

УДК 539.3:534.1

© 1990 г.

А. Г. Горшков, Ю. В. Рачинский, Д. В. Тарлаковский

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ В АКУСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ С ГРАНИЦАМИ В ФОРМЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА

Предлагается метод решения ряда плоских нестационарных задач для акустической среды вне параболического цилиндра. При этом они сводятся к решению интегральных уравнений Вольтерры второго рода.

Коротковолновая асимптотика дифракционного поля в акустической среде приведена в [1, 2]. Для дифракции нестационарных волн аналитическое решение было получено [3, 4] только для случая плоской волны с фронтом, перпендикулярным плоскости симметрии цилиндра.

1. Постановка задачи и метод решения. Введем безразмерные переменные

$$X = \frac{X'}{A}, \quad Y = \frac{Y'}{A}, \quad t = \frac{t'c}{A}, \quad \varphi = \frac{\varphi'}{Ac}, \quad p = \frac{p'}{\rho c^2}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Здесь все переменные со штрихом — размерные, X' , Y' — декартовы координаты, A — характерный линейный размер, c — скорость распространения продольных волн, ρ — плотность среды, p' — давление, φ' — потенциал скоростей отраженных волн.

Отнесем среду к параболическим координатам ξ , η , так что кривая $\eta = \eta_0$ определяет заданную параболу, тогда

$$X = (\xi^2 - \eta^2)/2, \quad Y = \xi\eta, \quad \varepsilon = \eta_0^2/2$$

где ε — фокусное расстояние. В результате будем иметь следующую задачу для потенциала:

$$\begin{aligned} \partial^2 \varphi / \partial \xi^2 + \partial^2 \varphi / \partial \eta^2 &= (\xi^2 + \eta^2) \partial^2 \varphi / \partial t^2 \\ \varphi|_{t=0} = \partial \varphi / \partial t|_{t=0} &= 0, \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \varphi = 0 \\ (\kappa \varphi + \partial \varphi / \partial \eta)|_{\eta=\eta_0} &= Q(\xi, t) \end{aligned} \quad (1.1)$$

где κ — параметр задачи, $\kappa = 0$ при дифракции на абсолютно жесткой поверхности, $\kappa = \infty$ — на абсолютно мягкой поверхности. Функция Q характеризует неоднородность граничного условия и для задач дифракции имеет вид (φ_0 — потенциал падающей волны)

$$Q(\xi, t) = -(\kappa \varphi_0 + \partial \varphi_0 / \partial \eta)|_{\eta=\eta_0} \quad (1.2)$$

Применим преобразование Лапласа по времени к искомому решению и проведем разделение пространственных переменных в волновом уравнении (1.1)

$$\begin{aligned} \varphi^L(\xi, \eta, s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n^L(\eta, s) B_n^L(\xi, s) \\ \partial^2 B_n^L / \partial \xi^2 + (c_n - s^2 \xi^2) B_n^L &= 0 \\ \partial^2 \Phi_n^L / \partial \eta^2 - (c_n + s^2 \eta^2) \Phi_n^L &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

где индекс L означает трансформанту, s — параметр преобразования, c_n — константы разделения.

Уравнения (1.3) имеют однозначные решения [5] для следующих значений c_n :

$$c_n = (2n + 1) s, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.4)$$

С использованием асимптотического поведения функций Вебера было показано [6], что решение (1.3) для расходящейся волны должно иметь вид

$$\varphi^L(\xi, \eta, s) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(s) D_n(\xi \sqrt{2s}) D_{-n-1}(\eta \sqrt{2s}) \quad (1.5)$$

Здесь $D_\nu(z)$ — функции Вебера (параболического цилиндра), которые при целых неотрицательных индексах образуют полную, ортогональную систему функций в $L_2(-\infty, +\infty)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} D_n(z) D_m(z) dz = n! \sqrt{2\pi} \delta_{n,m} \quad (1.6)$$

и имеют следующее представление [7]:

$$D_n(z \sqrt{2}) = \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) z^{\gamma_n} \sum_{k=0}^{\lambda_n} A_{n,k} z^{2k} \quad (1.7)$$

$$A_{nk} = (n + \gamma_n - 1)!! (-1)^{\lambda_n - k} \lambda_n! 2^{k + \gamma_n/2} [(2(k + \gamma_n) - 1)!! (\lambda_n - k)! k!]^{-1}$$

$$\lambda_n = [n/2], \quad \gamma_n = n - 2\lambda_n$$

Ввиду затруднительности обращения выражений, содержащих в знаменателе функции $D_{-n-1}(\eta_0 \sqrt{2s})$ и их производные, не будем в явном виде искать изображения искомых решений. С учетом (1.4) и нулевых начальных условий из (1.3) получим гиперболические уравнения для оригиналов функций B_n^L, Φ_n^L :

$$\partial^2 B_n / \partial \xi^2 + (2n + 1) \partial B_n / \partial t - \xi^2 \partial^2 B_n / \partial t^2 = 0 \quad (1.8)$$

$$\partial^2 \Phi_n / \partial \eta^2 - (2n + 1) \partial \Phi_n / \partial t - \eta^2 \partial^2 \Phi_n / \partial t^2 = 0$$

Рассмотрим сначала решения первого уравнения (1.8). После перехода к характеристическим переменным $x = t - \xi^2/2, y = t + \xi^2/2$ получим уравнения типа Эйлера—Дарбу. Используя подстановку

$$B_n = (y - x)^{(1-\gamma_n)/2} \partial^{\lambda_n} Z_n(x, y) / \partial x^{\lambda_n}$$

