

УДК 539.375

© 1990 г.

н. В. Мовчан, С. А. Назаров

## О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ И ВБЛИЗИ ВЕРШИН КОНУСОВ

Изучается асимптотика напряженно-деформированного состояния вблизи вершины включения или полости, имеющих форму острого конуса. Направляющей конической поверхности служит произвольный простой замкнутый контур на плоскости, ограничивающий множество  $g_\varepsilon$  малого диаметра  $\varepsilon$ . Вычисляется главный член асимптотики  $\varepsilon^2 \Lambda_2 + O(\varepsilon^3)$  показателя сингулярностей напряжений; рассматриваются примеры. Исследуется задача об осесимметричной деформации упругого полупространства с тонкой конической выемкой.

1. Острое коническое включение и выемка. Обозначим через  $k_\varepsilon$  тонкий конус  $\{x \in \mathbb{R}^3: x_3 > 0, \varepsilon^{-1} x_3^{-1} x' \in g, x' = (x_1, x_2)\}$ , где  $\varepsilon$  — малый положительный параметр,  $g$  — область на плоскости, ограниченная простым гладким контуром  $\partial g$ . Будем считать, что конусы  $k_\varepsilon$  и  $K_\varepsilon = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{k}_\varepsilon$  заполнены упругими изотропными материалами с постоянными Ламе  $\lambda^\circ, \mu^\circ$  и  $\lambda, \mu$  соответственно, а контакт материалов идеальный (без отслоя и проскальзывания). Известно, что поведение напряженно-деформированного состояния вблизи конической точки  $O$  определяется собственными числами и векторами некоторой задачи на собственные значения в области, вырезаемой конусом на единичной сфере  $S$ . Введем сферические координаты  $(\rho, \theta, \varphi)$ , где  $\rho = |x|$ ,  $\theta \in [0, \pi]$  — широта,  $\varphi \in [0, 2\pi)$  — долгота, и обозначим через  $\rho^{-2} Q(\theta, \varphi, \rho \partial / \partial \rho, \partial / \partial \theta, \partial / \partial \varphi)$  матричный оператор системы Ламе. В аналогичном виде  $\rho^{-1} P(\theta, \varphi, \rho \partial / \partial \rho, \partial / \partial \theta, \partial / \partial \varphi)$  запишем вектор нормальных напряжений к поверхности  $\partial K_\varepsilon$ ; здесь  $u$  — вектор смещений. (Для сокращения обозначений всюду далее аргументы  $\theta, \varphi$  и  $\partial / \partial \theta, \partial / \partial \varphi$  указываться не будут.) Пусть еще  $g_\varepsilon^\circ$  — множество, вырезаемое конусом  $k_\varepsilon$  на сфере  $S$ . Упомянутая задача с комплексным спектральным параметром  $\Lambda(\varepsilon)$  имеет вид

$$Q(\Lambda(\varepsilon)) v = 0 \text{ на } S \setminus g_\varepsilon^\circ \quad (1.1)$$

$$Q^\circ(\Lambda(\varepsilon)) v^\circ = 0 \text{ на } g_\varepsilon^\circ \quad (1.2)$$

$$v = v^\circ, P(\Lambda(\varepsilon)) v = P^\circ(\Lambda(\varepsilon)) v^\circ \text{ на } \partial g_\varepsilon^\circ \quad (1.3)$$

Все величины, относящиеся к включению  $k_\varepsilon$ , снабжены символом  $^\circ$ .

В асимптотическое разложение смещений  $u, u_0$  вблизи конической точки входят специальные вектор-функции  $\rho^{\Lambda(\varepsilon)} V(\varepsilon, \theta, \varphi, \ln \rho), \rho^{\Lambda(\varepsilon)} V^\circ(\varepsilon, \theta, \varphi, \ln \rho)$ , где  $V$  и  $V^\circ$  — полиномы от переменной  $\ln \rho$ , коэффициентами которых являются собственные и присоединенные векторы задачи (1.1) — (1.3), отвечающие собственному числу  $\Lambda(\varepsilon)$ . Подчеркнем, что точные ответы (трансцендентные уравнения для показателей) известны лишь для осесимметричной задачи в случае кругового конического включения или полости [1—7]; упомянутое трансцендентное уравнение требует численного решения — таблицы значений показателя сингулярности можно найти в [1, 4—7].

Для определения асимптотики при  $\varepsilon \rightarrow 0$  нескольких первых положительных собственных чисел задачи (1.1)–(1.3) используем алгоритм [8].

При  $\varepsilon \rightarrow 0$  область  $g_\varepsilon^\circ$  в пределе исчезает и задача (1.1) – (1.3) трансформируется в систему уравнений на сфере  $S$  без отверстия

$$Q(\Lambda_0)\Phi = 0 \quad (1.4)$$

(при этом уравнения (1.2), (1.3) не учитываются). Нетрудно перечислить все решения спектральной задачи (1.4): собственные числа  $\Lambda_0$  – целые, а векторы  $\Phi$  – следы на  $S$  однородных векторных полиномов  $V^{(m,j)}$  ( $m = 0, 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots, 3$  ( $2m + 1$ )) степени  $m$ , удовлетворяющих системе Ламе, или следы полей  $V^{(1,j)}(\partial/\partial x)T(x)$ , где  $T$  – тензор Сомильяны. Поскольку рассматриваются решения с конечной упругой энергией, то в асимптотику могут входить лишь специальные решения, в которых  $\Lambda(\varepsilon) > -1/2$ . Поэтому изучим возмущения лишь двух первых собственных чисел  $\Lambda_0 = 0$  и  $\Lambda_0 = 1$  системы (1.4). Так как векторы  $V^{(0,j)}$  ( $j = 1, 2, 3$ ) соответствуют жестким поступательным смещениям, они удовлетворяют и задаче (1.1)–(1.3),  $\Lambda(\varepsilon) = 0$ . Векторные полиномы  $V^{(1,j)}$  первой степени имеют вид

$$V^{(1,1)}(x) = (x_1, 0, 0), \quad V^{(1,2)}(x) = (0, x_2, 0), \quad V^{(1,3)}(x) = (0, 0, x_3), \quad (1.5)$$

$$V^{(1,4)}(x) = 2^{-1/2}(x_2, x_1, 0), \quad V^{(1,5)}(x) = 2^{-1/2}(0, x_3, x_2), \quad V^{(1,6)}(x) = \\ = 2^{-1/2}(x_3, 0, x_1)$$

$$V^{(1,7)}(x) = 2^{-1/2}(x_2, -x_1, 0), \quad V^{(1,8)}(x) = 2^{-1/2}(0, x_3, -x_2) \quad (1.6)$$

$$V^{(1,9)}(x) = 2^{-1/2}(-x_3, 0, x_1)$$

Для следов  $\Phi^{(1,j)}$  поворотов (1.6) верны уравнения (1.1), (1.2), а значит, и в этом случае собственное число  $\Lambda_0 = 1$  не возмущается. Следы  $\Phi^{(1,j)}$  ( $j = 1, 2, \dots, 6$ ) полей (1.5) на сфере  $S$  оставляют невязки в условиях сопряжения (1.3). Отметим, что напряжения  $\sigma_{jk}^{(i)} = \sigma_{jk}(V^{(1,i)})$  вычисляются по следующим формулам:

$$\sigma_{ii}^{(i)} = 2\mu + \lambda; \quad \sigma_{ii}^{(j)} = \lambda, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3;$$

$$\sigma_{12}^{(4)} = \sigma_{23}^{(5)} = \sigma_{13}^{(6)} = \sqrt{2}\mu \quad (1.7)$$

Компоненты, равные нулю, не указываются; аналогичные выражения имеют место во включении.

Итак, в качестве основного приближения к решению задачи (1.1)–(1.3) возьмем число  $\Lambda_0 = 1$  и линейные комбинации с коэффициентами  $c_j, c_j^\circ$ , подлежащими определению,

$$\Phi(\theta, \varphi) = \sum_{j=1}^9 c_j \Phi^{(1,j)}(\theta, \varphi), \quad \Phi^\circ(\theta, \varphi) = \sum_{j=1}^9 c_j^\circ \Phi^{(1,j)}(\theta, \varphi) \quad (1.8)$$

2. Пограничный слой вблизи  $g_\varepsilon^\circ$ . На сфере  $S$  в окрестности северного полюса  $N = (0, 0, 1)$  введем координаты  $\eta = (\eta_1, \eta_2) = x_3^{-1}x'$  и «растянутые» координаты  $\xi = \varepsilon^{-1}\eta$ . Так как вектор единичной нормали  $n$  на  $\partial k_\varepsilon$  равен  $(1 + \varepsilon^2(\xi \cdot v)^2)^{-1/2}(v_1, v_2, -\varepsilon\xi \cdot v)$ , где  $v(\xi)$  – вектор внутренней единичной нормали к  $\partial g$  на плоскости, то справедливы равенства

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(\rho^{1+O(\varepsilon^2)}\Psi(\xi))\Big|_{|x|=1} = \varepsilon^{-2}L_0\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)\Psi(\xi) + \varepsilon^{-1}L_1\left(\xi, \frac{\partial}{\partial \xi}\right)\Psi(\xi) + O(1) \quad (2.1)$$

