Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 2, 1990

УДК 539.3

Л. В. Петухов, К. Е. Соков

НЕОДНОРОДНЫЕ ОПТИМАЛЬНЫЕ ПО ЖЕСТКОСТИ УПРУГИЕ КОНСТРУКЦИИ

Рассматривается задача о максимизации жесткости (минимизации работы внешних сил) упругой конструкции, управлением в которой является модуль сдвига или в двумерном случае толщина пластин [1—3]. На управление наложены поточечные и интегральные ограничения. Получены необходимые условия Вейерштрасса — Эрдмана и Вейерштрасса, позволяющие сделать качественные выводы об оптимальном решении. Эти выводы не совпадают с результатами работы [4], в которой, правда, рассмотрена задача математической физики.

1. Постановка задачи. Пусть R^N — N-мерное евклидово пространство векторов $\mathbf{x} = x_i\mathbf{e}_i$, где $\mathbf{e}_i$ — орты введенной декартовой системы координат (здесь и далее везде латинские индексы i, j, k, l, m, n пробегают значения от 1 до N, по повторяющимся индексам i, j, k, l, m, n в произведениях предполагается суммирование от 1 до N), Ω — область проектирования в R^N, а Γ — граница Ω.

Предположим, что область Ω может быть заполнена упругим неоднородным материалом, характеризующимся тензором упругих постоянных $\theta(\mathbf{x})\,\mathbf{a}$, где

$$\theta(\mathbf{x}) \in L_\infty(\Omega), \quad \int\limits_\Omega \theta(\mathbf{x})\,dx = \theta^0 \operatorname{mes}\Omega, \; \theta^0 = \text{const} \tag{1.1}$$

$$0 < \theta_- \leqslant \theta(\mathbf{x}) \leqslant \theta_+ \tag{1.2}$$

$$\mathbf{a} = a_{ijkl}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l, \quad a_{ijkl} = \frac{2\mu\nu}{1-q\nu}\,\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\,(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{1.3}$$

причем $q = 1$ для $N = 2$ при плоском напряженном состоянии (ПНС), $q = 2$ для $N = 3$ и $N = 2$ при плоском деформированном состоянии (ПДС): модуль сдвига μ и коэффициент Пуассона ν — фиксированные постоянные.

Сформулируем задачу оптимального проектирования. Пусть заданы: вектор внешних нагрузок $\mathbf{F}$, действующих на границе Γ_F, и участок границы Γ_u, на котором перемещения упругой области равны нулю ($\Gamma_F \cap \Gamma_u = \varnothing$), а остальная часть границы Γ свободна от нагрузок, θ^0, θ_-, θ_+, ν, μ. Требуется найти

$$\inf_\theta J(\mathbf{u}),\; J = \int\limits_{\Gamma_F} F_i u_i\, d\Gamma \tag{1.4}$$

где $F_i \in L_2(\Gamma_F)$, а $\mathbf{u} = u_i\mathbf{e}_i$ — решение интегрального тождества

$$\int\limits_\Omega \theta(\mathbf{x})\,A(\mathbf{u}, \mathbf{v})\,dx - \int\limits_{\Gamma_F} F_i v_i\, d\Gamma = 0, \; \forall \mathbf{v} \in V(\Omega) \tag{1.5}$$

$$V(\Omega) = \{\mathbf{v} = v_i(\mathbf{x})\,\mathbf{e}_i \mid v_i \in W_2^{(1)}(\Omega), v_i(\mathbf{y}) = 0, \mathbf{y} \in \Gamma_u\}$$

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a_{ijkl}\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})\,\varepsilon_{kl}(\mathbf{v})$$

$$\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) = (\partial u_k/\partial x_l + \partial u_l/\partial x_k)/2$$

u_i — перемещения упругой области, $A(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ — удвоенная удельная потенциальная энергия упругой деформации, $W_2^{(1)}(\Omega)$ — пространство

Соболева. Из (1.3) следует, что в задаче (1.4) управление осуществляется модулем сдвига $\theta(\mathbf{x})\,\mu$ материала. Решением задачи оптимального проектирования является конструкция, выполненная из неоднородного упругого материала. Реализация найденного оптимального управления может быть осуществлена двумя способами:

1) для двумерных задач в случае ПНС управлением может служить толщина упругого слоя,

2) полученное оптимальное управление может быть аппроксимировано материалом с кусочно-постоянными упругими характеристиками.

По типу минимизируемого функционала задача аналогична рассматривавшейся в работе [4].