можно показать, что его решение, ограниченное для $\xi = 0$, имеет вид

$$B_n(\xi, t) = \sum_{k=0}^{\lambda_n} A_{n,k} \xi^{2k + \gamma_n} \frac{d^k b_n(t - \xi^2/2)}{dt^k} \quad (1.9)$$

Здесь b_n — произвольная функция, обращающаяся в нуль для неположительных значений аргумента. Из (1.7), (1.9) можно заключить, что изображение по Лапласу $B_n(\xi, t)$ будет следующим:

$$B_n^L(\xi, s) = b_n^L(s) D_n(\xi \sqrt{2s}) s^{-\gamma_n/2} \quad (1.10)$$

Полученный результат полностью согласуется с видом трансформанты общего решения (1.5).

Для решения второго уравнения (1.8) предположим, что известны граничные значения искомой функции

$$\Phi_n(\eta_0, t) = d_n(t), \quad \partial \Phi_n(\eta_0, t) / \partial \eta = q_n(t) \quad (1.11)$$

Переходя в уравнении для Φ_n (1.8) к характеристическим переменным $x = t - \eta^2/2, y = t + \eta^2/2$, также получим уравнения типа Эйлера—Дар-

бу, для которого можно выписать функцию Римана [8]

$$V_n(x, y, x_0, y_0) = \frac{(y-x)^{1/2} (y-x_0)^{n/2}}{(y_0-x)^{(n+1)/2}} F\left(\frac{n+1}{2}, -\frac{n}{2}, 1, \sigma\right) \quad (1.12)$$

$$\sigma = (x-x_0)(y-y_0)/[(y-x_0)(x-y_0)]$$

где $F(\alpha, \beta, \gamma, \sigma)$ — гипергеометрическая функция. Пользуясь ее свойствами [7], функцию Римана (1, 12) можно представить так ($P_m^{(\alpha, \beta)}$ — полиномы Якоби):

$$V_{2m}(x, y, x_0, y_0) = \frac{(y-x)^{1/2} (y-x_0)^m}{(y_0-x)^{m+1/2}} P_m^{(0, -1/2)}(1-2\sigma) \quad (1.13)$$

$$V_{2m+1}(x, y, x_0, y_0) = \frac{(y-x)(y_0-x_0)^{1/2} (y-x_0)^m}{(y_0-x)^{m+3/2}} P_m^{(0, 1/2)}(1-2\sigma)$$

В соответствии с методом Римана [8] решение второго уравнения (1.8) в области $t \geq 0, \eta \geq \eta_0$ с учетом нулевых начальных условий можно записать в такой форме (фиг. 1):

$$\begin{aligned} \Phi_n(z, t) = & \frac{1}{2} \left[\left(\frac{z_0}{z}\right)^{(n+1)/2} d_n(t-z+z_0) - \int_0^{t-z+z_0} (d_n(\tau) A_n(t, \tau, z, z_0) + \right. \\ & \left. + q_n(\tau) B_n(t, \tau, z, z_0)) d\tau \right], \quad B_n(t, \tau, z, z_0) = \\ & = (2z_0)^{-1/2} V_n(\tau-z_0, \tau+z_0, t-z, t+z), \quad A_n(t, \tau, z, z_0) = \\ & = -(2z_0)^{1/2} \partial B_n / \partial z_0, \quad z = \eta^2/2, \quad z_0 = \eta_0^2/2 \end{aligned} \quad (1.14)$$

Полагая в (1.14) $z = z_0$, будем иметь интегральное соотношение между граничными значениями

$$\begin{aligned} d_n(t) + \int_0^t [\alpha_n(t-\tau) d_n(\tau) + \beta_n(t-\tau) q_n(\tau)] d\tau = 0 \\ \alpha_n(t) = A_n(t, 0, z_0, z_0), \quad \beta_n(t) = B_n(t, 0, z_0, z_0) \end{aligned} \quad (1.15)$$