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(\rho^{1+O(\varepsilon^2)}\Psi(\xi))\Big|_{|x|=1} = \varepsilon^{-1}B_0\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)\Psi(\xi) + B_1\left(\xi, \frac{\partial}{\partial \xi}\right)\Psi(\xi) + O(\varepsilon) \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned}
L_0^{11}(\zeta_1, \zeta_2) &= (\lambda + 2\mu) \zeta_1^2 + \mu \zeta_2^2, L_0^{12}(\zeta_1, \zeta_2) = L_0^{21}(\zeta_1, \zeta_2) = \\
&= (\lambda + \mu) \zeta_1 \zeta_2, L_0^{22}(\zeta_1, \zeta_2) = (\lambda + 2\mu) \zeta_2^2 + \mu \zeta_1^2 \\
L_0^{33}(\zeta_1, \zeta_2) &= \mu (\zeta_1^2 + \zeta_2^2), L_1^{13}(\xi_1, \xi_2; \zeta_1, \zeta_2) = \\
&= L_1^{31}(\xi_1, \xi_2; \zeta_1, \zeta_2) = -(\lambda + \mu) (\xi_1 \zeta_1^2 + \xi_2 \zeta_1 \zeta_2) \\
L_1^{23}(\xi_1, \xi_2; \zeta_1, \zeta_2) &= L_1^{32}(\xi_1, \xi_2; \zeta_1, \zeta_2) = -(\lambda + \\
&+ \mu) (\xi_1 \zeta_1 \zeta_2 + \xi_2 \zeta_2^2), B_0^{11}(\xi; \zeta_1, \zeta_2) = \\
&= (\lambda + 2\mu) \nu_1 \zeta_1 + \mu \nu_2 \zeta_2, B_0^{22}(\xi; \zeta_1, \zeta_2) = \\
&= \mu \nu_1 \zeta_1 + (\lambda + 2\mu) \nu_2 \zeta_2, B_0^{12}(\xi; \zeta_1, \zeta_2) = \\
&= \lambda \nu_1 \zeta_2 + \mu \nu_2 \zeta_1, B_0^{21}(\xi; \zeta_1, \zeta_2) = \mu \nu_1 \zeta_2 + \\
&+ \lambda \nu_2 \zeta_1, B_0^{33}(\xi; \zeta_1, \zeta_2) = \mu (\nu_1 \zeta_1 + \nu_2 \zeta_2) \\
B_1^{j3}(\xi_1, \xi_2; \zeta_1, \zeta_2) &= -\lambda \nu_j (\xi_1 \zeta_1 + \xi_2 \zeta_2 - 1) - \\
&- \mu \xi \cdot \nu \zeta_j, B_1^{3j}(\xi_1, \xi_2; \zeta_1, \zeta_2) = -\mu \nu_j (\xi_1 \zeta_1 + \\
&+ \xi_2 \zeta_2 - 1) - \lambda \xi \cdot \nu \zeta_j, j = 1, 2; \nu = (\nu_1(\xi), \nu_2(\xi))
\end{aligned} \tag{2.3}$$

В качестве главного члена пограничного слоя возьмем векторы  $\varepsilon w^{(1)}(\xi)$ ,  $\varepsilon w^{(1)}(\xi)$ . Найдем задачу, которой они удовлетворяют. В координатах  $\xi$  область  $g_\varepsilon^0 \subset S$  совпадает с областью  $g \in \mathbb{R}^2$ . Поэтому системы уравнений для  $w^{(1)}$  и  $w^{(1)}$  в  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{g}$  и  $g$  соответственно определяются при помощи соотношений (2.1). Для того чтобы вывести условия сопряжения на  $\partial g$ , необходимо учесть соотношения (2.2) и невязки, оставленные величинами (1.8) во втором из условий (1.3). Последние вычисляются с использованием формул (1.7). Окончательно получаем задачу

$$L_0 \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \right) w^{(1)}(\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{g}, \quad L_0^\circ \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \right) w^{(1)}(\xi) = 0, \quad \xi \in g \tag{2.4}$$

$$B_0 \left( \xi, \frac{\partial}{\partial \xi} \right) w^{(1)}(\xi) - B_0^\circ \left( \xi, \frac{\partial}{\partial \xi} \right) w^{(1)}(\xi) = - \sum_{j=1}^6 c_j \Psi^{(j)}(\xi) \tag{2.5}$$

$$w^{(1)}(\xi) = w^{(1)}(\xi), \quad \xi \in \partial g$$

$$\Psi^{(1)}(\xi) = ((\lambda + 2\mu - \lambda^\circ - 2\mu^\circ) \nu_1, (\lambda - \lambda^\circ) \nu_2, 0)$$

$$\Psi^{(2)}(\xi) = ((\lambda - \lambda^\circ) \nu_1, (\lambda + 2\mu - \lambda^\circ - 2\mu^\circ) \nu_2, 0)$$

$$\Psi^{(3)}(\xi) = (\lambda - \lambda^\circ) (\nu_1, \nu_2, 0), \quad \Psi^{(4)}(\xi) = 2^{1/2} (\mu - \mu^\circ) (\nu_2, \nu_1, 0)$$

$$\Psi^{(5)}(\xi) = 2^{1/2} (\mu - \mu^\circ) (0, 0, \nu_2), \quad \Psi^{(6)}(\xi) = 2^{1/2} (\mu - \mu^\circ) (0, 0, \nu_1) \tag{2.6}$$

Согласно (2.3) краевая задача (2.4), (2.5) распадается на две: плоскую задачу теории упругости (первые строки) и задачу об антиплоском сдвиге (третья строка). Поскольку средние на  $\partial g$  величины (2.6) равны нулю, то существует исчезающее на бесконечности решение  $w^{(1)}$  задачи (2.4), (2.5). Справедливы асимптотические формулы [9]

$$w^{(1)}(\xi) = Y^{(1)}(\xi) + O(|\xi|^{-2}) = \sum_{j=1}^6 c_j \sum_{i=1}^5 \alpha_i^{(j)} W^{(i)}(\partial/\partial \xi) \Gamma(\xi) + O(|\xi|^{-2}),$$

$$|\xi| \rightarrow \infty; \quad W^{(1)}(\xi) = (\xi_1, 0, 0), \quad W^{(2)}(\xi) = (0, \xi_2, 0), \tag{2.7}$$

$$W^{(3)}(\xi) = 2^{-1/2} (\xi_2, \xi_1, 0), \quad W^{(4)}(\xi) = (0, 0, \xi_1), \quad W^{(5)}(\xi) = (0, 0, \xi_2),$$

$$\Gamma(\xi) = \|\gamma_{ij}(\xi)\|_{i,j=1}^3$$

$$\gamma_{ij}(\xi) = [4\pi\mu(\lambda + 2\mu)]^{-1} (-\delta_{ij}(\lambda + 3\mu) \ln |\xi| + (\lambda + \mu) \xi_i \xi_j |\xi|^{-2}), \quad \gamma_{3j}(\xi) = \gamma_{j3}(\xi) = 0, \quad i, j = 1, 2$$

$$\gamma_{33}(\xi) = -(2\pi\mu)^{-1} \ln |\xi|$$

Коэффициенты  $\alpha_i^{(j)}$  выражаются через элементы матрицы упругой поляризации  $m = \| m_{ik} \|_{i,k=1}^5$ , составленной из множителей  $m_{ik}$  при  $W^{(i)}(\partial / \partial \xi) \Gamma(\xi)$  в асимптотическом представлении вида (2.7) специальных решений  $Z^{(i)}$  задачи (2.4), (2.5) с правыми частями

$$\begin{aligned} & ((\lambda^\circ + 2\mu^\circ - \lambda - 2\mu) v_1, (\lambda^\circ - \lambda) v_2, 0), ((\lambda - \lambda^\circ) v_1, \\ & (\lambda^\circ + 2\mu^\circ - \lambda - 2\mu) v_2, 0), 2^{1/2} (\mu^\circ - \mu) (v_2, v_1, 0) \\ & (\mu^\circ - \mu) (0, 0, v_1), (\mu^\circ - \mu) (0, 0, v_2) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Отметим, что матрица поляризации отрицательно (положительно) определена для достаточно мягких (жестких) включений ненулевого объема. Упомянутая связь  $\alpha_k^{(i)}$  и  $m_{jk}$  задается формулами

$$\begin{aligned} \alpha_k^{(j)} &= m_{jk}, \quad j = 1, 2; \quad \alpha_k^{(3)} = (\lambda - \lambda^\circ) [2(\mu - \mu^\circ + \lambda - \\ & - \lambda^\circ)]^{-1} (m_{1k} + m_{2k}), \quad \alpha_k^{(4)} = m_{3k}, \quad \alpha_k^{(j)} = 0, \quad j = 5, 6, \quad k = 1, 2, 3 \\ \alpha_4^{(j)} &= \alpha_5^{(j)} = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad \alpha_k^{(k+1)} = 2^{1/2} m_{45}, \quad k = 4, 5 \\ \alpha_4^{(6)} &= 2^{1/2} m_{44}, \quad \alpha_5^{(5)} = 2^{1/2} m_{55} \end{aligned}$$