2. Первая вариация. Составим расширенный функционал, для чего прибавим к правой части равенства (1.4) левую часть соотношения (1.5), и, предполагая оптимальное управление $\theta^*(\mathbf{x})$ гладким, найдем первую вариацию

$$\delta J = \int\limits_{\Gamma_F} F_i \delta u_i \, d\Gamma + \int\limits_{\Omega} [\theta^* A(\delta\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \delta\theta A(\mathbf{u}^*, \mathbf{v})]\, dx \tag{2.1}$$

где $\delta\theta$, $\delta\mathbf{u}$ — вариации управления и вектора перемещений. Положим $\mathbf{v} = -\mathbf{u}^*$. Тогда из (1.5) и необходимого условия $\delta J \geqslant 0$ получим неравенство

$$\int\limits_{\Omega} \delta\theta A(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^*)\, dx \leqslant 0 \tag{2.2}$$

для $\delta\theta(\mathbf{x})$, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_{\Omega} \delta\theta(\mathbf{x})\, dx = 0 \tag{2.3}$$

Из неравенства (2.2) и равенства (2.3) следует существование неотрицательной постоянной ζ^*, такой, что

$$A(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^*) = \zeta^*, \ \forall \mathbf{x} \in \Omega_1 \tag{2.4}$$
$$A(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^*) \leqslant \zeta^*, \ \forall \mathbf{x} \in \Omega_2; \ A(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^*) \geqslant \zeta^*, \ \forall \mathbf{x} \in \Omega_3$$
$$\Omega_1 = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid \theta_- < \theta^*(\mathbf{x}) \leqslant \theta_+\}$$
$$\Omega_2 = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid \theta^*(\mathbf{x}) = \theta_-\}, \ \Omega_3 = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid \theta^*(\mathbf{x}) = \theta_+\}$$

Предположим теперь, что оптимальное управление $\theta^*(\mathbf{x})$ представляет собой разрывную функцию, которая терпит разрыв при переходе через гладкую поверхность Γ_0, разделяющую Ω на две части Ω^- и Ω^+. Обозначим

$$\mathbf{u}^* = \begin{cases} \mathbf{u}^-(\mathbf{x}), \ \mathbf{x} \in \Omega^- \\ \mathbf{u}^+(\mathbf{x}), \ \mathbf{x} \in \Omega^+ \end{cases} \tag{2.5}$$

Оптимальное решение $\mathbf{u}^*(\mathbf{x})$ остается непрерывным при переходе через Γ_0, однако производные могут претерпевать разрыв.

Введем на поверхности Γ_0 криволинейные ортогональные координаты τ_k, пусть τ_N — декартова координата, ортогональная Γ_0 [5]. Найдем связь между производными $\mathbf{u}^*$ при переходе через Γ_0.

Из (2.1) и (2.5) следуют равенства

$$\mathbf{r}_k \cdot \nabla \mathbf{u}^- |_{\Gamma_0} = \mathbf{r}_k \cdot \nabla \mathbf{u}^+ |_{\Gamma_0}, \quad k = 1, \ldots, N-1 \tag{2.6}$$
$$\mathbf{r}_N \cdot \sigma(\mathbf{u}^-) |_{\Gamma_0} = \mathbf{r}_N \cdot \sigma(\mathbf{u}^+) |_{\Gamma_0} \ \ (\sigma = \theta \mathbf{a} \cdot\cdot\, \varepsilon(\mathbf{u}))$$

где σ — тензор напряжений, подсчитанный для поля перемещений $\mathbf{u}$, $\mathbf{r}_k$ — орты, связанные с введенными криволинейными координатами τ_k (здесь и везде далее точкой и двумя точками обозначены скалярное и двойное скалярное произведения [6]). Будем считать $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$, $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$ отнесенными к координатам τ_k. Тогда последнее равенство (2.6) можно записать в виде

$$\theta^-(\mathbf{r}_N\cdot\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}_k)\cdot(\mathbf{r}_k\cdot\nabla\mathbf{u}^-) = \theta^+(\mathbf{r}_N\cdot\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}_k)\cdot(\mathbf{r}_k\cdot\nabla\mathbf{u}^+)$$