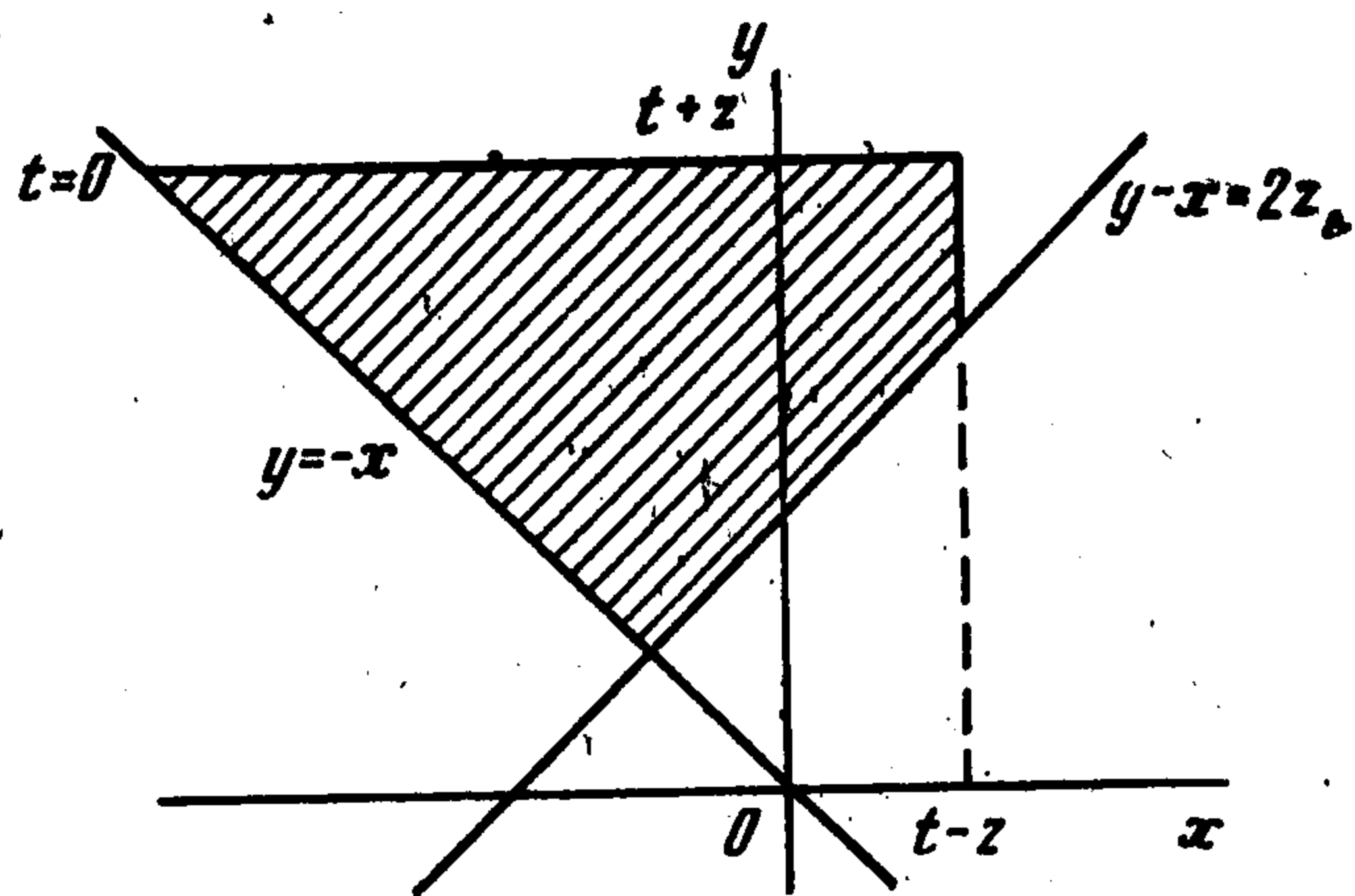
Для дальнейшего понадобятся явные выражения интегральных ядер в (1.15) при четных значениях n , которые можно получить из (1.13)—(1.15)

$$\beta_{2m}(t) = \frac{(\eta_0^2 - t)^m}{(\eta_0^2 + t)^{m+1/2}} P_m^{(0, -1/2)}(\lambda) \quad (1.16)$$

$$\alpha_{2m}(t) = \frac{(4m+1)t - \eta_0^2}{2(t^2 - \eta_0^4)} \eta_0 \beta_{2m}(t) -$$

$$- \frac{\eta_0^3 (\eta_0^2 - t)^{m-1}}{(\eta_0^2 + t)^{m+3/2}} \times$$

$$\times m t^2 (2m+1) P_{m-1}^{(1, 1/2)}(\lambda), \quad \lambda = \frac{t^2}{t^2 - \eta_0^2}$$



Фиг. 1

Теперь осталось так подобрать функции d_n, g_n , чтобы функция Φ удовлетворяла граничному условию (1.1). Используя (1.6), разложим изображение функции $Q(\xi, t)$ в ряд по функциям Вебера

$$Q^L(\xi, s) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^L(s) D_n(\xi \sqrt{2s}), \quad (1.17)$$

$$Q_n^L(s) = \frac{1}{n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega^L(w, s) D_n(w \sqrt{2}) dw, \quad \Omega^L(w, s) = Q^L(\xi, s) |_{\xi=w/\sqrt{s}}$$

По теореме о свертке оригиналов уравнение (1.15) может быть записано в пространстве изображений в следующей форме:

$$d_n^L(s) (1 + \alpha_n^L(s)) + q_n^L(s) \beta_n^L(s) = 0 \quad (1.18)$$

При этом изображения граничных значений искомой функции на основании формул (1.3), (1.10), (1.11) примут вид

$$\begin{aligned} \varphi^L(\xi, \eta_0, s) &= \sum_{n=0}^{\infty} U_n^L(s) D_n(\xi \sqrt{2s}) \\ \frac{\partial \varphi^L(\xi, \eta_0, s)}{\partial \eta} &= \sum_{n=0}^{\infty} G_n^L(s) D_n(\xi \sqrt{2s}) \\ U_n^L &= b_n^L d_n^L s^{-\gamma_n/2}, \quad G_n^L = b_n^L q_n^L s^{-\gamma_n/2} \end{aligned} \quad (1.19)$$

Тогда из формул (1.1), (1.17)—(1.19) получаем систему уравнений для изображений функций U_n, G_n

$$U_n^L(s) (1 + \alpha_n^L(s)) + G_n^L(s) \beta_n^L(s) = 0, \quad \kappa U_n^L(s) + G_n^L(s) = 0 \quad (1.20)$$

Если в (1.1) $\kappa \neq \infty$, то, исключая G_n^L , получим уравнение Вольтерры второго рода для функции U_n^L

$$U_n(t) + \int_0^t U_n(t-\tau) (\alpha_n(\tau) - \kappa \beta_n(\tau)) d\tau = - \int_0^t \beta_n(\tau) Q_n(t-\tau) d\tau \quad (1.21)$$

$$Q_n(t) = \frac{1}{n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega(w, t) D_n(w \sqrt{2}) dw$$

Выражение для $Q_n(t)$ получено из (1.17) при перемене порядка обратного преобразования Лапласа и интегрирования по w , что возможно при условии равномерной сходимости интеграла по s в некоторой правой полуплоскости. При этом оригинал функции $\Omega^L(w, s)$ для ряда конкретных задач может быть записан в явном виде.