В силу (2.7) компоненты вектора  $w^{(1)}$  убывают как  $O(|\xi|^{-1})$  и, значит, пограничный слой  $\varepsilon \chi(\theta) w^{(1)}(\varepsilon^{-1}\eta)$  оставляет в уравнении (1.1),  $\Lambda(\varepsilon) = 1$ , невязку  $O(\varepsilon^2)$ . (Здесь  $\chi$  — срезающая функция,  $\chi(\theta) = 1$  при  $\theta \in [0, \pi/6]$  и  $\chi(\theta) = 0$  при  $\theta \in [\pi/3, \pi]$ ; она введена из-за того, что пограничный слой задан лишь на верхней полусфере.) Таким образом, асимптотику решения задачи (1.1)–(1.3) следует искать в виде

$$\begin{aligned} \Lambda(\varepsilon) &\sim 1 + \varepsilon^2 \Lambda_2, \quad v(\varepsilon, \theta, \varphi) \sim \Phi(\theta, \varphi) + \\ &+ \varepsilon \chi(\theta) w^{(1)}(\varepsilon^{-1}\eta) + \varepsilon^2 \Phi^{(2)}(\theta, \varphi) + \varepsilon^2 \chi(\theta) w^2(\varepsilon^{-1}\eta) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Определим сначала второй член решения типа пограничного слоя. С учетом формул (2.1), (2.2) и (1.7) получаем, что вектор  $w^{(2)}$  — решение задачи

$$L_0 w^{(2)} + L_1 w^{(1)} = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^2 \setminus g \quad (2.10)$$

$$L_0^\circ w^{(2)} + L_1^\circ w^{(1)} = 0 \quad \text{в } g \quad (2.11)$$

$$w^{(2)} = w^\circ{}^{(2)}, \quad B_0 w^{(2)} - B_0^\circ w^\circ{}^{(2)} = B_1^\circ w^\circ{}^{(1)} - B_1 w^{(1)} + \sum_{j=1}^6 c_j \Psi^{(1,j)} \quad \text{на } \partial g \quad (2.12)$$

$$\Psi^{(1,1)}(\xi) = \Psi^{(1,2)}(\xi) = (0, 0, (\lambda - \lambda^\circ) \xi \cdot v) \quad (2.13)$$

$$\Psi^{(1,3)}(\xi) = (0, 0, (\lambda + 2\mu - \lambda^\circ - 2\mu^\circ) \xi \cdot v), \quad \Psi^{(1,4)}(\xi) = 0$$

$$\Psi^{(1,5)}(\xi) = 2^{1/2} (0, (\mu - \mu^\circ) \xi \cdot v, 0)$$

$$\Psi^{(1,6)}(\xi) = 2^{1/2} ((\mu - \mu^\circ) \xi \cdot v, 0, 0)$$

Изучим поведение поля  $w^{(2)}$  на бесконечности.

*Предложение 1.* Всякое решение  $w^{(2)}$  уравнения (2.10), допускающее оценку  $O(|\xi|^{-\delta})$  для  $\delta \in (0, 1)$ , имеет асимптотику

$$\begin{aligned} w^{(2)}(\xi) &= \Upsilon^{(2)}(\xi) + O(|\xi|^{-1}) = a\Gamma(\xi) + b + \Xi(\varphi) + O(|\xi|^{-1}) \quad (2.14) \\ \Xi(\xi) &= (\pi\mu)^{-1} (\Xi_1^\circ, \Xi_2^\circ, \Xi_3^\circ) \end{aligned}$$

$$\Xi_j^\circ(\xi) = \kappa^{-1} \sum_{k=5}^6 c_k \sum_{i=1}^2 \alpha_{3+i}^{(k)} \xi_i \xi_j |\xi|^{-2}, \quad j = 1, 2$$

$$\Xi_3^\circ(\xi) = (\kappa + 1)^{-1} \sum_{j=1}^4 c_j (\alpha_1^{(j)} \xi_1^2 |\xi|^{-2} + \alpha_2^{(j)} \xi_2^2 |\xi|^{-2} + 2^{1/2} \alpha_3^{(j)} \xi_1 \xi_2 |\xi|^{-2}),$$

$$\kappa = (\lambda + 3\mu)(\lambda + \mu)^{-1} \quad (2.15)$$

*Доказательство.* В силу (2.7)  $\Upsilon^{(1)}$  — однородная вектор-функция степени  $-1$ . Так как

$$\xi \cdot \nabla_{\xi} \partial / \partial \xi_j = \partial / \partial \xi_j |\xi| \partial / \partial |\xi| - \partial / \partial \xi_j$$

то согласно (2.3)

$$L_1(\xi; \partial / \partial \xi) \Upsilon^{(1)} = 2(\lambda + \mu) (\Upsilon_{3,1}^{(1)}, \Upsilon_{3,2}^{(1)}, \Upsilon_{1,1}^{(1)} + \Upsilon_{2,2}^{(1)}) + O(|\xi|^{-3}) = |\xi|^{-2} \Theta(\varphi) + O(|\xi|^{-3})$$

Здесь и далее индекс  $k$  после запятой означает дифференцирование по  $\xi_k$ .

Отыскивая частное решение уравнения  $L_0 \Xi = -|\xi|^{-2} \Theta$ , приходим к равенствам (2.15). Остается отметить, что  $L_0(a\Gamma + b) = 0$  при  $\xi \neq 0$ , а обоснование формулы (2.14) следует из результатов [9, 10].

Решение задачи (2.10)–(2.12) определено с точностью до постоянного вектора, и, значит, столбец  $b$  в (2.14) произволен. Далее удобно считать, что

$$b = -(\ln \varepsilon) (2\pi\mu)^{-1} (\kappa(\kappa + 1)^{-1} a_1, \kappa(\kappa + 1)^{-1} a_2, a_3)$$

При таком выборе  $b$  величина  $\Upsilon^{(2)}$ , записанная в координатах  $\eta = \varepsilon \xi$ , не зависит от параметра  $\varepsilon$ . Для того чтобы вычислить столбец  $a$ , воспользуемся методом [10].

*Предложение 2.* Справедливы равенства

$$\begin{aligned} a_k &= \sum_{j=1}^6 c_j \beta_k^{(j)}, \quad k = 1, 2, 3; \quad \beta_1^{(p)} = 4\mu(\lambda + 3\mu)^{-1} \alpha_4^{(p)} \\ \beta_2^{(p)} &= 4\mu(\lambda + 3\mu)^{-1} \alpha_5^{(p)}, \quad p = 5, 6; \quad \beta_3^{(j)} = (A + B)(\alpha_1^{(j)} + \\ &+ \alpha_2^{(j)}) + 2\delta_{j3} [(\lambda - \lambda^\circ)A - (\lambda + 2\mu - \lambda^\circ - 2\mu^\circ)] \times \\ &\times \text{mes}_2 g, \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad A = (\lambda - \lambda^\circ)(\lambda + \mu - \lambda^\circ - \\ &- \mu^\circ)^{-1}, \quad B = -(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)^{-1} \end{aligned} \quad (2.16)$$

*Доказательство.* Умножим скалярно систему (2.10), (2.14) на орты  $e^{(i)}$ , проинтегрируем по частям в круге  $D_R^2$  радиуса  $R$  и затем перейдем к пределу при  $R \rightarrow \infty$ . Имеем

$$\begin{aligned} &\int_{D_R^2 \setminus g} e^{(i)} \cdot (L_0 w^{(2)} + L_1 w^{(1)}) d\xi + \int_g e^{(i)} \cdot (L_0^\circ w^{(2)} + L_1^\circ w^{(1)}) d\xi = \\ &= \int_{\partial D_R^2} e^{(i)} \cdot (B_0 w^{(2)} + B_1 w^{(1)}) dl + \int_{\partial g} e^{(i)} \cdot \sum_{j=1}^6 c_j \Psi^{(1,j)} dl + 2I_i \quad (2.17) \\ &I_j = \mu R^{-1} \int_{\partial D_R^2} \xi_j w_3^{(1)} dl + (\mu - \mu^\circ) \int_{\partial g} w_3^{(1)} v_j dl, \quad j = 1, 2 \\ &I_3 = \sum_{j=1}^2 \left\{ \lambda R^{-1} \int_{\partial D_R^2} \xi_j w_j^{(1)} dl + (\lambda - \lambda^\circ) \int_{\partial g} w_j^{(1)} v_j dl \right\} \end{aligned}$$

Здесь  $B_0$  и  $B_1$  — операторы, заданные формулами (2.3) с заменой вектора нормали  $v$  на вектор  $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ . Для того чтобы вычислить первые два интеграла в правой части (2.17), заметим, что первый из них равен

$$\int_{\partial D_R^2} e^{(i)} \cdot B_0 a \Gamma dl + \int_{\partial D_R^2} e^{(i)} \cdot (B_0 \Xi + B_1 \Upsilon^{(1)}) dl + o(1) \quad (2.18)$$

причем

$$\int_{\partial D_R^2} e^{(i)} \cdot B_0 a \Gamma dl = - \int_{D_R^2} e^{(i)} \cdot a \delta(\xi) d\xi = -a_i, \quad \int_{\partial g} \xi_j v_k dl = -\delta_{jk} \text{mes}_2 g \quad (2.19)$$

Второй интеграл в правой части (2.18) находится прямыми вычислениями с использованием формул (2.15), (2.7), (2.3). При рассмотрении интегралов  $I_j$  необходимо выразить компоненты нормали через векторы  $(B_0 - B_0^\circ) \xi_j e^{(3)}$ ,  $(B_0 - B_0^\circ) \xi_j e^{(j)}$

( $j = 1, 2$ ), а затем воспользоваться формулой Бетти, асимптотическим разложением вектора  $w^{(1)}$  на бесконечности и преобразованиями типа (2.19). В результате приходим к соотношениям (2.16).

**3. Определение  $\Lambda_2$ .** Перейдем к вычислению величин  $\Phi^{(2)}$  и  $\Lambda_2$  из асимптотики (2.9). С точностью до младших членов оператор  $Q(1 + \varepsilon^2 \Lambda_2)$  совпадает с суммой  $Q(1) + \varepsilon^2 \Lambda_2 Q'(1)$ , где штрих означает производную по  $t$  абстрактной функции  $t \rightarrow Q(t)$ . Кроме того, из представления (2.1) вытекает, что вблизи  $N$  справедливо соотношение

$$Q(1) = L_0(\partial/\partial\eta) + L_1(\eta, \partial/\partial\eta) + L_2(\eta, \partial/\partial\eta) \quad (3.1)$$

Здесь  $L_2$  — матричный дифференциальный оператор, в котором коэффициенты при производных порядка  $k$  имеют порядок  $|\eta|^k$ . Учитывая невязку  $O(\varepsilon^2)$ , появляющуюся в системе (1.1) из-за наличия пограничного слоя, заключаем, что вектор  $\Phi^{(2)}$  и число  $\Lambda_2$  удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} Q(1)\Phi^{(2)} &= -\Lambda_2 Q'(1)\Phi - F \text{ на } S, \quad F = L_2 \chi \Gamma^{(1)} + \\ &+ (Q(1) - L_0) \chi \Gamma^{(2)} + [L_0 + L_1, \chi] \Gamma^{(1)} + [L_0, \chi] \Gamma^{(2)}, \\ [A, B] &= AB - BA \end{aligned} \quad (3.2)$$

Изучим векторное уравнение (3.2).

