

УДК 539.3

© 1990 г.

А. В. Чигарев

МЕТОД ОСРЕДНЕНИЯ В ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ СТРУКТУРНО НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

Рассматривается вариант метода осреднения для построения приближенных решений динамических уравнений теории упругости неоднородной среды как синтез метода последовательных приближений с вероятностным подходом. Для нахождения нулевого приближения материальные коэффициенты среды полагаем случайными функциями пространственных координат, одна из реализаций которых — упругие модули и плотность данной конкретной среды. В нулевом приближении рассматриваемая неоднородная среда описывается эффективной средой, обладающей пространственной дисперсией. Первое приближение учитывает влияние структурных особенностей данной конкретной реализации на структуру поля перемещений распространяющихся волн. Даются оценки погрешности нулевого приближения.

Динамика неоднородных сред описывается уравнениями с переменными коэффициентами, методы приближенного решения которых интенсивно развиваются. Различные варианты метода осреднения рассмотрены, например, в [1—5]. Изложена [1] схема применения метода осреднения для дискретно слоистых конструкций. В данной работе аналогичная схема развивается для динамических уравнений теории упругости неоднородных сред.

1. В линейной неоднородной среде связь между тензорами напряжения σ_{ij} и деформации e_{ij} определяется обобщенным законом Гука

$$\sigma_{ij} = \lambda_{ijkl}(x) e_{kl}, \quad e_{kl} = 1/2 (u_{k,l} + u_{l,k}) \quad (1.1)$$

где λ_{ijkl} — тензор упругих коэффициентов, компоненты которого зависят от пространственных координат x_i ($i = 1, 2, 3$).

Распространение гармонических волн описывается уравнениями

$$(\lambda_{ijkl}(x) u_{k,l})_{,j} + \omega^2 \rho(x) u_i = 0 \quad (1.2)$$

Здесь $\rho(x)$ — плотность среды, u_i — вектор перемещений. Граничные условия или условия на бесконечности — детерминированные и ставятся обычным образом для каждой конкретной задачи.

В прямых задачах $\lambda_{ijkl}(x)$, $\rho(x)$ — заданные конкретные функции от x_i . Положим, что данные $\lambda_{ijkl}(x)$, $\rho(x)$ являются реализациями случайных полей $\Lambda_{ijkl}(x)$, $P(x)$, задаваемых своими моментами. В дальнейшем случайные функции и их реализации будем обозначать одними и теми же буквами, что общепотребительно в теории распространения волн и не приводит к ошибкам. Умножение $\lambda_{ijkl}(x)$, $\rho(x)$ на некоторую полевую функцию $f(x)$ будем рассматривать как действие операторов $\lambda_{ijkl}(x)$, $\rho(x)$ на $f(x)$. Запишем символическое операторное представление

$$\lambda_{ijkl} = \Lambda_{ijkl}^* + \Lambda'_{ijkl}, \quad \rho = \rho^* + \rho', \quad \Lambda'f = \lambda f - \Lambda^*f \quad (1.3)$$

где Λ_{ijkl}^* , ρ^* — эффективные операторы упругости, плотности, вводимые соотношениями

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \langle \lambda_{ijkl} e_{kl} \rangle = \Lambda_{ijkl}^* \langle e_{kl} \rangle, \quad \langle \rho u_i \rangle = \rho^* \langle u_i \rangle \quad (1.4)$$

Средние поля $\langle \sigma_{ij} \rangle$, $\langle e_{ij} \rangle$, $\langle u_i \rangle$ определяются для эффективной среды, характеризуемой Λ_{ijkl}^* , ρ^* . Представление (1.3) не приводит к ошибкам, так как во всех вычислениях операторы рассматриваются совместно с функциями, к которым они применяются.

Согласно (1.4), решение уравнений (1.2) представим в виде

$$u_i(x) = \langle u_i(x) \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} u_i^{(n)}(x) \quad (1.5)$$

Подставляя (1.5) в (1.2), получим

$$\begin{aligned} (\Lambda_{ijkl}^* u_{k,l}^{(n)})_{,j} + \rho^* \omega^2 u_i^{(n)} &= - (\Lambda'_{ijkl} u_{k,l}^{(n-1)})_{,j} - \rho' \omega^2 u_i^{(n-1)}, \\ n = 0, 1, 2, \dots, \quad u_i^{(-1)} &= 0, \quad u_i^{(0)} = \langle u_i \rangle \end{aligned} \quad (1.6)$$