В случае $\kappa = \infty$ функции $U_n(t)$ будут известны и из (1.20) получим уравнение для $G_n(t)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta_0} G_n(t) + \int_0^t \beta_n'(t-\tau) G_n(\tau) d\tau = \\ = -U_n'(t) - \int_0^t \alpha_n'(t-\tau) U_n(\tau) d\tau - \alpha_n(0) U_n(t) \end{aligned} \quad (1.22)$$

После нахождения из (1.21) или (1.22) функций U_n, G_n изображение потенциала в произвольной точке может быть определено на основе (1.3), (1.10), (1.14), (1.19)

$$\begin{aligned} \varphi^L(\xi, \eta, s) &= \frac{1}{2} \exp\left(-(\eta^2 - \eta_0^2) \frac{s}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ U_n^L(s) \left[\left(\frac{\eta_0}{\eta}\right)^{2(n+1)} - \right. \right. \\ &\left. \left. - A_n^L(s, 0, \eta^2/2, \eta_0^2/2) \right] - G_n^L(s) B_n^L(s, 0, \eta^2/2, \eta_0^2/2) \right\} D_n(\xi \sqrt{2s}) \end{aligned} \quad (1.23)$$

Однако свойства рядов (1.19), (1.23) не позволяют гарантировать их почленное обращение, так как в большинстве случаев они не сходятся равномерно по s в правой полуплоскости. Действительно, каждое слагаемое таких рядов дает множитель запаздывания $H(t - \xi^2/2)$, тогда как сумма его не имеет (H — единичная функция Хевисайда). Исключение составляют случаи дифракции плоской волны с фронтом, перпендикулярным оси

параболы, а также точка $\xi = 0$, соответствующая вершине параболы. Для нее из (1.7), (1.19) имеем

$$\varphi(0, \eta_0, t) = \sum_{m=0}^{\infty} (2m-1)!! (-1)^m U_{2m}(t) \quad (1.24)$$

Для нахождения граничных значений потенциала при $\xi \neq 0$ рассмотрим сначала случай задачи, обладающей симметрией относительно осевой плоскости параболического цилиндра. Тогда в (1.19) останутся члены рядов с четными индексами. Ограничимся значениями $\xi \geq 0$. Так как функции $D_{2k}(\sqrt{2w})$ образуют полную ортогональную систему в пространстве функций, интегрируемых с весом $w^{-1/2}$ на промежутке $(0, +\infty)$, то можно, разложив по этой системе функции $D_{2m}(w\sqrt{2})$, представить правую часть (1.19) в виде ряда по $D_{2k}(s^{1/4}\sqrt{2\xi})$

$$\varphi^L(\xi, \eta_0, s) = \sum_{k=0}^{\infty} v_{2k}^L(s) D_{2k}(s^{1/4}\sqrt{2\xi}) \quad (1.25)$$

$$v_{2k}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m, 2k} U_{2m}(t)$$

где $c_{2m, 2k}$ — коэффициенты разложения функций $D_{2m}(w\sqrt{2})$ по системе $D_{2k}(\sqrt{2w})$. Их значения могут быть получены на основе (1.7) и формул [9]:

$$c_{2m, 2k} = \frac{\exp(1/16)}{(2k)!} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^k A_{2m, i} A_{2k, j} \frac{(2(2i+j)-1)!!}{2^{2i+j}} D_{-2i-j-1/2}(1/2) \quad (1.26)$$

На основании соотношений операционного исчисления [10] и из (1.25) получаем представление потенциала на границе цилиндра

$$\varphi(\xi, \eta_0, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t v_{2k}'(\tau) R_{2k}(\xi, t-\tau) d\tau \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned} R_{2k}(\xi, t) &= L^{-1}[D_{2k}(s^{1/4}\sqrt{2\xi})s^{-1}] = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{j=0}^k \xi^j A_{2k, j} (2t)^{-j/2} \exp\left(-\frac{\xi^2}{32t}\right) D_{j-1}\left(\frac{\xi}{4\sqrt{t}}\right) \end{aligned}$$

где L^{-1} — оператор обратного преобразования Лапласа. При этом, для $\xi = 0$ формула (1.27) переходит в (1.24).

Проделав аналогичную процедуру для ряда (1.23), найдем значение потенциала в произвольной точке внешней среды.

Если же потенциал не является четной функцией по ξ , то необходимо рассмотреть следующую полную систему ортогональных функций интегрируемых с весом $|w|^{-1/2}$ на промежутке $(-\infty, +\infty)$

$$r_{2k}(w) = D_{2k}(\sqrt{2|w|}) \quad (1.28)$$

$$r_{2k+1}(w) = \begin{cases} D_{2k}(\sqrt{2w}), & w \geq 0 \\ -D_{2k}(\sqrt{-2w}), & w < 0 \end{cases}$$

После этого можно осуществить переразложение (1.19) по системе функций (1.28) и провести рассуждения, аналогичные вышеизложенным.