*Предложение 3.* Система  $Q(1)V = F_*$  на  $S$  разрешима в том и только в том случае, если верны равенства

$$\int_S F_* \cdot Y^{(1,j)} ds = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 9 \quad (3.3)$$

где  $Y^{(1,j)}$  — следы на сфере  $S$  полей  $V^{(1,j)}(\partial/\partial x)T(x)$ . Решение  $V$  определено с точностью до произвольного постоянного столбца  $c$ .

*Предложение 4.* Справедливы равенства

$$\int_S Y^{(1,k)} \cdot Q'(1)\Phi^{(1,j)} ds = -\delta_{jk}, \quad j, k = 1, 2, \dots, 9 \quad (3.4)$$

$$\int_S Y^{(1,j)} \cdot F ds = \sum_{k=1}^9 M_{jk} c_k, \quad j = 1, 2, \dots, 9 \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} M_{1j} &= q[-(2-\kappa)\alpha_1^{(j)} - \alpha_2^{(j)} + \beta_3^{(j)} + 2(\kappa+1)^{-1}(\alpha_1^{(j)} + \alpha_2^{(j)})] \\ M_{2j} &= q[-\alpha_1^{(j)} - (2-\kappa)\alpha_2^{(j)} + \beta_3^{(j)} + 2(\kappa+1)^{-1}(\alpha_1^{(j)} + \alpha_2^{(j)})] \\ M_{3j} &= -q(\kappa+1)\beta_3^{(j)}, \quad M_{4j} = -q(1-\kappa)\alpha_3^{(j)}, \quad j = 1, 2, 3, 4 \\ M_{5p} &= 2^{-1/2}q[(3+\kappa)\alpha_5^{(p)} + (1-\kappa)\beta_2^{(p)}], \quad M_{6p} = 2^{-1/2}q[(3 + \\ &+ \kappa)\alpha_4^{(p)} + (1-\kappa)\beta_1^{(p)}], \quad M_{8p} = -2^{-1/2}q(\kappa+1)[(2 + \lambda\mu^{-1}) \times \\ &\times \alpha_5^{(p)} + \beta_2^{(p)}], \quad M_{9p} = 2^{-1/2}q(\kappa+1)[(2 + \lambda\mu^{-1})\alpha_4^{(p)} + \\ &+ \beta_1^{(p)}], \quad p = 5, 6; \quad q = (\lambda + \mu)[8\lambda\mu(\lambda + 2\mu)]^{-1} \end{aligned} \quad (3.6)$$

*Доказательство.* Так как оператор системы Ламе формально самосопряжен, то  $Q^*(\Lambda) = Q(-1 - \bar{\Lambda})$ . Поэтому первое утверждение вытекает из сказанного в разд. 1 об однородных решениях системы Ламе.

Проверим формулу (3.4). Пусть  $\zeta$  — функция из  $C_0^\infty[0, 1]$ , равная единице вблизи нуля, и  $D_d^3$  — шар радиуса  $d$  с центром  $O$ . Согласно определению тензора Соммильяны имеем

$$\begin{aligned} &\int_{D_1^3} V^{(1,k)} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) T(x) \cdot L \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) (\zeta(\rho) V^{(1,j)}(x)) dx = \\ &= \int_{D_1^3} \zeta(\rho) V^{(1,j)}(x) \cdot L \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) V^{(1,k)} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) T(x) dx = V^{(1,k)}(\partial/\partial x) V^{(1,j)}(0) = \delta_{jk} \end{aligned} \quad (3.7)$$

С другой стороны, так как

$$Q\left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho}\right)(\rho \Phi^{(1,j)}) = \rho Q\left(1 + \rho \frac{\partial}{\partial \rho}\right)\Phi^{(1,j)}, \quad Q(\Lambda + 1) = Q(1) + \Lambda Q'(1) + 1/2 \Lambda^2 Q''(1)$$

то верна цепочка равенств, которая вместе с (3.7) дает (3.4) и

$$\int_{D_1^3} V^{(1, k)} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) T(\mathbf{x}) \cdot L \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) (\zeta(\rho) V^{(1, j)}(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = \lim_{d \rightarrow 0} \int_d^1 \int_S \rho^{-2} Y^{(1, k)}(\theta, \varphi) Q \times \\ \times Q \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) (\zeta(\rho) \rho \Phi^{(1, j)}(\theta, \varphi)) d\rho ds = \lim_{d \rightarrow 0} \int_d^1 \int_S \left( \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} Y^{(1, k)}(\theta, \varphi) Q'(1) \Phi^{(1, j)}(\theta, \varphi) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} Y^{(1, k)}(\theta, \varphi) Q''(1) \Phi^{(1, j)}(\theta, \varphi) + \frac{1}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} Y^{(1, k)}(\theta, \varphi) Q''(1) \Phi^{(1, j)}(\theta, \varphi) \right) d\rho ds = \\ = - \lim_{d \rightarrow 0} \zeta(d) \int_S Y^{(1, k)}(\theta, \varphi) Q'(1) \Phi^{(1, j)}(\theta, \varphi) ds = - \int_S Y^{(1, k)}(\theta, \varphi) \cdot Q'(1) \Phi^{(1, j)}(\theta, \varphi) ds$$

Остается заметить, что равенства (3.5) являются следствием соотношений, вытекающих из формулы (3.1) и предложения 3:

$$Q(1) (\chi(\theta) (\Gamma^{(1)}(\eta) + \Gamma^{(2)}(\eta))) = F(\eta) - \chi(\theta) \sum_{j=1}^6 c_j \times \\ \times \left( \sum_{i=1}^5 \alpha_i^{(j)} W^{(i)} \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \right) + \sum_{i=1}^3 (\beta_i^{(j)} + d_i^{(j)}) e^{(i)} \delta(\eta) \right) \\ d_i^{(p)} = -(\lambda + \mu) \mu^{-1} \alpha_{3+i}^{(p)}, \quad i = 1, 2, \quad p = 5, 6; \quad d_3^{(j)} = -(\lambda + \mu) (\lambda + 2\mu)^{-1} (\alpha_1^{(j)} + \alpha_2^{(j)}), \\ j = 1, 2, 3, 4 \\ \int_S \Gamma^{(1, k)} \cdot Q(1) (\chi \Gamma^{(1)} + \chi \Gamma^{(2)}) ds = 0$$

Из (3.4), (3.5) следует, что условия (3.3) разрешимости векторного уравнения (3.2) с правой частью  $F_* = -F - \Lambda_2 Q'(1) \Phi$  принимают вид системы линейных алгебраических уравнений со спектральным параметром, т. е.  $\Lambda_2$  — собственное число матрицы  $M$  с элементами (3.6), а вектор с коэффициентов линейных комбинаций (1.8) — соответствующий собственный столбец

$$Mc = \Lambda_2 c \quad (3.8)$$

Матрица  $M$  имеет блочную структуру. Собственные векторы  $e^{(7)}$ ,  $e^{(8)}$ ,  $e^{(9)}$ , орты в  $\mathbf{R}^9$ , и трехкратное собственное число  $\Lambda_2 = 0$  отвечают поворотам  $V^{(1,7)}$ ,  $V^{(1,8)}$ ,  $V^{(1,9)}$  (см. (1.6) и разд. 1). Блоки  $4 \times 4$  и  $2 \times 2$  матрицы  $M$  порождают еще две группы собственных чисел  $\Lambda_2^{(j)}$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) и  $\Lambda_2^{(k)}$  ( $k = 5, 6$ ).

1°. *Тонкая угловая в плане трещина.* Пусть конус  $K_\varepsilon$  образован удалением из пространства  $\mathbf{R}^3$  множества  $\{x: x_2 = 0, x_3 \geq 0, |x_1| \leq \varepsilon x_3\}$ . Соответствующее множество  $\bar{g}_\varepsilon^0$  на единичной сфере  $S$  является дугой большого круга с длиной  $2 \operatorname{arctg} \varepsilon$ . (Обращаем внимание на тот факт, что требование гладкости контура  $\partial g$  по существу нигде не использовалось.) Матрица поляризации для трещины состоит из двух блоков

$$- \frac{\pi(\lambda + 2\mu)}{2\mu(\lambda + \mu)} \begin{vmatrix} \lambda^2 & (\lambda + 2\mu)\lambda \\ (\lambda + 2\mu)\lambda & (\lambda + 2\mu)^2 \end{vmatrix}, \quad \operatorname{diag} \left( -\pi\mu \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}; 0; -\pi\mu \right)$$

Подставляя выражения для ее элементов в (3.6), находим, что

$$\Lambda_2^{(5)} = -\frac{2\lambda^2 + 9\mu\lambda + 5\mu^2}{4(\lambda + 2\mu)(\lambda + 3\mu)}, \quad \Lambda_2^{(6)} = 0$$

Кроме того, упоминавшийся ранее блок размеров  $4 \times 4$  и его собственные числа имеют вид

$$\frac{\mu^{-2}}{16} \begin{vmatrix} \lambda t_1 & \lambda t_2 & -\lambda t_3 & 0 \\ (\lambda + 2\mu) t_1 & (\lambda + 2\mu) t_2 & -(\lambda + 2\mu) t_3 & 0 \\ \lambda t_1 & \lambda t_2 & -\lambda t_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4\mu^3 (\lambda + \mu)^{-1} \end{vmatrix}$$

$$t_1 = 2\mu + \lambda(1 - \kappa), \quad t_2 = \frac{r(2\mu - \kappa)(\lambda + 2\mu) - \lambda}{\kappa}, \quad t_3 = 4(\lambda + \mu) - 2\lambda(\kappa + 1)$$

$$\Lambda_2^{(1)} = \Lambda_2^{(2)} = 0, \quad \Lambda_2^{(3)} = -1/4, \quad \Lambda_2^{(4)} = -\mu[4(\lambda + \mu)]^{-1}$$

Подчеркнем, что напряжения в задачах о растяжении на бесконечности пространства с узкой трещиной усилиями  $\sigma_{33}^\infty$ ,  $\sigma_{11}^\infty$  или  $\sigma_{13}^\infty$  постоянны, и следовательно, не имеют сингулярностей. Наконец,  $\Lambda_2^{(3)} < 0$  и  $\Lambda_2^{(4)} \in (-1/4, 0)$ ,  $\Lambda_2^{(5)} \in (-1/2, -5/24)$ .