Запишем уравнение (1.6) в прямых обозначениях которые будем использовать и дальше, переходя при необходимости к индексным представлениям:

$$L^* u^{(n)} = L' u^{(n-1)}, \quad L_{ik}^* = \nabla_j \Lambda_{ijkl}^* \nabla_l + \rho^* \omega^2 \delta_{ik}, \quad (1.7)$$

$$L_{ik}' = \nabla_j \Lambda'_{ijkl} \nabla_l + \omega^2 \rho' \delta_{ik}$$

Решение уравнения (1.7) имеет вид

$$\begin{aligned} u^{(n)} &= -(L^*)^{-1} L' u^{(n-1)} = (-1)^n M^{(n)} \langle u \rangle, \\ M^{(n)} &= (L^*)^{-1} L' \dots (L^*)^{-1} L' \end{aligned} \quad (1.8)$$

где L^* — интегродифференциальный оператор, $(L^*)^{-1}$ — оператор обратный L^* .

Решение (1.5) при учете (1.8) запишем в виде

$$u(x) = \langle u(x) \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n M^{(n)} \langle u(x) \rangle \quad (1.9)$$

Оператор $(L^*)^{-1}$ при помощи тензора Грина $G^*(x, x_1)$ эффективной среды представляется следующим образом:

$$(L^*)^{-1} f(x) = \int G^*(x, x_1) f(x_1) d^3 x_1, \quad L^* G^*(x, x_1) = \delta(x - x_1) \quad (1.10)$$

Ряд (1.9) при учете (1.10) есть ряд рассеяния для задачи о рассеянии поля $\langle u \rangle$ на флуктуациях Λ' , ρ' неоднородной среды. Здесь n -й член ряда (1.9) соответствует учету n -кратного рассеяния поля $\langle u \rangle$ на флуктуациях неоднородности. При заданных функциях $\lambda(x)$, $\rho(x)$ и известных Λ^* , ρ^* (или G^*) ряд (1.9) дает решение уравнений (1.3).

Эквивалентным рассмотренному является способ перехода от уравнения (1.3) к интегральному

$$u(x) = \langle u(x) \rangle - \int G^*(x, x_1) [(\Lambda' e)_{,x_1} + \rho' \omega^2 u](x_1) d^3 x_1 \quad (1.11)$$

и получаемому из него дифференцированием по x

$$e(x) = \langle e(x) \rangle - \int G_{,x}^*(x, x_1) [(\Lambda' e)_{,x_1} + \rho' \omega^2 u](x_1) d^3 x_1 \quad (1.12)$$

Для учета многократного рассеяния перейдем в (1.12) от переменных e , Λ' к E , γ согласно формулам [7]:

$$\begin{aligned} E_{ij} &= B_{ijkl} e_{kl}, \quad \gamma_{njst} = \lambda'_{njkl} B_{klst}^{-1} \\ B_{imkl} &= 2^{-1} (\delta_{ik} \delta_{ml} + \delta_{il} \delta_{mk}) + G_{in, mj}^{(s)} \lambda'_{njkl} \end{aligned}$$

$G_{in, mj}^*(x, x_1) = G_{in, mj}^{(r)*}(x, x_1) + G_{in, mj}^{(s)} \delta(x - x_1)$ ($\gamma_{njst}(x)$ — тензор упругой поляризуемости среды).

Уравнение (1.12) в новых переменных имеет вид

$$E(x) = \langle e(x) \rangle - \int [G_{,xx}^{(r)*}(x, x_1) (\gamma E)(x_1) + G_{,x}^{(r)*}(x, x_1) \omega^2 (\rho' u)(x_1)] d^3x_1 \quad (1.13)$$

Систему интегральных уравнений (1.11), (1.13) запишем в матричной форме. Обычным образом перейдем к матрицам и векторам [8]

$$\begin{aligned} (11) &\rightarrow 1, (22) \rightarrow 2, (33) \rightarrow 3, (23) = (32) \rightarrow 4 \\ (31) = (13) &\rightarrow 5, (12) = (21) \rightarrow 6, \alpha, \beta = 1, \dots, 6 \\ \lambda_{ijkl} &= \lambda_{\alpha\beta}, \gamma_{ijkl} = \gamma_{\alpha\beta}, G_{ij,m}^* = g_{\alpha m}, m = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