2. Примеры. Рассмотрим ряд конкретных задач с дифракции волн на абсолютно жесткой поверхности параболического цилиндра и некоторые другие нестационарные задачи.

Дифракция ступенчатой волны давления с фронтом, перпендикулярным плоскости симметрии цилиндра. В этом случае граничное условие (1.1) будет иметь вид

$$\frac{\partial \varphi(\xi, \eta_0, t)}{\partial \eta} = \eta_0 H(t - \xi^2/2) \quad (2.1)$$

$$Q^L(\xi, s) = \eta_0 D_0(\xi \sqrt{2s})/s.$$

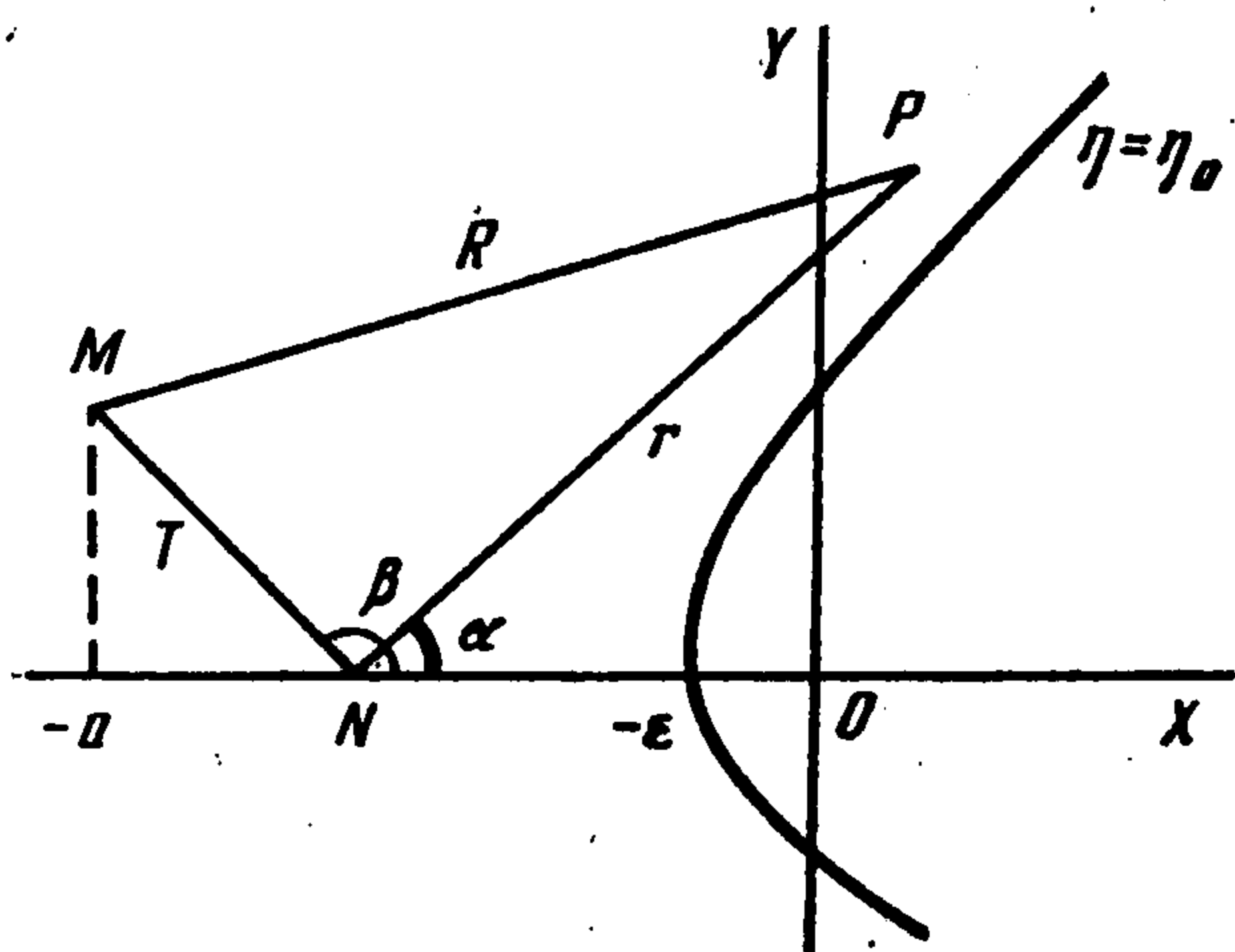
Тогда в разложении (1.17) останется единственное ненулевое слагаемое, соответствующее $n = 0$. Из (1.16), (1.21) получим уравнение

$$U_0(t) + \frac{\eta_0}{2} \int_0^t \frac{U_0(t-\tau) d\tau}{(\tau + \eta_0^2)^{3/2}} = -\eta_0 \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\tau + \eta_0^2}} \quad (2.2)$$