откуда, учитывая первые два равенства (2.6), получим выражение для $\mathbf{r}_N\cdot\nabla\mathbf{u}^-$ и найдем скачок $A(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^*)$ при переходе через Γ_0

$$A(\mathbf{u}^-, \mathbf{u}^-) = \nabla\mathbf{u}^-\cdot\cdot\,\mathbf{a}\cdot\cdot\,\nabla\mathbf{u}^- = A(\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^+) - (\theta^- - \theta^+)(\theta^- + \theta^+)(\theta^-\theta^+)^{-2}X(\mathbf{r}_N) \tag{2.7}$$

$$X(\mathbf{r}_N) = \begin{cases}[\sigma_{31}^2 + \sigma_{32}^2 + {}^1/_2(1-2\nu)\sigma_{33}^2]\mu^{-1}, & N = 3\\ [\sigma_{21}^2 + {}^1/_2(1-q\nu)\sigma_{22}^2]\mu^{-1}, & N = 2\end{cases}$$

(в выражении для $X(\mathbf{r}_N)$ учтено соотношение (1.3)). Здесь компоненты тензора напряжений представлены в координатах τ_k.

Анализ соотношений (2.7) показывает, что поскольку $X(\mathbf{r}_N) \geqslant 0$, то

$$A(\mathbf{u}^-, \mathbf{u}^-)|_{\Gamma_0} \leqslant A(\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^+)|_{\Gamma_0}, \ \theta^-|_{\Gamma_0} \geqslant \theta^+|_{\Gamma_0} \tag{2.8}$$

С другой стороны, из необходимых условий (2.4) следует неравенство

$$A(\mathbf{u}^-, \mathbf{u}^-)|_{\Gamma_0} \geqslant A(\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^+)|_{\Gamma_0}, \ \theta^-|_{\Gamma_0} \geqslant \theta^+|_{\Gamma_0} \tag{2.9}$$

Сравнивая (2.8), (2.9), получаем, что скачок управления θ на гладкой поверхности Γ_0 возможен только в случае, когда на этой поверхности

$$\mathbf{r}_N\cdot\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})|_{\Gamma_0} = 0, \ A(\mathbf{u}^-, \mathbf{u}^-)|_{\Gamma_0} = A(\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^+)|_{\Gamma_0} = \zeta^* \tag{2.10}$$

3. Необходимое условие Вейерштрасса. Для получения необходимого условия Вейерштрасса в точке $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ рассмотрим односвязную область Ω_0, звездную относительно $\mathbf{x}_0$, причем $\overline{\Omega}_0 \in \Omega$. Возьмем точку $\mathbf{y} \in \Gamma_0$ (Γ_0 — граница Ω_0) и проведем в нее из точки $\mathbf{x}_0$ вектор $\mathbf{r}(\mathbf{y})$. Если рассмотреть множество точек $\eta\mathbf{r}(\mathbf{y})$, то получится граница $\Gamma_0(\eta)$, которая выделяет область $\Omega_0(\eta)$, причем $\Omega_0 = \Omega_0(1)$, $\Gamma_0 = \Gamma_0(1)$. Область $\Omega_0(\eta)$ получается из Ω_0 изменением всех ее линейных размеров в η раз, поэтому

$$\operatorname{mes}\Omega_0(\eta) = \eta^N \operatorname{mes}\Omega_0 \tag{3.1}$$

Предположим, что $\theta^*(\mathbf{x})$ — кусочно-непрерывное оптимальное управление, каждая непрерывная часть которого — гладкая. Возьмем точку $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, в которой не нарушается непрерывность $\theta^*(\mathbf{x})$. Построим для $\mathbf{x}_0$ область $\Omega_0(\eta)$, $0 \leqslant \eta < \eta_0 < 1$, такую, чтобы в ней функция $\theta^*(\mathbf{x})$ была гладкой. Зададим в $\Omega_0(\eta)$ произвольное управление θ, удовлетворяющее неравенствам (1.2), а в области $\Omega \setminus \Omega_0(\eta)$ зададим $\theta(\mathbf{x}, \eta)$ такое, что $\theta(\mathbf{x}, 0) = \theta^*(\mathbf{x})$ и

$$\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_0(\eta)} \Delta\theta\, dx + \int\limits_{\Omega_0(\eta)} \theta\, dx = \theta^0 \operatorname{mes}\Omega \tag{3.2}$$

$$\Delta\theta = \theta_0 - \theta^*, \ \theta(\mathbf{x}, 0) = \theta^*(\mathbf{x}), \ \mathbf{x} \in \Omega_0(\eta)$$

Из (3.1), (3.2) следует

$$\delta\theta = \ldots = \delta^{N-1}\theta = 0, \ \delta^N\theta = 0 \tag{3.3}$$

$$\Delta\theta(\mathbf{x}_0) N! \operatorname{mes}\Omega_0 + \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_0(\eta)} \delta^N\theta\, dx = 0 \tag{3.4}$$