2°. Пусть  $k_\varepsilon$  — круговой конус  $\{x: x_3 > 0, |x'| < \varepsilon x_3\}$ . Тогда  $g$  — единичный круг, а соответствующая матрица поляризации составлена из блоков

$$-\frac{\pi\lambda(1+2\mu)}{\mu} \begin{vmatrix} \lambda + \mu\kappa & \lambda + \mu(2 - \kappa) & 0 \\ \lambda + \mu(2 - \kappa) & \lambda + \mu\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu(\kappa - 1) \end{vmatrix}, \quad -2\pi\mu \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Четыре собственных числа матрицы  $M$  вычисляются по формулам

$$\Lambda_2^{(3)} = \Lambda_2^{(4)} = -\mu(\lambda + \mu)^{-1} \in (-1, 0), \quad \Lambda_2^{(5)} = \Lambda_2^{(6)} = -(2\lambda^2 + 9\mu\lambda + 5\mu^2) \times \\ \times [2(\lambda + 2\mu)(\lambda + 3\mu)]^{-1} \in (-1; -5/12)$$

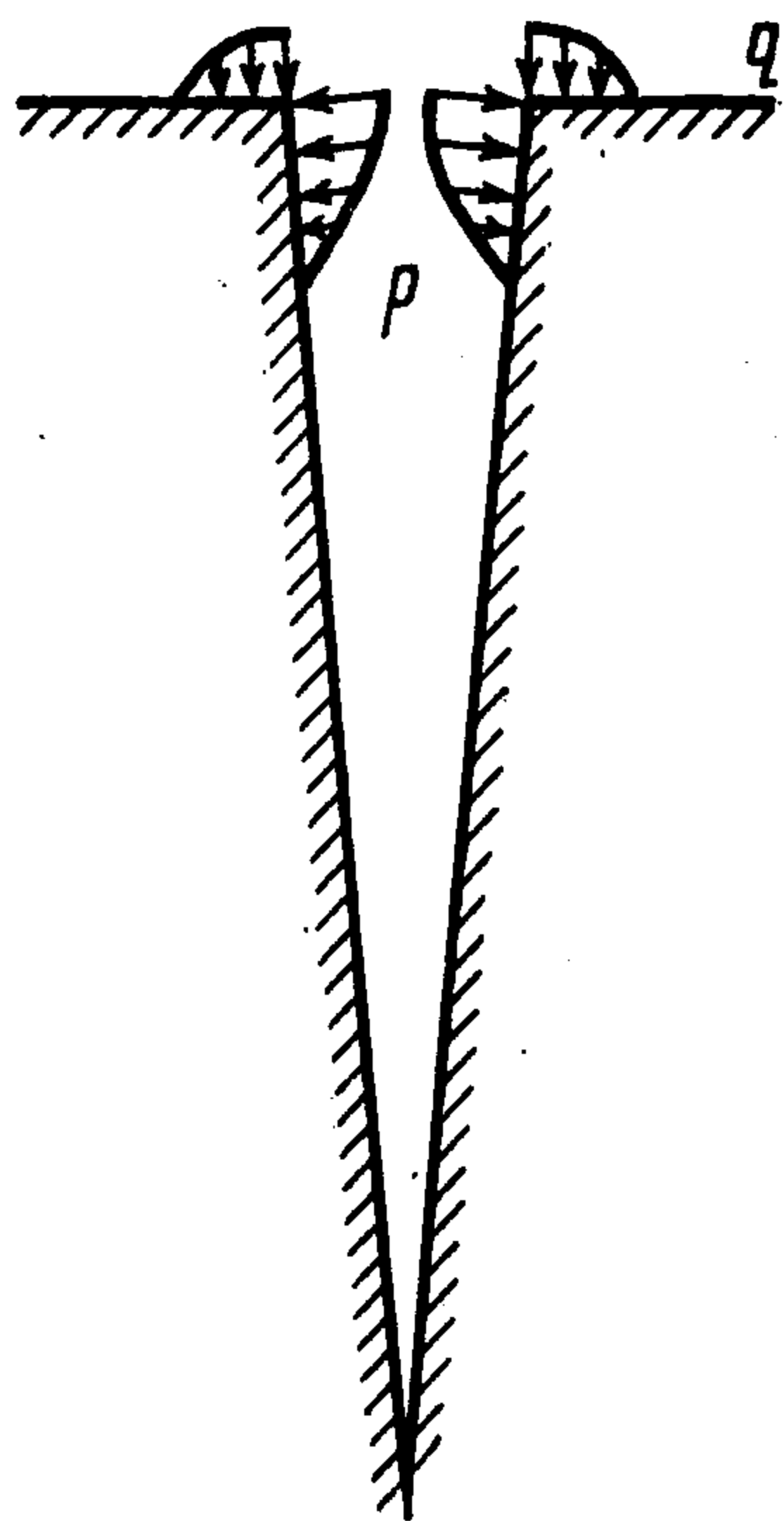
Они отвечают неосесимметричным решениям. Осесимметричные составляющие обладают особенностями  $\varepsilon^2 \Lambda_2^{(i)} + O(\varepsilon^3)$ ,  $i = 1, 2$ , где

$$\Lambda_2^{(1)} = 0, \quad \Lambda_2^{(2)} = -\frac{5\lambda^2 + 9\mu\lambda + 2\mu^2}{4(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)} \in \left(-\frac{5}{4}; -\frac{1}{4}\right) \quad (3.9)$$

Подчеркнем, что полученные асимптотические формулы (2.9), (3.9) согласуются с зоной  $\alpha \sim \pi$  на графике численного решения (см. [5], с. 962 и [1], с. 322).

Из приведенных формул, в частности, вытекает, что при неосесимметричном нагружении показатель сингулярности напряжений может иметь больший порядок, чем при осесимметричном.

Из-за появления дополнительного большого параметра все найденные представления для показателя сингулярности напряжений теряют асимптотический характер, в двух случаях  $\lambda \rightarrow +\infty$  или  $\mu \rightarrow +\infty$ , что соответствует несжимаемому материалу матрицы или абсолютно жесткому включению. Обе предельные ситуации допускают исследование в рамках асимптотической схемы, примененной в настоящей работе и в статье [8], но требуют отдельного рассмотрения.



Фиг. 1

#### 4. Коническая выемка в полупространстве.

Пусть  $k_\varepsilon$  — круговой конус  $\{x: \theta < \arcsin \varepsilon\}$ . Обозначим:  $\mathbf{R}_1^3$  — полупространство  $\{x: x_3 < 1\}$ ,  $\Omega_\varepsilon = \mathbf{R}_1^3 \setminus \bar{k}_\varepsilon$  — полупространство с конической выемкой. Рассмотрим задачу о деформации тела  $\Omega_\varepsilon$  под действием осесимметричных нормальных нагрузок  $p$  и  $q$ , приложенных на поверхности  $\partial\Omega_\varepsilon$  вблизи края выемки (фиг. 1). В окрестности точки  $N$  введем координаты  $y = (y_1, y_2, y_3)$ , где  $y_j = \varepsilon^{-1} z^{-1} x_j$ ,  $j = 1, 2$ ;  $y_3 = \varepsilon^{-1}(z - 1)$ . Допустим, что на поверхности  $\{x: z = 1\}$  действует усилие  $q(\varepsilon, x) = \varepsilon^{-2} q_0(r_y)$ , а на  $\partial k_\varepsilon \cap \mathbf{R}_1^3$  —

нагрузка с интенсивностью  $p(\varepsilon, x) = \varepsilon^{-3} p_0(y_3)$ ; здесь  $r_y = (y_1^2 + y_2^2)^{1/2}$ ;  $q_0, p_0$  — финитные функции (не исключается случай сосредоточенной нагрузки, когда  $p_0$  или  $q_0$  пропорциональны  $\delta$ -функции Дирака). После перехода к  $\varepsilon = 0$  в координатах  $y$  окрестность зоны действия сил трансформируется в полупространство с вырезанным цилиндром  $S = D_1^2 \times \mathbf{R}^1$ , где  $D_1^2 = \{(y_1, y_2): r_y < 1\}$  — единичный круг.