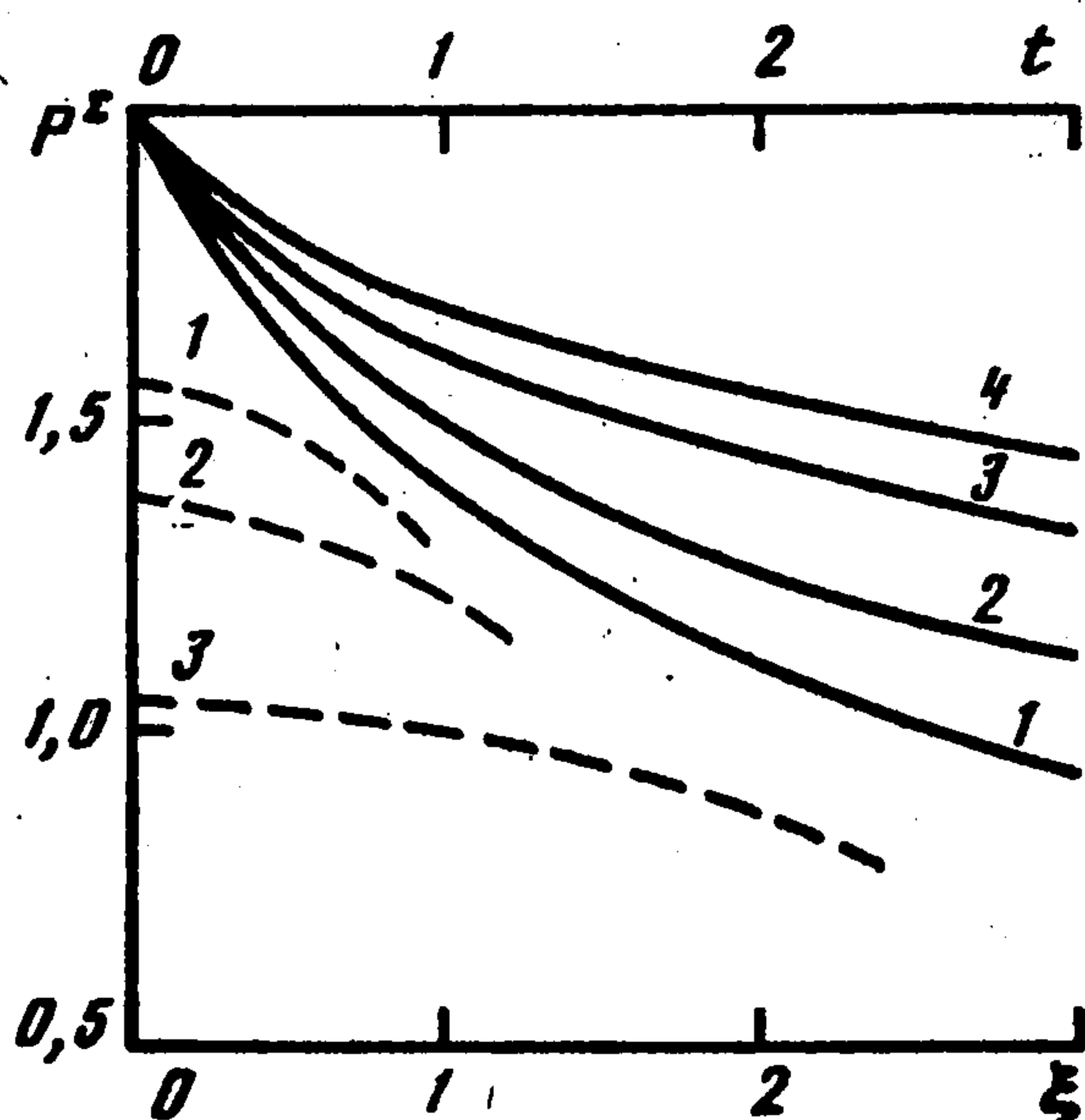
При этом из (1.19) следует, что давление на поверхности цилиндра зависит лишь от запаздывания $t - \xi^2/2$, а из (2.2) можно показать, что U_0 зависит от t/ε . На основании (2.2) получим уравнение для полного давления на поверхности цилиндра $\varepsilon = 1$

$$p^\Sigma(t) + \int_0^t \frac{p^\Sigma(t-\tau) dt}{\sqrt{2}(\tau + 2)^{3/2}} = 2 \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) полностью совпадает с полученным [2, 3] при помощи перехода к пространственно-временным переменным.



Фиг. 2



Фиг. 3

Дифракция цилиндрической волны на абсолютно жесткой поверхности параболического цилиндра. Пусть источник волны находится в точке $M(-a, b)$, причем $a > \varepsilon$, $b \geq 0$ (фиг. 2) и потенциал падающей волны имеет изображение по Лапласу

$$\varphi_0^L(\xi, \eta, s) = -W^L(s) K_0(sR) \quad (2.4)$$

$$R^2 = (\xi^2/2 + a + \eta^2/2)^2 - 2\xi\eta b + b^2 - 2a\eta^2$$

где K_ν — модифицированная функция Бесселя второго порядка, R — расстояние от источника до данной точки, W^L характеризует профиль волны за фронтом. В дальнейшем

$$W^L(s) = \sqrt{2(a-\varepsilon)/\pi s^{-3/2}} \quad (2.5)$$

что соответствует скачку давления на фронте $R^{-1/2}$ и его затухание со временем в любой точке пространства. С использованием интеграла Дюамеля могут быть проведены расчеты и с любыми другими изменениями давления во времени.