Составим расширенный функционал

$$J = J_1 + J_2, \ J_1 = -\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_0(\eta)} \Delta\theta A(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*)\, dx$$

$$J_2 = -\int\limits_{\Omega_0(\eta)} \theta A(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*)\, dx + \int\limits_{\Gamma_F} F_i(u_i + u_i^*)\, d\Gamma$$

Из (3.3) следует, что

$$\delta J_2 = \ldots = \delta^{N-1} J_2 = 0, \quad \delta^N J_2 = -\int_\Omega \delta^N \theta A(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^*)\, dx$$

В области $\Omega_0(\eta)$ функция $\mathbf{u}^*$ дифференцируема, поэтому, применяя в интеграле J_1 формулу

$$\Delta\theta A(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) = \nabla \cdot \left(\frac{\Delta\theta}{\theta^*} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^*) \cdot \mathbf{u}\right) - \nabla \frac{\Delta\theta}{\theta^*} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^*) \cdot \mathbf{u} - \frac{\Delta\theta}{\theta^*} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^*) \cdot \mathbf{u}$$

и используя формулу Остроградского, получим

$$J_1 = -\int_{\Gamma_0(\eta)} \frac{\Delta\theta}{\theta^*} \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^*) \cdot \mathbf{u}\, d\Gamma + \int_{\Omega_0(\eta)} \nabla \frac{\Delta\theta}{\theta^*} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^*) \cdot \mathbf{u}\, dx \qquad (3.5)$$

где $\mathbf{r}$ — внешний орт нормали к границе $\Gamma_0(\eta)$ области $\Omega_0(\eta)$ (учтено также, что $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^*) = 0$, $\mathbf{x} \in \Omega_0(\eta)$).

В области $\Omega_0(\eta)$ $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \eta) \sim \eta$, поэтому в правой части равенства (3.5) первый интеграл пропорционален η^N, а второй — η^{N+1}. Домножая равенство (3.4) на ζ^* и складывая с $\delta^N J = \delta^N J_1 + \delta^N J_2 \geqslant 0$, найдем неравенство

$$-\frac{d^N}{d\eta^N}\left[\int_{\Gamma^0(\eta)} \frac{\Delta\theta}{\theta^*} \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^*) \cdot \mathbf{u}\, d\Gamma\right]_{\eta=0} \geqslant -\Delta\theta\zeta^* N! \operatorname{mes} \Omega_0 \qquad (3.6)$$

которое является необходимым условием Вейерштрасса сильного минимума.

Для того чтобы использовать неравенство (3.6), необходимо иметь решение $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \eta)$. Для произвольных $\Omega_0(\eta)$ найти его не представляется возможным, однако для эллиптических, гипотрохоидных и эллипсоидальных включений при $\eta \to 0$ это решение может быть найдено.

4. Необходимое условие Вейерштрасса для эллипса ($N = 2$). Пусть Ω_0 — эллиптическое включение с большой и малой полуосями $\eta(1 + \xi)$ и $\eta(1 - \xi)$, $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, центр которого помещен в точку $\mathbf{x}_0$. Будем считать, что главное напряжение $\sigma_1 = \sigma_1(\mathbf{u}^*(\mathbf{x}_0))$ тензора $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^*(\mathbf{x}_0))$ действует под углом β к большой полуоси эллипса. Решение $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \eta)$, входящее в левую часть условия (3.6), при $\eta \to 0$ совпадает с решением задачи о сжатии — растяжении бесконечной плоскости с эллиптическим включением силами $\sigma_1(\mathbf{u}^*(\mathbf{x}_0))$, $\sigma_2(\mathbf{u}^*(\mathbf{x}_0))$, действующими на бесконечности под углом β к большой и малой полуосям эллипса, и определяется по формуле Колосова — Мусхелишвили [7]:

$$\begin{gathered}
\mathbf{u} = {}^1/_8\eta(\varkappa + 1)\mu^{-1}\{[(1 + \xi)(\varkappa A_1 - A_1 - 2B_1)\cos\varphi - (1 - \\
- \xi)(\varkappa A_2 + A_2 - 2B_2)\sin\varphi]\mathbf{e}_1 + [(1 + \xi)(\varkappa A_2 + A_2 + \\
+ 2B_2)\cos\varphi - (1 - \xi)(\varkappa A_1 - A_1 + 2B_1)\sin\varphi]\,\mathbf{e}_2 \qquad (4.1) \\
A_1 = \{(\sigma_1 + \sigma_2)[(\varkappa + 1)\theta^* + (1 - \xi^2)\Delta\theta] + 2(\sigma_1 - \\
- \sigma_2)\xi\Delta\theta\cos 2\beta\} R^{-1} \\
A_2 = -\frac{2(\sigma_1 - \sigma_2)\Delta\theta\xi\sin 2\beta}{(\varkappa + 1)\theta^*[\theta^* + \varkappa(\theta^* + \Delta\theta) + \Delta\theta\xi^2]} \\
B_1 = -\{(\sigma_1 + \sigma_2)(\varkappa - 1)\xi\Delta\theta + (\sigma_1 - \sigma_2)[(\varkappa + 1)\theta^* + 2\Delta\theta]\cos 2\beta\} R^{-1} \\
B_2 = (\sigma_1 - \sigma_2)[(\varkappa + 1)\theta^* + (\varkappa + \xi^2)\Delta\theta]^{-1}\sin 2\beta
\end{gathered}$$

где φ — угол, отсчитываемый от оси x_1, $\varkappa = 3 - 4\nu$ для ПДС и $\varkappa = (3 - \nu)(1 + \nu)^{-1}$ для ПНС.

Подставляя в левую часть условия (3.6): функцию $\mathbf{u}^*$, выражение (4.1) и $\mathbf{r} = [(1-\xi)\cos\varphi\mathbf{e}_1 + (1+\xi)\sin\varphi\mathbf{e}_2]/Q$, $d\Gamma = \eta Q d\varphi$, $Q = \sqrt{1 - 2\xi\cos 2\varphi + \xi^2}$ после преобразований получим

$$\Delta\theta\,(1-\xi^2)\,[{}^1/_8\,(\varkappa+1)\,(\mu\theta^*)^{-1}\Psi\,(\beta,\ \xi,\ \Delta\theta) + \zeta^*] \geqslant 0 \tag{4.2}$$

$$\psi\,(\beta,\ \xi,\ \Delta\theta) = \{(\sigma_1+\sigma_2)^2\,(\varkappa-1)\,\Delta\theta\xi^2 - 4\,(\sigma_1^2-\sigma_2^2)\,(\varkappa - 1)\,\xi\Delta\theta\cos 2\beta - 2\,(\sigma_1-\sigma_2)^2\,[(\varkappa+1)\,\theta^* + 2\Delta\theta]\cos^2 2\beta + (\sigma_1+\sigma_2)^2\,(\varkappa-1)\,[(\varkappa+1)\,\theta^* + \varkappa\Delta\theta]\}\,R^{-1} - 2\,(\sigma_1-\sigma_2)^2\Delta\theta\sin 2\beta\,[(\varkappa+1)\,\theta^* + (\varkappa+\xi^2)\,\Delta\theta]^{-1}$$

$$R = [(\varkappa+1)\,\theta^*]^2 + (\varkappa+1)\,(\varkappa+2-\xi^2)\,\theta^*\Delta\theta + 2\varkappa\,(1-\xi^2)\,(\Delta\theta)^2$$

(для эллипса $\operatorname{mes}\Omega_0 = \pi\,(1-\xi^2)$).

Неравенство (4.2) должно выполняться при любых $\beta \in [0, 2\pi]$, поэтому, полагая для определенности $\sigma_1^2 \geqslant \sigma_2^2$ и решая задачу минимизации левой части неравенства (4.2) при $0 \leqslant \beta \leqslant \pi$, получим

$$\beta_* = 0, \quad \Psi_*\,(\xi,\ \Delta\theta) = \Psi\,(0,\ \xi,\ \Delta\theta) = \{(\sigma_1+\sigma_2)^2\,(\varkappa-1)\,[(\varkappa+1)\,\theta^* + (\varkappa-\xi^2)\,\Delta\theta] + 4\,(\sigma_1^2-\sigma_2^2)\,(\varkappa-1)\,\xi\Delta\theta + 2\,(\sigma_1-\sigma_2)^2[(\varkappa+1)\,\theta^* + 2\Delta\theta]\}\,R^{-1}$$