где $(ij) \rightarrow \alpha, (kl) \rightarrow \beta$. Введем обозначения [8] (индекс T означает транспонирование):

$$\begin{aligned} \Phi &= \text{col} \{u_1, u_2, u_3, e_1 \dots e_6\}, \Psi = \text{col} \{u_1, u_2, u_3, E_1, \dots, E_6\} \\ \gamma_{\alpha\beta}^{(0)} &= \begin{vmatrix} \omega^2 \rho' I & O \\ O & \gamma \end{vmatrix}, B_{\alpha\beta}^{(1)} = \begin{vmatrix} I & O \\ O & B \end{vmatrix}, \lambda_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} \omega^2 \rho' I & O \\ O & \lambda \end{vmatrix} \\ \gamma &= \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \dots & \gamma_{16} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{61} & \dots & \gamma_{66} \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} B_{11} & \dots & B_{16} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{61} & \dots & B_{66} \end{vmatrix}, \lambda = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{16} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{61} & \dots & \lambda_{66} \end{vmatrix} \\ g_{\alpha\beta} &= \begin{vmatrix} g_{11} & \dots & g_{19} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{91} & \dots & g_{99} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{\alpha\beta}^{(1)} & g_{\alpha\beta}^{(2)r} \\ g_{\alpha\beta}^{(2)} & g_{\alpha\beta}^{(3)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} G_{in}^* & G_{in,m}^{*r} \\ G_{in,m}^* & G_{in,mj}^{(r)*} \end{vmatrix} \\ g_{\alpha\beta}^{(1)} &= G_{in}^* (\alpha = i = 1, 2, 3; \beta = n = 1, 2, 3), g_{\alpha\beta}^{(2)} = G_{in,m}^* \\ (\alpha = m = 1, 2, 3; (in) &\rightarrow \beta = 4, \dots, 9), g_{\alpha\beta}^{(3)} = G_{in,mj}^{(r)*} \\ ((in) &\rightarrow \alpha, (mj) \rightarrow \beta; \alpha, \beta = 4, \dots, 9) \end{aligned}$$

Здесь I — единичная, O — нулевая (6×6) -матрицы.

Система уравнений (1.11), (1.12) приводится к виду

$$\Psi_i(x) = \langle \Phi(x) \rangle - \int g(x, x_1) \gamma^{(0)}(x_1) \Psi(x_1) d^3x_1 \quad (1.14)$$

Решая это уравнение последовательными итерациями, представим результат в виде ряда

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \langle \Phi(x) \rangle - \int g(x, x_1) (\gamma^{(0)} \langle \Phi \rangle)(x_1) d^3x_1 + \\ &+ \iint g(x, x_1) \gamma^{(0)}(x_1) g(x_1, x_2) \gamma^{(0)}(x_2) \langle \Phi(x_2) \rangle d^3x_1 d^3x_2 - \dots \end{aligned} \quad (1.15)$$

Осредняя (1.15), получим

$$\begin{aligned} \langle \Psi(x) \rangle &= \langle \Phi(x) \rangle - \int g(x, x_1) \langle \gamma^{(0)}(x_1) \rangle \langle \Phi(x_1) \rangle d^3x_1 + \\ &+ \iint g(x, x_1) g(x_1, x_2) \langle \gamma^{(0)}(x_1) \gamma^{(0)}(x_2) \rangle \langle \Phi(x_2) \rangle d^3x_1 d^3x_2 - \dots \end{aligned}$$

Непосредственно проверяется, что этот ряд является решением уравнения типа Дайсона [6,7] для неоднородной упругой среды

$$\langle \Psi(x) \rangle = \langle \Phi(x) \rangle + \iint g(x, x_1) Q(x_1, x_2) \langle \Psi(x_2) \rangle d^3x_1 d^3x_2 \quad (1.16)$$

Ядро $Q(x_1, x_2)$ массового оператора Q представляет собой ряд по моментам $\gamma^{(0)}(x)$ ($\langle \gamma^{(0)}(x) \rangle = 0$)

$$Q(x_1, x_2) = g(x_1, x_2) \langle \gamma^{(0)}(x_1) \gamma^{(0)}(x_2) \rangle - \dots \quad (1.17)$$

Интегральное уравнение (1.14) статистически нелинейное, поэтому получение на его основе уравнений для моментов поля Ψ приводит к бесконечной зацепляющейся системе уравнений.