Предположим, что массовые силы отсутствуют, т. е. вектор смещений  $u$  удовлетворяет однородной системе Ламе. В силу осевой симметрии задачи  $u_\varphi = 0$  и  $\sigma_{\varphi r}(u) = \sigma_{\varphi z}(u) = 0$  ( $(r, \varphi, z)$  — цилиндрические координаты,  $\varphi \in [0, 2\pi)$ ). Краевые условия на поверхности  $\partial k_\varepsilon$  и на границе

полупространства имеют вид

$$\sigma_{\theta\theta}(\mathbf{u}; \mathbf{x}) = -p(\varepsilon, \mathbf{x}), \quad \sigma_{\rho\theta}(\mathbf{u}; \mathbf{x}) = \sigma_{\theta\varphi}(\mathbf{u}; \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial k_\varepsilon \cap \mathbf{R}_1^3 \quad (4.1)$$

$$\sigma_{zz}(\mathbf{u}; \mathbf{x}) = -q(\varepsilon, \mathbf{x}), \quad \sigma_{zr}(\mathbf{u}; \mathbf{x}) = -\sigma_{z\varphi}(\mathbf{u}; \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial \mathbf{R}_1^3 \cap \Omega_\varepsilon \quad (4.2)$$

В разд. 5, 6 найдено приближенное решение поставленной задачи при малом  $\varepsilon$ , причем используются различные асимптотические методы; поясним ход рассуждений. Предельной задачей, описывающей напряженно-деформированное состояние вдали от выемки, служит задача для упругого полупространства. При этом в силу малости зоны приложения нагрузок  $p$  и  $q$  они заменяются сосредоточенным воздействием. Проведенный в разд. 5 анализ трехмерного пограничного слоя, возникающего вблизи упомянутой зоны, показывает, что кроме сосредоточенной силы, определяемой согласно принципу Сен-Венана, необходимо учесть сингулярные решения более высокого порядка (производные столбцов тензора Сомильяны). Согласно §§ 2.2. [11] и гл. 4 [12], вблизи конической поверхности возникает двумерный пограничный слой, который находится при решении задачи о плоской деформации.

**5. Предельная задача в полупространстве с цилиндрической полостью.** Как уже указывалось, при переходе к координатам  $\mathbf{y}$  вблизи края конической выемки область  $\Omega_\varepsilon$  трансформируется в множество  $\mathbf{R}_0^3 \setminus \mathbf{C}$ . Обозначим оператор системы Ламе  $L$ , а операторы краевых условий (4.1), (4.2) —  $B$ ,  $\Gamma$ . В координатах  $\mathbf{y}$  эти операторы расщепляются в формальные ряды по степеням  $\varepsilon$ . Далее понадобятся формулы

$$\begin{aligned} L(\partial/\partial \mathbf{x}) \Psi(\mathbf{y}) &= \varepsilon^{-2} L(\partial/\partial \mathbf{y}) \Psi(\mathbf{y}) + \varepsilon^{-1} L_1(\mathbf{y}, \partial/\partial \mathbf{y}) \Psi(\mathbf{y}) + \dots \\ B(\partial/\partial \mathbf{x}) \Psi(\mathbf{y}) &= \varepsilon^{-1} B_0(\mathbf{y}, \partial/\partial \mathbf{y}) \Psi(\mathbf{y}) + B_1(\mathbf{y}, \partial/\partial \mathbf{y}) \Psi(\mathbf{y}) + \dots \\ \Gamma(\partial/\partial \mathbf{x}) \Psi(\mathbf{y}) &= \varepsilon^{-1} \Gamma(\partial/\partial \mathbf{y}) \Psi(\mathbf{y}) + \Gamma_1(\mathbf{y}, \partial/\partial \mathbf{y}) \Psi(\mathbf{y}) + \dots \quad (5.1) \\ L_1\left(\mathbf{y}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}}\right) &= -2y_3 L\left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, 0\right) - \left(y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_2}\right) L'\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}}\right) - \\ &- \left(y_3 \frac{\partial}{\partial y_3} + 1\right) L'\left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, 0\right); \quad B_0\left(\mathbf{y}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}}\right) = \cos \varphi \sigma^{(1)} + \sin \varphi \sigma^{(2)} \\ B_1\left(\mathbf{y}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}}\right) &= -y_3 B_0\left(\mathbf{y}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, 0\right) - \left(y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_2}\right) B_0'\left(\mathbf{y}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}}\right) - \sigma^{(3)}; \\ \Gamma\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}}\right) &= \sigma^{(3)}, \quad \Gamma_1\left(\mathbf{y}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}}\right) = -y_3 \Gamma\left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, 0\right) - \\ &- \Gamma\left(0, 0, y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_2}\right); \quad \sigma^{(j)}(\Psi; \mathbf{y}) = \|\sigma_{jk}(\Psi; \mathbf{y})\|_{k=1}^3 \end{aligned}$$

Здесь штрихом обозначена производная абстрактной функции  $\partial/\partial y_3 \rightarrow \rightarrow L(\partial/\partial \mathbf{y})$ .

Решение исходной задачи вблизи точки  $\mathbf{N}$  ищем как пограничный слой  $\varepsilon^{-2} W^0(\mathbf{y}) + \varepsilon^{-1} W^1(\mathbf{y})$ . Согласно (5.1) и (4.1), (4.2) вектор-функция  $W^0$  подчинена уравнениям

$$\begin{aligned} L(\partial/\partial \mathbf{y}) W^0(\mathbf{y}) &= 0, \quad \mathbf{y} \in \mathbf{R}_0^3 \setminus \mathbf{C}, \quad \Gamma(\partial/\partial \mathbf{y}) W^0(\mathbf{y}) = 0, \\ &\mathbf{y} \in \partial \mathbf{R}_0^3 \setminus \mathbf{C} \\ B_0(\mathbf{y}, \partial/\partial \mathbf{y}) W^0(\mathbf{y}) &= -p_0(y_3) (\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \quad \mathbf{y} \in \partial \mathbf{C} \cap \mathbf{R}_0^3 \quad (5.2) \end{aligned}$$

Подобные задачи исследовались в [13, 14]. Здесь возникают лишь осесимметричные решения; кроме того, далее используется асимптотика при  $|\mathbf{y}| \rightarrow \infty$  с точностью  $o(|\mathbf{y}|^{-2})$ . В главном решении  $W^0$  представляется в виде  $W^0(\mathbf{y}) = c_3 T^{(3)}(\mathbf{y}) + o(|\mathbf{y}|^{-1})$ , где  $T^{(j)}$  — решения задач о действии на упругое полупространство сосредоточенной силы в направлении  $\mathbf{e}^{(j)}$  (см. [15], с. 237). Однако внешние силы из (5.2) самоуравновешены, и, значит,  $c_3 = 0$ . Следующий член асимптотики осесимметричного

решения имеет вид

$$W^0(y) = c_1(T_{,1}^{(1)}(y) + T_{,2}^{(2)}(y)) + O(|y|^{-3} \ln |y|), \quad |y| \rightarrow \infty \quad (5.3)$$

Для того чтобы найти зависимость постоянной  $c_1$  в (5.3) от нагрузки  $p$ , применим метод [10]. Построим сначала специальные решения однородной задачи (5.2), имеющие рост на бесконечности. Невязка вектора  $V(y) = 2^{-1/2}(y_1, y_2, -2\lambda(\lambda + 2\mu)^{-1}y_3)$  в однородном краевом условии на  $\partial C \cap R_0^3$  есть  $\alpha(\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$ , где  $\alpha = 2^{1/2}\mu(3\lambda + 2\mu)(\lambda + 2\mu)^{-1}$ . Эта погрешность компенсируется осесимметричным решением  $\alpha Y$  задачи теории упругости для плоскости с вырезанным единичным кругом

$$Y_k(y) = (2\mu)^{-1}r_y^{-2}y_k, \quad k = 1, 2; \quad Y_3(y) = 0 \quad (5.4)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(Y; y) = -\sigma_{rr}(Y; y) = r_y^{-2}$$

$$\sigma_{zz}(Y) = \sigma_{r\varphi}(Y) = \sigma_{rz}(Y) = \sigma_{\varphi z}(Y) = 0 \quad (5.5)$$

Так как в силу (5.5)  $\Gamma(\partial/\partial y)Y = 0$  на  $\partial R_0^3 \setminus C$ , то вектор  $\zeta = V + \alpha Y$  удовлетворяет однородной задаче (5.2).

*Предложение 5.* Постоянная  $c_1$  из асимптотики (5.3) вычисляется по формуле

$$c_1 = -4\pi(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)^{-1}P, \quad P = \int_{-\infty}^0 p_0(t) dt \quad (5.6)$$

*Доказательство.* Пусть  $D_R^3$  — шар радиуса  $R$  с центром в точке  $y = 0$ . Подставим поля  $W^0$  и  $\zeta$  в формулу Бетти для области  $(D_R^3 \cap R_0^3) \setminus C$ . С учетом краевых условий на  $\partial R_0^3$  имеем

$$\int_{S_1} \zeta \cdot \sigma^{(n)}(W^0) - W^0 \cdot \sigma^{(n)}(\zeta) ds = \int_{S_2} \zeta \cdot \sigma^{(n)}(W^0) - W^0 \cdot \sigma^{(n)}(\zeta) ds \quad (5.7)$$

$$\sigma^{(n)} = \sigma n, \quad S_1 = (\partial C \cap R_0^3) \cap D_R^3, \quad S_2 = (\partial D_R^3 \cap R_0^3) \setminus C$$

где  $n$  — внешняя нормаль. Учитывая краевые условия на  $\partial C \cap R_0^3$  для вектор-функций  $W^0, \zeta$ , находим, что слева в (5.7) интеграл можно распространить на  $\partial C \cap R_0^3$ . Согласно (5.3) правая часть (5.7) с погрешностью  $o(1)$  при  $R \rightarrow \infty$  равна

$$\begin{aligned} c_1 \int_{\partial D_R^3 \cap R_0^3} \{V_i(y) \cdot \sigma^{(n)}(T_{,1}^{(1)} + T_{,2}^{(2)}; y) - (T_{,1}^{(1)}(y) + T_{,2}^{(2)}(y)) \cdot \sigma^{(n)}(V; y)\} ds_y = \\ = -c_1 \int_{D_R^3 \cap R_0^3} 2^{1/2}V(y) \cdot V(\partial/\partial y_1, \partial/\partial y_2, 0) \delta(y_1, y_2, 0) dy_1 dy_2 = 2^{1/2}c_1 \end{aligned}$$

Переходя к пределу при  $R \rightarrow \infty$  и вычисляя интеграл по  $\partial C \cap R_0^3$ , получаем формулу (5.6).