Добавляя к выражению в квадратных скобках левой части неравенства (4.2) слагаемое $A\,(\mathbf{u}^*,\ \mathbf{u}^*) - A\,(\mathbf{u}^*,\ \mathbf{u}^*)$, после преобразований найдем

$$\frac{(\Delta\theta)^2\,(1-\xi^2)}{4\mu\,(\theta^*)^2\,R}\,\{(\sigma_1+\sigma_2)^2\,(\varkappa-1)\,[(\varkappa+1)\,\theta^* + \varkappa\,(1-\xi^2)\,\Delta\theta] - 2\,(\sigma_1^2-\sigma_2^2)\,(\varkappa^2-1)\,\xi\theta^* + (\sigma_1-\sigma_2)^2\,[(\varkappa+1)\,(\varkappa-\xi^2)\,\theta^* + 2\varkappa\,(1-\xi^2)\,\Delta\theta]\} + \Lambda \geqslant 0,\ \Lambda = (1-\xi^2)\,\Delta\theta\,[\zeta^* - A\,(\mathbf{u}^*,\ \mathbf{u}^*)] \tag{4.3}$$

Из необходимых условий (2.4) следует, что $\Lambda \geqslant 0$, множитель перед фигурной скобкой (4.3) также неотрицателен, поэтому выражение в фигурных скобках будет отрицательным при

$$\Delta\theta < f\,(\xi),\ f\,(\xi) = -\varkappa^{-1}\,(1-\xi^2)^{-1}\,[\tau^2\,(\varkappa-1) - 2\tau\,(\varkappa-1)\,\xi + (\varkappa-\xi^2)]\,\Theta$$

$$\Theta = (\varkappa+1)\,[\tau^2\,(\varkappa-1) + 2]^{-1}\theta^*,\ \tau = (\sigma_1+\sigma_2)/(\sigma_1-\sigma_2)$$

Максимизируя $f\,(\xi)$ на отрезке $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, найдем

$$f_* = f\,(\xi^*) = \begin{cases} -(\varkappa-1)^{-1}\Theta,\ \xi^* = \tau,\ -1 \leqslant \sigma_2/\sigma_1 \leqslant 0 \\ -\varkappa^{-1}\,[\tau^2\,(\varkappa-1) + 1]\,\Theta,\ \xi^* = \tau^{-1},\ 0 \leqslant \sigma_2/\sigma_1 \leqslant 1 \end{cases} \tag{4.4}$$

Такое же соотношение между осями эллипса получено в работе [8] Анализ показывает, что при всевозможных σ_1, σ_2 и ν отрицательные значения выражения в фигурных скобках в неравенстве (4.3) возможны при

$$\Delta\theta < f_* < -\theta^* \tag{4.5}$$

Учитывая (1.2), получим

$$\theta_- - \theta^* \leqslant \Delta\theta \leqslant \theta_+ - \theta^*$$

откуда и из (4.5) следует, что выражение в фигурных скобках в (4.3) при любых допустимых $\Delta\theta$ и любых σ_1, σ_2, неотрицательно. Таким образом необходимое условие Вейерштрасса для эллиптического включения всегда выполнено.

В задаче о минимуме электрического сопротивления плоской области [4] условие Вейерштрасса может нарушаться, причем наиболее худший случай включения представляет собой эллипс, вырождающийся в щель. В задаче максимизации жесткости пластин справедлив аналогичный вывод о невозможности скользящих режимов [9].

В заключение отметим, что для задачи минимизации жесткости условие Вейерштрасса — Эрдмана будет выполняться на разрывах $\theta^*(x)$, а условие Вейерштрасса не будет выполняться в точках x, в которых $\theta_- \leqslant \theta^*(x) \leqslant \theta_+$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Прагер В.* Основы теории оптимального проектирования. М.: Мир, 1977. 102 с.
2. *Баничук Н. В.* Введение в оптимизацию конструкций. М.: Наука, 1986. 302 с.
3. *Петухов Л. В., Репин С. И.* Применение методов двойственности в задачах оптимизации формы упругих тел // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 5. С. 830—838.
4. *Лурье К. А.* Оптимальное управление в задачах математической физики. М.: Наука, 1975. 479 с.
5. *Петухов Л. В.* Об оптимальных задачах теории упругости с неизвестными границами // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 2. С. 231—236.
6. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
7. *Hardiman N. J.* Elliptic elastic inclusion in an infinite elastic plate // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1954. V. 7. Pt. 2. P. 226—230.
8. *Петухов Л. В.* Оптимальные упругие области максимальной жесткости // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 1. С. 88—95.
9. *Диденко Н. И., Самсонов А. И.* Об оптимизации упругих пластин Рейсснера и трехслойных пластин при сложном нагружении // Прикл. механика. 1988. Т. 24. Вып. 7. С. 89—95.

Ленинград

Поступила в редакцию 14.IV.1989