Введем эффективные операторы $\Lambda^*, \rho^*, \Gamma^{(0)*}$ соотношениями (1.3) и

$$\langle \gamma^{(0)} \Psi \rangle = \Gamma^{(0)*} \langle \Psi \rangle$$

Проводя осреднение в уравнении (1.14), получим

$$\langle \Psi(x) \rangle = \langle \Phi(x) \rangle - \int g(x, x_1) [\Gamma^{(p)*} \langle \Psi \rangle] (x_1) d^3x_1 \quad (1.18)$$

Сравнивая уравнения (1.16), (1.18), находим

$$\begin{aligned} \Gamma^{(p)*} f(x) &= \int \Gamma^{(p)*}(x, x_1) f(x_1) d^3x_1 \\ \Gamma^{(p)*}(x, x_1) &= -g(x, x_1) \langle \gamma^{(p)}(x) \gamma^{(p)}(x_1) \rangle + \dots \end{aligned} \quad (1.19)$$

Из формул

$$\Psi = B^{(1)}\Phi, \quad \gamma^{(p)} = \lambda^{(p)} (B^{(1)})^{-1}$$

получим формулы связи между операторами Λ^* , Γ^* :

$$\Lambda^* = \lambda_0 - \Gamma^* (1 - G^{(s)}\Gamma^*)^{-1} \quad (1.20)$$

где λ_0 — эффективный статический модуль упругости, $G^{(s)}$ — сингулярная составляющая тензора Грина [7]. Для статистически изотропной однородной среды

$$\begin{aligned} T^* f(x) &= \int T^*(x - x_1) f(x_1) d^3x_1, \quad T^* = \Gamma^*, \rho^*, \Lambda^* \\ \Gamma^*(x - x_1) &= -G_{,xx}^{(r)}(x - x_1) \langle \gamma(x) \gamma(x_1) \rangle + \dots \\ \rho^*(x - x_1) &= -G^{(r)}(x - x_1) \langle \rho'(x) \rho'(x_1) \rangle + \dots \\ \langle \varphi'(x) \varphi'(x_1) \rangle &= R\varphi(|x - x_1|), \quad \varphi = \lambda', \rho', \gamma \\ \langle \gamma \rangle &= 0, \quad \langle \rho'(x) \lambda'(x_1) \rangle = 0 \end{aligned} \quad (1.21)$$

Из формул (1.20), (1.21) следует, что эффективная среда учитывает пространственную дисперсию.

Операторы Γ^* , ρ^* , Λ^* представляют ряды по моментам $\gamma(x)$, $\rho(x)$ и в общем случае записываются в виде

$$\Lambda^* f(x) = \int \Lambda^*(x - x_1) f(x_1) d^3x_1, \quad \Lambda^*(x - x_1) = \lambda_0 \delta(x - x_1) + \Lambda^d(x - x_1)$$

$$\Gamma_{(x, x_1)}^* = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \langle \gamma^{(n)} \rangle, \quad \rho^*(x, x_1) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \langle \rho^{(n)} \rangle$$

$$\gamma^{(n)} = \int \dots \int \gamma(x) \gamma(x_1) \dots \gamma(x_n) G_{,xx}^{(r)}(x, x_1) \dots G_{,xx}^{(r)}(x_{n-1}, x_n) d^3x_2 \dots d^3x_n$$

$$\rho^{(n)} = \int \dots \int \rho'(x) \rho'(x_1) \dots \rho'(x_n) G(x, x_1) \dots G(x_{n-1}, x_n) d^3x_2 \dots d^3x_n$$

Здесь λ_0 — упругие коэффициенты, которые находятся из условия $\langle \gamma_{ijkl}(x) \rangle = 0$.

Для двухфазных композитов и однофазных поликристаллов упругие коэффициенты λ_0 удовлетворяют алгебраическим уравнениям, аналогичным уравнениям метода самосогласованного поля [7]. Из (1.26) следует, что λ_0 представляют собой статическую локальную часть эффективных упругих моделей. Член $\Lambda^d(x - x_1)$ учитывает многократное рассеяние, затухание, дисперсию скорости волн в эффективной среде.