Построим второй член решения типа пограничного слоя. При помощи (5.1) находим, что вектор  $W^1$  определяется из задачи

$$L(\partial/\partial y)W^1(y) = -L_1(y, \partial/\partial y)W^0(y), \quad y \in R_0^3 \setminus C \quad (5.8)$$

$$B_0(y, \partial/\partial y)W^1(y) = -B_1(y, \partial/\partial y)W^0(y), \quad y \in \partial C \cap R_0^3 \quad (5.9)$$

$$\Gamma(\partial/\partial y)W^1(y) = -q_0(r_y)e^{(3)} - \Gamma_1(y, \partial/\partial y)W^0(y), \quad y \in \partial R_0^3 \setminus C \quad (5.10)$$

В силу (5.3) правые части (5.8) и (5.10) при  $|y| \rightarrow \infty$  имеют порядок  $|y|^{-3}$  и  $|y|^{-2}$  соответственно. Поэтому согласно [9, 10, 14]

$$W^1(y) = c_3 T^{(3)}(y) + Y(y) + O(|y|^{-2} \ln |y|), \quad |y| \rightarrow \infty \quad (5.11)$$

Здесь  $c_3$  — некоторая постоянная,  $Y$  — частное решение задачи  $LY = -L_1 \Xi$  в  $R_0^3$ ;  $\Gamma Y = -\Gamma_1 \Xi$  на  $\partial R_0^3 \setminus 0$ ; через  $\Xi$  обозначено выражение  $c_1(T_{,1}^{(1)} + T_{,2}^{(2)})$  из (5.3).

**Предложение 6.** Множитель  $c_3$  в асимптотике (5.11) вычисляется по формуле

$$c_3 = -2\pi Q - 2\mu(\lambda + \mu)^{-1}c_1, \quad Q = \int_1^{+\infty} q_0(t) dt \quad (5.12)$$

Формула (5.12) доказывается при помощи метода [10]; используются те же выкладки, что и в предложении 5, а также следующее представление вектора  $\Upsilon(y)$ :

**Предложение 7.** Вектор-функция  $\Upsilon$  определена равенством  $\Upsilon(y) = y_3 \{y_1 \partial / \partial y_1 + y_2 \partial / \partial y_2\} \Xi(y)$ , а ее компоненты — однородные функции степени  $-1$ .

**6. Асимптотика напряженно-деформированного состояния в  $\Omega_\varepsilon$ .** Используя асимптотические разложения (5.3), (5.11) и возвращаясь к координатам  $x$ , с учетом предложения 6 находим, что при  $|x - N| = O(\varepsilon^{1/2})$  справедливо соотношение

$$\varepsilon^{-2}W^0(y) + \varepsilon^{-1}W^1(y) \sim c_3 T^{(3)}(x - N) + c_1 (T_{,1}^{(1)}(x - N) + T_{,2}^{(2)}(x - N)) \quad (6.1)$$

Осуществляя сращивание трехмерного пограничного слоя с полем смещений  $v$ , приближающим решение и вдали от  $k_\varepsilon$ , заключаем, что  $v$  — решение краевой задачи

$$Lv = 0 \text{ в } \mathbf{R}_1^3, \quad \Gamma v = c_3 e^{(3)}\delta + c_1 (e^{(1)}\delta_{,1} + e^{(2)}\delta_{,2}) \text{ на } \partial\mathbf{R}_1^3$$

где  $e^{(j)}$  — орты в  $\mathbf{R}^3$ , а  $\delta$ -функция сосредоточена в точке  $x = N$ . Следовательно,  $v(x)$  совпадает с правой частью соотношения (6.1).

Итак, найдены асимптотические представления решения в следующих двух зонах: непосредственно вблизи участка границы, где действует внешняя нагрузка, и вдали от конуса  $k_\varepsilon$ . Перейдем к построению добавочных членов, учитывающих краевые условия (4.1), (4.2) вне окрестности точки  $N$  и наличие особенности границы в вершине конуса.

В однородных краевых условиях (4.1) на  $\partial k_\varepsilon \cap \mathbf{R}_1^3$  вектор  $v$  оставляет невязку

$$\sigma_{\theta\theta}(v; \rho) = X(\rho) + O(\varepsilon), \quad \sigma_{\rho\theta}(v) = \sigma_{\theta\varphi}(v) = 0 \quad (6.2)$$

$$X(\rho) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \left( \frac{Q}{2(1-\rho)^2} - \frac{2}{\lambda + 2\mu} P \left( \frac{\lambda + \mu}{(1-\rho)^3} + \frac{\mu}{(1-\rho)^2} \right) \right)$$

С целью устранить погрешность (6.2) построим пограничный слой  $\varepsilon zw(y_1, y_2, z)$ . Подчеркнем, что величины (6.2) характеризуются «медленной» зависимостью от  $z$  вдали от точки  $N$ , а следовательно, возникает двумерный пограничный слой (в разд. 5 использовалась растянутая переменная  $y_3 = \varepsilon^{-1}(x_3 - 1)$  и пограничный слой был трехмерный). Аналогично разд. 2 получаем, что компоненты  $w$  — решения задач о плоской и антиплоской деформации области  $\mathbf{R}^2 \setminus D_1^2$ . Переходя в (6.2) к координатам  $(y_1, y_2, z)$ , имеем  $\sigma_{\theta\theta}(v; z) = X(z) + O(\varepsilon)$ . Поэтому краевые условия на  $\partial D_1^2$  для двумерного вектора  $(w_1, w_2)$  имеют вид

$$\sigma_{rr} = -X(z), \quad \sigma_{r\varphi} = 0 \quad (6.3)$$

Значит,  $w = X(z)Y(y)$ , где  $Y$  — вектор-функция (5.4).

Согласно [9, 10], в окрестности вершины конуса  $k_\varepsilon$  осесимметричное поле смещений  $u$  допускает разложение

$$u(\varepsilon, x) = c^{(0)}(\varepsilon) e^{(3)} + c^{(1)}(\varepsilon) \rho^{\Lambda^{(1)}(\varepsilon)} \Phi^{(1)}(\varepsilon, \theta, \varphi) + c^{(2)}(\varepsilon) \rho^{\Lambda^{(2)}(\varepsilon)} \Phi^{(2)}(\varepsilon, \theta, \varphi) + \dots \quad (6.4)$$

Здесь  $c^{(i)}(\varepsilon)$  — некоторые постоянные. Асимптотика при  $\varepsilon \rightarrow 0$  показателей  $\Lambda^{(i)}(\varepsilon)$  определяется формулами (2.9), (3.9), а угловые части  $\Phi^{(i)}$  имеют вид

$$\rho\Phi^{(i)}(0, \theta, \varphi) = b_1^{(i)}(x_1 e^{(1)} + x_2 e^{(2)}) + b_2^{(i)} x_3 e^{(3)} \quad (6.5)$$

$$b_1^{(1)} = b_2^{(2)} = 1, \quad b_1^{(2)} = 0, \quad b_2^{(1)} = -(5\lambda^2 + 9\mu\lambda + 2\mu^2) [4(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)]^{-1}$$

Согласуя формулы (6.4), (2.9), (3.9) с найденным ранее асимптотическим представлением  $u(\varepsilon, \mathbf{x}) \sim v(\mathbf{x}) + \varepsilon zw(y_1, y_2, z)$ , заключаем, что в (6.4)

$$c^{(0)}(\varepsilon) = (2\lambda + 3\mu)(4\pi\mu(\lambda + \mu))^{-1}(c_3 - c_1) + O(\varepsilon) \quad (6.6)$$

$$c^{(i)}(\varepsilon) = \pm(v_{1,1}(0)b_2^{(j)} - v_{3,3}(0)b_1^{(j)}) + O(\varepsilon), \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2$$

$$v_{1,1}(0) = (2\lambda + \mu)(8\pi\mu(\lambda + \mu))^{-1}(2c_1 - c_3), \quad v_{3,3}(0) = (2\pi\mu)^{-1}(c_1 - c_3)$$

1°. Согласно [7, 1] и разд. 3 данной работы, показатель сингулярности напряжений в вершине конической выемки есть  $O(\varepsilon^2)$ . По критерию В. В. Новожилова [16] такая особенность напряжений может быть несущественной и не оказывать влияния на характер разрушения. В самом деле, условие  $(\text{mes } K)^{-1} \int_K \sigma_{ss}(\mathbf{x}) ds > \sigma_c$  (для конической поверхности  $K = \{\rho < d, \theta = \theta_0\}$ ) означает, что

$$\sigma_c < 2\Sigma(\theta_0)(\sin \theta_0)^{-1}(2 + \varepsilon^2 \Lambda_2^{(2)} + O(\varepsilon^3))^{-1} \exp(\varepsilon^2 |\ln d| (\Lambda_2^{(2)} + O(\varepsilon))) = \Sigma(\theta_0)(\sin \theta_0)^{-1} + O(\varepsilon^2 |\ln d|) \quad (6.7)$$