После подстановки (2.3) в (1.2), (1.17) вопрос сводится к обращению функции Макдональда с аргументом $(A_1 s^2 + b s^{3/2} + A_3 s + A_4)^{1/2}$, $A_i = A_i(w)$, которое выполнить элементарными методами сложно, если $b \neq 0$. Рассмотрим точку N на оси симметрии параболы, равноудаленную от ее вершины и источника, а также произвольную точку P .

Воспользуемся теоремой сложения цилиндрических функций [10] и представим потенциал падающей волны в форме ряда

$$\varphi_0^L(\xi, \eta, s) = -ks^{-3/2} \sum_{n=0}^{\infty} e_n K_n(sr) I_n(sT) \cos(n\beta - n\alpha) \quad (2.6)$$

$$k = \left[\frac{2(a-\varepsilon)}{\pi} \right]^{1/2}, \quad r^2 = c^2 + \left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{2} \right)^2 + c(\xi^2 - \eta^2) \equiv |PN|^2$$

$$e_n = \begin{cases} 2, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0, \end{cases} \quad c = \frac{b^2}{2(a-\varepsilon)} + \frac{a+\varepsilon}{2}, \quad T = c - \varepsilon$$

где I_n — модифицированные функции Бесселя первого рода, α и β — углы между отрезками PN , MN и осью X .

Для дальнейшего преобразования воспользуемся следующими тригонометрическими соотношениями:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= h/r, \quad \sin \alpha = \xi\eta/r, \quad h = (\xi^2 - \eta^2)/2 + c \\ \cos n\theta &= \sum_{k=0}^n C_{nk} \cos^k \theta, \quad \sin n\theta = \sin \theta \sum_{k=0}^n B_{nk} \cos^k \theta \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь C_{nk} , B_{nk} — константы тригонометрических соотношений [10].

Подстановка (2.6) в формулу (2.5) и дифференцирование последней по η приводит к следующему виду граничного условия (1.1), (1.2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_0} &= \frac{\eta_0}{\sqrt{s}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^1 E_{nk} I_n(sT) \frac{\xi^j h^k}{r^{k+j}} \left\{ \left[K_{n-1}(sr) + \frac{n}{sr} K_n(sr) \right] \times \right. \\ &\times \frac{T - \xi^2/2}{r} + K_n(sr) \left[\frac{j}{2\epsilon s} - \frac{k}{s(\xi^2/2 + T)} - \frac{(k+j)(\xi^2/2 - T)}{sr^2} \right] \Big\}_{\eta=\eta_0}, \\ E_{nkj} &= \begin{cases} e_n C_{nk} \cos n\beta, & j=0 \\ e_n B_{nk} \sin n\beta, & j=1 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.8)$$

На основании (1.2), (1.21), (2.7) для получения интегрального уравнения необходимо найти оригинал функции

$$\begin{aligned} \Omega^L(w, s) &= \eta_0 \sum_{n, k, j} E_{nkj} I_n(sT) e^{-sT} \frac{w^j \chi_+^k}{s^{(1-j)/2} \zeta^{k+j}} \times \\ &\times \{ [K_{n-1}(\zeta) e^{sT} + n\zeta^{-1} K_n(\zeta) e^{sT}] \chi_- \zeta^{-1} + K_n(\zeta) e^{sT} \times \\ &\times \left[\frac{j}{2\epsilon s} - \frac{k}{\chi_+} + \frac{(k+j)\chi_-}{\zeta^2} \right] \}, \quad \chi_{\pm} = sT \pm w^2/2 \\ \zeta &= T [(s + \gamma w^2)^2 - \sigma^2 w^4]^{1/2}, \quad \sigma = \frac{\epsilon \sqrt{c}}{2T^2}, \quad \gamma = \frac{c + \epsilon}{2T^2} \end{aligned} \quad (2.9)$$

В (2.8) произведена такая перегруппировка сомножителей, чтобы обращение могло быть легко сделано для каждого из них в отдельности на основании известных формул [10].

Излучение волны параболическим цилиндром при заданном его поступательном движении. Пусть в декартовой системе координат скорость цилиндра имеет компоненты $V_x(t)H(t)$, $V_y(t)H(t)$, тогда граничное условие (1.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \partial \varphi / \partial \eta \Big|_{\eta=\eta_0} &= (V_x(t) \cos \theta + V_y(t) \sin \theta) \sqrt{\xi^2 + \eta_0^2} H(t) \\ \cos \theta &= -2 [2\epsilon / (8\epsilon + \xi^2)]^{1/2}, \quad \sin \theta = \xi (8\epsilon + \xi^2)^{-1/2} \end{aligned} \quad (2.10)$$

где θ — угол между вектором нормали к цилиндру $\eta = \eta_0$ и осью X .

При этом из (1.1), (1.17), (2.9) и формул операционного исчисления [10] можно получить, что

$$\begin{aligned} \Omega(w, t) &= F_1(w, t) * [1/2 w V_y(t) * (\pi t)^{-1/2} - \sqrt{2\epsilon} V_x(t)] \\ F_1(w, t) &= \delta(t) + 3w^2 (16\epsilon)^{-1} \exp(-5t_1) [I_1(3t_1) + I_0(3t_1)] \\ t_1 &= w^2 t (16\epsilon)^{-1} \end{aligned} \quad (2.11)$$

После решения интегральных уравнений (1.21) с использованием (2.11) давление на поверхности цилиндра может быть вычислено на основании (1.24), (1.27).