2. После того как операторы упругости Λ^* и плотности ρ^* эффективной среды в (1.5) определены, переходим к нахождению нулевого $\langle u \rangle$ и высших $u^{(n)}$ приближений в рядах (1.4), согласно уравнениям (1.6), (1.7). Собственными функциями операторов (1.26) являются $\exp(iqx)$, поэтому нулевое приближение $\langle u \rangle$ представим в виде

$$\langle u(x) \rangle = \sum_n a_n(q_n) \exp(iq^{(n)}x) \quad (2.1)$$

где волновые числа $q^{(n)}$ — корни дисперсионного уравнения

$$|q_j \Lambda_{ijkl}(q) q_l - \rho^*(q) \omega^2 \delta_{ik}| = 0 \quad (2.2)$$

В общем случае, $q^{(n)}$ комплексные

$$q_\alpha^{(n)}(\omega) = \kappa_\alpha^{(n)}(\omega) + i\delta_\alpha^{(n)}(\omega), \quad \alpha = l, t \quad (2.3)$$

Здесь $\delta^{(n)}(\omega) = \text{Im } q^{(n)}$ характеризует затухание n -й ветви за счет рассеяния, фазовая $c_{\Phi\alpha}^{(n)} = \omega (\kappa_{\alpha}^{(n)})^{-1}$ и групповая скорости $c_{\Gamma\alpha}^{(n)} = (d\kappa_{\alpha}^{(n)}/d\omega)^{-1}$ n -й ветви вычисляются по известной действительной части волнового числа: $\text{Re } q_{\alpha}^{(n)} = \kappa_{\alpha}^{(n)}$.

Распределение корней (2.2), (2.3) в комплексной плоскости q зависит от вида корреляционных функций полей $\lambda(x)$, $\rho(x)$, характеризующих структуру среды.

Высшие приближения $u^{(n)}$ ($n = 1, 2, \dots$) находятся из уравнений (1.6), (1.7) согласно формулам (1.8), (1.10) через тензор Грина эффективной среды. Для статистически изотропной однородной среды выражение для $G^* = \langle G \rangle$ получено в работе [7]

$$\begin{aligned} \langle G_{ij}(r) \rangle = & -\frac{\delta_{ij}}{4\pi r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_t^{(n)}}{\chi_t'(q_t^{(n)})} \exp(iq_t^{(n)}r) + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[\frac{1}{4\pi r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_{\alpha}^{(n)}}{\chi_{\alpha}'(q_{\alpha}^{(n)})} \exp(iq_{\alpha}^{(n)}r) \right]_t \end{aligned} \quad (2.4)$$

Формула (2.4) обобщает выражение для динамического тензора Грина G_{ij}^0 однородной изотропной среды.

Таким образом, формулы (1.8), (1.10), (2.4) позволяют в принципе находить все приближения в рядах (1.4), (1.9). Однако выражения записываются в интегральной форме, что значительно затрудняет их практическое применение.

Во многих задачах ограничиваются нахождением нулевого приближения, т. е. приближением эффективной среды [8]. В этом случае $\langle u \rangle$ представляет собой оценку точного решения для данной реализации. Погрешность этой оценки для конкретной реализации определяется выражением $|u_i - \langle u_i \rangle|$. В качестве оценки погрешности, пригодной для множества реализаций, можно взять $\langle (u_i')^2 \rangle^{1/2}$, представляющую собой среднеквадратическое отклонение компонент поля u_i от $\langle u_i \rangle$.

3. Положим снова, что $\lambda(x)$, $\rho(x)$ — случайные функции, тогда

$$u_i' = u_i - \langle u_i \rangle \quad (3.1)$$

— случайные погрешности приближения реализаций u_i с помощью $\langle u_i \rangle$.

Корреляционный тензор

$$V_{ij}(x, x_1) = \langle u_i'(x) u_j'(x_1) \rangle \quad (3.2)$$

определяет статистические зависимости между погрешностями $u_i'(x)$ ($i = 1, 2, 3$) в разных точках. Его диагональные элементы — дисперсии — определяют средние квадраты погрешностей u_i при помощи нулевого приближения $\langle u_i \rangle$.

Тензор $V_{ij}(x, x_1)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} V_{ij}(x, x_1) & \approx K_{ij}(x, x_1) - I_{ij}(x, x_1) \\ K_{ij}(x, x_1) & = \langle u_i(x) u_j(x_1) \rangle, \quad I_{ij}(x, x_1) = \langle u_i(x) \rangle \langle u_j(x_1) \rangle \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $K_{ij}(x, x_1)$ — функция когерентности. При $i = j$, $x = x_1$ величина I_{ii} определяет интенсивность среднего поля $\langle u \rangle$, K_{ii} — среднюю интенсивность поля u , V_{ii} — интенсивность флуктуаций (погрешностей). При распространении волны в неоднородной среде происходит трансформация энергии регулярной $\langle u \rangle$ части во флуктуационную u' . В случае задачи о падении плоской волны на неоднородное полупространство K_{ii} остается постоянной, I_{ii} убывает, а V_{ii} растет. Это свидетельствует о том, что по-

Точность нулевого приближения $\langle u \rangle$ с расстоянием растет за счет рассеяния, поэтому необходимо учитывать высшие приближения $u^{(n)}$.

