_k = \frac{2}{H} \int_0^H \gamma(x_3) \cos \frac{k\pi x_3}{H} dx_3$$

Для закона (4.1)

$$G(t) = \sum_{k=1}^m \frac{G_k}{t^2 + g_k^2}$$

где постоянные G_k и g_k выражаются через a_k и H_k , так что ядра интегральных уравнений (2.17) представляются суммами (содержащими по m чле-

нов) ядер типа (3.3). Получаемые при этом интегральные уравнения приводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям порядка $2m$, которые допускают построение аналитических решений. Связанные с реализацией указанного подхода вычисления становятся более громоздкими и здесь не приводятся, описание метода решения такого рода уравнений содержится в [14, 15].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gibson R. E., Sills G. C.* On the loaded elastic half-space with a depth varying Poisson's ratio // *Z. angew. Math. und Phys.* 1969. В. 20. Н. 5. S. 691—695.
2. *Плевако В. П.* Двумерная обратная задача теории упругости неоднородных сред в полярных координатах // *ПММ.* 1985. Т. 49. Вып. 5. С. 775—783.
3. *Бородачев А. Н., Дудинский В. И.* Контактная задача для упругого полупространства с переменным коэффициентом Пуассона // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1986. № 1. С. 86—91.
4. *Бородачев А. Н.* Об одном обобщении преобразования Нахди — Хсу и его применении к задачам теории упругости // *ПММ.* 1987. Т. 51. Вып. 4. С. 611—615.
5. *Gurtin M. E.* The linear theory of elasticity // *Handbuch Phys. B.* Springer, 1972. V. VIa/2. P. 1—295.
6. *Ломакин В. А.* Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во МГУ, 1976. 367 с.
7. *Davies B.* Integral transforms and their applications. N. Y.: Springer, 1978. 410 p.
8. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 341 с.
9. Развитие теории контактных задач в СССР / Под ред. Л. А. Галина. М.: Наука, 1976. 493 с.
10. *Рвачев В. Л., Проценко В. С.* Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. Киев: Наук. думка, 1977. 236 с.
11. *Бородачев А. Н.* Об одном методе решения двумерного интегрального уравнения первого рода со степенным ядром и его применении к контактным задачам // *ПММ.* 1984. Т. 48. Вып. 5. С. 839—844.
12. *Gladwell G. M. L.* Contact problems in the classical theory of elasticity // *Alphen an den Rijn. Germanzown: Sijthoff and Noordhoff,* 1980. 716 p.
13. *Bathurst R. J., Rothenburg L.* Note on a random isotropic granular material with negative Poisson's ratio // *Intern. J. Eng. Sci.* 1988. V. 26. № 4. P. 373—383.
14. *Anderssen R. S., De Hoog F. R., Rose L. R. F.* Explicit solutions for a class of dual integral equations // *Proc. Roy. Soc. Edinburgh.* 1982. V. A91. № 3—4. P. 277—285.
15. *Партон В. З., Морозов Е. М.* Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1985. 504 с.

Киев

Поступила в редакцию
13.II.1989