Расширение параболической полости под действием внезапно приложенного давления. Пусть давление постоянно вдоль границы параболического цилиндра и равно $p(t)H(t)$, тогда из (1.1), (1.17) следует [8]

$$\kappa = \infty, \quad Q^L(\xi, s) = -\frac{p^L(s)\kappa}{s}, \quad U_{2m}(t) = -\int_0^t \frac{p(\tau) d\tau}{2^m m!}$$

Из уравнения (1.22) определим $G_{2m}(t)$. Скорость движения головной точки параболы $\xi = 0$ будет определяться из (1.19)

$$V(0, \eta_0, t) \equiv \frac{1}{\eta_0} \frac{\partial \varphi(0, \eta_0, t)}{\partial \eta} = \frac{1}{\eta_0} \sum_{m=0}^{\infty} G_{2m}(t) (2m-1)!! (-1)^m$$

Дифракция цилиндрической волны от источника, лежащего в плоскости симметрии параболического цилиндра с абсолютно жесткой поверхностью. Пусть падающая волна описывается уравнениями (2.4), (2.5). Решение задачи можно получить, если воспользоваться формулами (2.6)–(2.9), положив $b = 0$. Однако выкладки будут гораздо проще, если напрямую подставить (2.4) в (1.2), (1.17), и тогда получим

$$\Omega^L(w, s) = \sqrt{\frac{2T_1}{\pi}} \frac{K_1(u)}{u} \left(\sqrt{s} T_1 - \frac{w^2}{2\sqrt{s}} \right)$$

$$u = T_1 [(s + \gamma_1 w^2)^2 - \sigma_1 w^4]^{1/2}, \quad T_1 = a - \varepsilon \quad (2.12)$$

$$\sigma_1 = \frac{\sqrt{a}\eta_0}{\sqrt{2}T_1^2}, \quad \gamma_1 = \frac{a + \varepsilon}{2T_1^2}$$

Ввиду четности всех функций задачи по ξ (1.21) следует ограничиться лишь $n = 2m$. Тогда из (2.12) и формул [10] можно получить явное выражение для функций, определяющих правую часть интегрального уравнения (1.21).

$$Q_{2m}(t) = \frac{\sqrt{2}\eta_0}{\pi\sqrt{\pi T_1}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_0^\infty \exp(-\gamma_1 w^2 T_1) G(\tau, w) D_{2m}(w\sqrt{2}) dw \quad (2.13)$$

$$G(t, w) = \exp(-\gamma_1 w^2 t) [(t + T_1)(t^2 + 2tT_1)^{-1/2} \operatorname{ch} v - (1 + 2\gamma_1 T_1)(2\sigma_1 T_1)^{-1} \operatorname{sh} v,$$

$$v = \sigma_1 w^2 (t^2 + 2tT_1)^{1/2}$$

Исходя из вида уравнений (1.21), (2.13), можно показать, что функция U_{2m} зависит лишь от отношений t/ε , a/ε . Поэтому достаточно решить задачу для $\varepsilon = 1$.

При решении интегрального уравнения Вольтерры (1.21) использовались квадратурные формулы Симпсона и трапеций. Отрезок времени $[0, t_m]$ разбивался на N_0 равных интервалов и последовательно находились значения функции в каждом узле. В расчетах принималось, что $t_m = 3$, $N_0 = 50$ в рядах (1.24), (1.27) удерживалось шесть членов.

На фиг. 3 сплошными линиями приведены графики зависимости полного давления в вершине параболы $\varepsilon = 1$ для различных положений источника. Вычисления проводились на основании (1.24). Значения давления, вычисленные по пяти и по шести членам ряда, различались не более чем на 0,1%, что свидетельствует о хорошей сходимости ряда. При $a \geq 9$ значения давления отличаются от давления в случае плоской волны не более чем на 3%. Кривые 1–4 соответствуют следующим положениям источника: $a = 1,5; 2; 3; 9$. Как и следует из физических соображений, в начальный момент времени давление в лобовой точке удваивается.

На фиг. 3 штриховые кривые 1–3 показывают распределение давления по поверхности параболического цилиндра в моменты времени $t = 0,6; 1,2; 3$. При этом источник цилиндрической волны находится в плоскости симметрии и $a = 2$. Вычисления проводились на основании разложения (1.27) с сохранением четырех слагаемых.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов В. И. Коротковолновая асимптотика дифракционного поля в тени параболического цилиндра // Радиотехника и электроника. 1960. Т. 5. № 3. С. 393–402.
2. Иванов В. И. Дифракция коротких волн на параболическом цилиндре // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1962. Т. 2. № 2. С. 241–254.
3. Friedlander F. G. The reflection of sound pulses by convex parabolic reflectors // Proc. Camb. Phil. Soc. 1941. V. 37. Pt 2. P. 134–149.
4. Chester W. The reflection of a transient pulse by a parabolic cylinder and a paraboloid of revolution // Quart. J. Mech. 1952. V. 5. No. 2. P. 196–205.
5. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 886 с.
6. Thau S. A., Rao Y.-H. Wave function expansions and perturbation method for the diffraction of elastic waves by a parabolic cylinder // J. Appl. Mech. E. Ser. 1967. V. 34. No. 4. P. 915–920.
7. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. А. Абрамовица и И. Стигана. М.: Наука, 1979. 830 с.
8. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1957. 443 с.
9. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
10. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. М.: Высш. шк., 1965. 467 с.