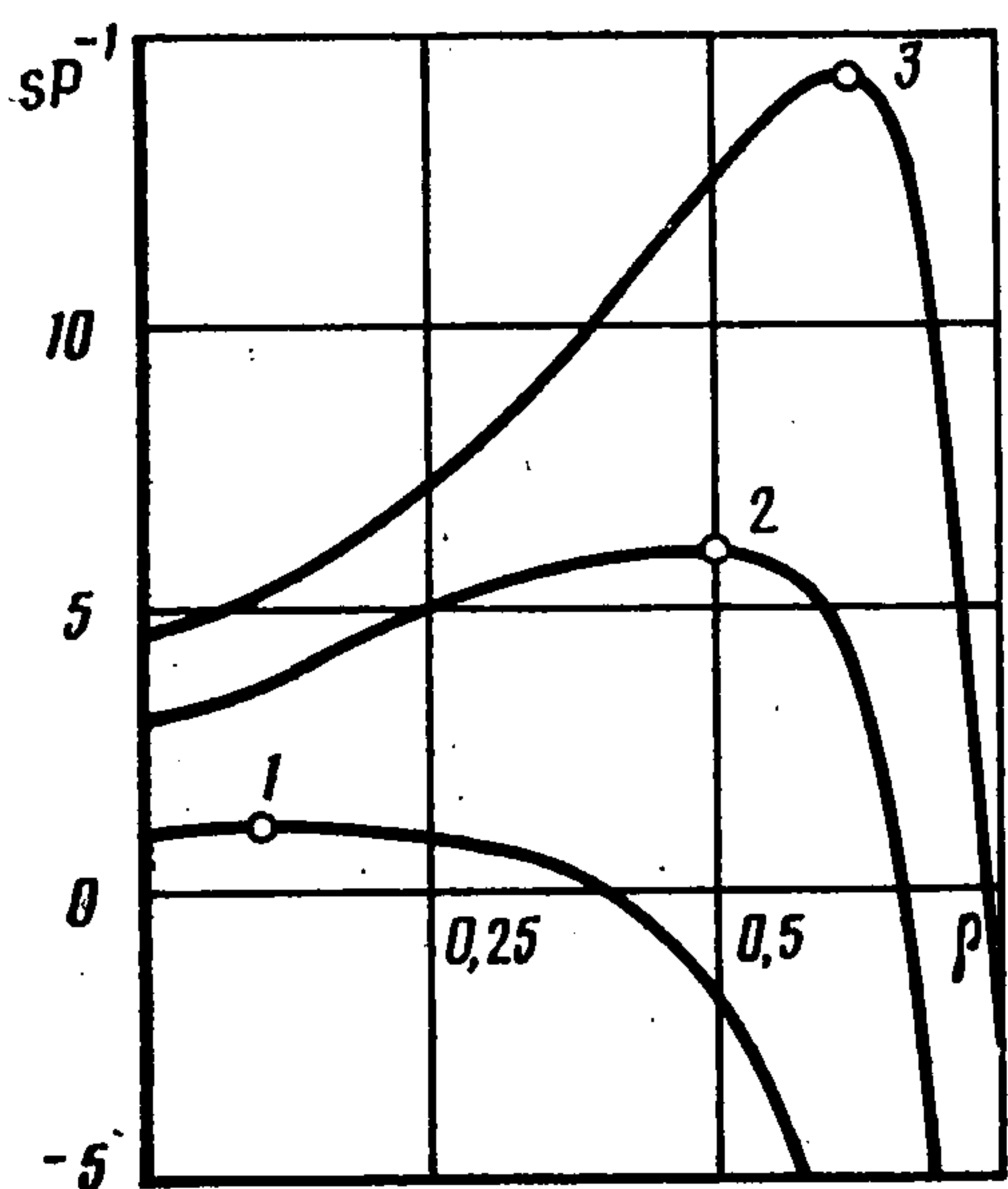
Здесь  $\Sigma(\theta_0)$  — некоторая величина, вычисленная по формулам (6.4), (6.5), (6.6),  $d$  — структурный параметр [16] материала, отнесенный к расстоянию до точки приложения нагрузки. Если остаток в формуле (6.7) мал по сравнению с первым членом, то наличие сингулярности не оказывает влияния; если же  $\varepsilon^2 |\ln d| \gg 1$  (за счет малости  $d$ ), то определяющим является наличие сингулярности.

2°. Рассмотрим часть конической поверхности  $\partial k_\varepsilon$  между вершиной  $O$  и зоной действия нагрузки (фиг. 1). В силу (4.1), (4.2) и осевой симметрии отличны от нуля лишь напряжения  $\sigma_{\rho\rho}$  и  $\sigma_{\varphi\varphi}$ . Они находятся по формулам (6.2), (6.3) и (5.5) и в главном (без учета поправочных членов, возникающих в непосредственной близости от вершины  $O$ ; разд. 1°) таковы:

$$\sigma_{\rho\rho} = -6s(\rho); \quad \sigma_{\varphi\varphi} = 2(1 - 2\nu)s(\rho), \quad \nu = \lambda[2(\lambda + \mu)]^{-1} \quad (6.8)$$

$$s(\rho) = Q(2(1 - \rho^2)^{-1} - P(1 - \nu)^{-1}((1 - \rho)^{-3} + (1 - 2\nu)(1 - \rho)^{-2}))$$

Пусть силы  $P$  и  $Q$  направлены внутрь тела ( $Q, P > 0$ ). Если  $QP^{-1} < 4$ , то напряжения  $\sigma_{\rho\rho}$  — растягивающие и монотонно возрастают при  $\rho \in (0, 1)$ ; напряжения



Фиг. 2

$\sigma_{\varphi\varphi}$  — сжимающие. Если же  $QP^{-1} \geq 4$ , то напряжения  $\sigma_{\rho\rho}$  в окрестности вершины — сжимающие, а  $\sigma_{\varphi\varphi}$  — растягивающие. При  $QP^{-1} > (5 - 4\nu)(1 - \nu)^{-1} = \gamma_0$  имеется локальный максимум  $\sigma_{\varphi\varphi}$  в точке  $\rho_0 = [1 - 3[(1 - \nu)QP^{-1} - 2(1 - 2\nu)]^{-1}]$  (см. фиг. 2, где изображен график функции  $P^{-1}s$  для  $\nu = 1/3$  и параметра  $QP^{-1}$ , равного 6, 10, 13 (кривые 1, 2, 3 соответственно); напряжения  $\sigma_{\varphi\varphi}$  и  $\sigma_{\rho\rho}$  вычисляются по формулам (6.8)). Таким образом, с учетом сказанного в разд. 1° заключаем, что в случае, когда  $\varepsilon^2 |\ln d| \ll 1$ , разрушение возможно на удалении от вершины  $O$ ; оно характеризуется образованием мелких поверхностных трещин, перпендикулярных окружности  $\{\rho = \rho_0, \theta = \arcsin \varepsilon\}$ . При увеличении отношения  $QP^{-1}$  от значения  $\gamma_0$  точка  $\rho_0$  отодвигается от вершины  $O$  к границе полупространства.

Отметим, что эффект смещения зоны разрушения от вершины конуса наблюдался в экспериментах [17] (см. также [18]).

3°. Изложенный алгоритм асимптотического решения задачи о деформации полупространства с конической выемкой применим и в случае нагружения изнутри выемки. (Подчеркнем, что в этом случае задача из разд. 5 заменяется аналогичной задачей о пространстве с цилиндрической полостью; при этом выкладки лишь упрощаются.)

Анализ соответствующих формул показывает, что в случае такого нагружения напряжения  $\sigma_{\rho\rho}$  и  $\sigma_{\varphi\varphi}$  монотонно убывают от зоны приложения силы  $p$  к вершине конуса.

4°. Результаты разд. 5 показывают, что замена распределенных в малой зоне внешних нагрузок сосредоточенной силой в упругом полупространстве неправомерно: выражения (6.1), содержащие производные столбцов тензора Сомильяны, и вектор  $c_3 T^{(3)}$ , отвечающий задаче о сосредоточенной силе, являются величинами одного порядка. Однако все коэффициенты линейной комбинации выражаются через главные векторы  $P$  и  $Q$  внешних сил (формулы (5.6), (5.12)).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Партон В. З., Перлин П. И. Методы математической теории упругости. М. Наука, 1981. 688 с.
2. Нуллер Б. М. К смешанной задаче о кручении упругого конуса // Инж. журн. МТТ. 1967. № 4. С. 146—151.
3. Нуллер Б. М. К решению задачи теории упругости об усеченном полом конусе // Инж. журн. МТТ. 1967. № 5. С. 102—110.
4. Thompson T. R., Little R. W. End. effects in a truncated semi-infinite cone // Quar. J. Mech. Appl. Math. 1970. V. 23. № 2. P. 185—195.
5. Bazant Z. P., Keer L. M. Singularities of elastic stresses and of harmonic functions at conical notches or inclusions // Intern. J. Solids Struct. 1974. V. 10. № 9. P. 957—964.
6. Keer L. M., Parihar K. S. Elastic stress singularity at conical inclusions // Intern. J. Solids and Struct. 1978. V. 14. № 4. P. 261—263.
7. Улитко А. Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. Киев: Наук. думка, 1979. 263 с.
8. Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Об особенностях решений задачи Дирихле во внешности тонкого конуса // Мат. сб. 1983. Т. 122. № 4. С. 435—457.
9. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. мат. о-ва. 1967. Т. 16. С. 209—292.
10. Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками // Math. Nachr. 1977. Bd 76. S. 29—60.
11. Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Асимптотика решений эллиптических краевых задач при сингулярных возмущениях области. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1981. 206 с.
12. Назаров С. А., Паукшто М. В. Дискретные модели и осреднение в задачах теории упругости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1984. 93 с.
13. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
14. Арутюнян Н. Х., Мовчан А. Б., Назаров С. А. О корректных постановках задач Лехницкого // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 2. С. 237—246.
15. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
16. Новожилов В. В. К основам теории равновесных трещин в упругих телах // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 5. С. 797—812.
17. Williams M. L. Stress singularities, adhesion, and fracture // Proc. 5th U. S. National Congr. Appl. Mech. N. Y.: ASME, 1966. P. 451—464.
18. Си Г., Либовиц Г. Математическая теория хрупкого разрушения. Разрушение. Т. 2. М.: Мир, 1975. С. 83—203.

Ленинград

Поступила в редакцию  
16.III.1989