Записывая ряды (1.15) в двух разных точках x' , x'' , перемножая их и осредняя, получим уравнения типа Бете — Солпитера [6] для корреляционного тензора $V(x', x'')$, которое в лестничном приближении имеет вид

$$V(x', x'') = I(x', x'') + \iint \langle G(x', x_1) \rangle \langle \bar{G}(x'', x_2) \rangle \times \\ \times R(x_1, x_2) V(x_1, x_2) d^3x_1 d^3x_2 \quad (3.4)$$

где $R(x_1, x_2)$ — корреляционный тензор материальных коэффициентов среды, чертой обозначается комплексное сопряжение.

Уравнения (1.6) или (1.7) при $n = 0$, или (1.18) для нулевого приближения $\langle u \rangle$ и уравнения для погрешностей (дисперсий) $V_{ii}(x)$ в (3.4) образуют замкнутую систему уравнений.

4. Рассмотрим применение метода для нахождения приближенных решений уравнений динамики слоистой среды, описываемой одномерной моделью:

$$(\lambda(x) u_{,x})_{,x} + \omega^2 \rho(x) u = 0 \quad (4.1)$$

Используя разложения (1.3), (1.5), получим уравнения для $\langle u \rangle$ и $u^{(1)}$:

$$(\Lambda^* \langle u \rangle_{,x})_{,x} + \omega^2 \rho^* \langle u \rangle = 0 \quad (4.2)$$

$$(\Lambda^* u^{(1)}_{,x})_{,x} + \omega^2 \rho^* u^{(1)} = -[(\Lambda' \langle u \rangle_{,x})_{,x} + \omega^2 \rho' \langle u \rangle] \quad (4.3)$$

Представляет интерес рассмотреть применение метода к средам, для которых реализации упругих коэффициентов могут быть записаны в явном виде и содержат коэффициенты, которые для нахождения нулевого приближения можно положить случайными. Такие случайные функции называются квазидетерминированными [10].

Рассмотрим двухкомпонентную слоистую среду:

$$\varphi(x) = D_+ + D_- (-1)^{n(-N, x)}, \quad D_{\pm} = 1/2 (\varphi_2 \pm \varphi_1) \quad (4.4)$$

$$\varphi(x) = \lambda(x), \rho(x); \varphi_i = \lambda_i, \rho_i$$

где λ_i, ρ_i — коэффициенты упругости и плотности i -го компонента, $n(-N, x)$ — целочисленная функция, определяющая число границ слоев на отрезке $[-N, x]$, обладающая свойством

$$n(x_1, x_3) = n(x_1, x_2) + n(x_2, x_3), \quad x_1 \leq x_2 \leq x_3 \quad (4.5)$$

Для нахождения нулевого приближения $\langle u \rangle$ положим, что $\lambda(x), \rho(x)$ — случайные функции. Предположим, что $n(-N, x)$ — стационарная пуассоновская случайная функция, обладающая свойством (4.5) и распределением

$$P[n(x_1, x_2) = m] = \frac{\langle n(x_1, x_2) \rangle^m}{m!} \exp[-\langle n(x_1, x_2) \rangle]$$

$$\langle n(x_1, x_2) \rangle = \alpha |x_1 - x_2|$$

Числовые характеристики случайной функции $\varphi(x) = \lambda(x), \rho(x)$ имеют вид

$$\langle \varphi \rangle = D_+, \quad \langle \varphi'(x_1) \varphi'(x_2) \rangle = R_{\varphi}(r) = D_+^2 \exp(-|r|/a) \quad (4.6)$$

$$a = 1/(2\alpha), \quad r = x_1 - x_2$$

Корреляционная функция (4.6) описывает среду с полностью разупорядоченной структурой [8].

Подставляя $\langle u \rangle = a(q) \exp(iqx)$ в (4.2) и считая $\rho^* = \langle \rho \rangle$, получим дисперсионное уравнение, которое запишем в безразмерном виде

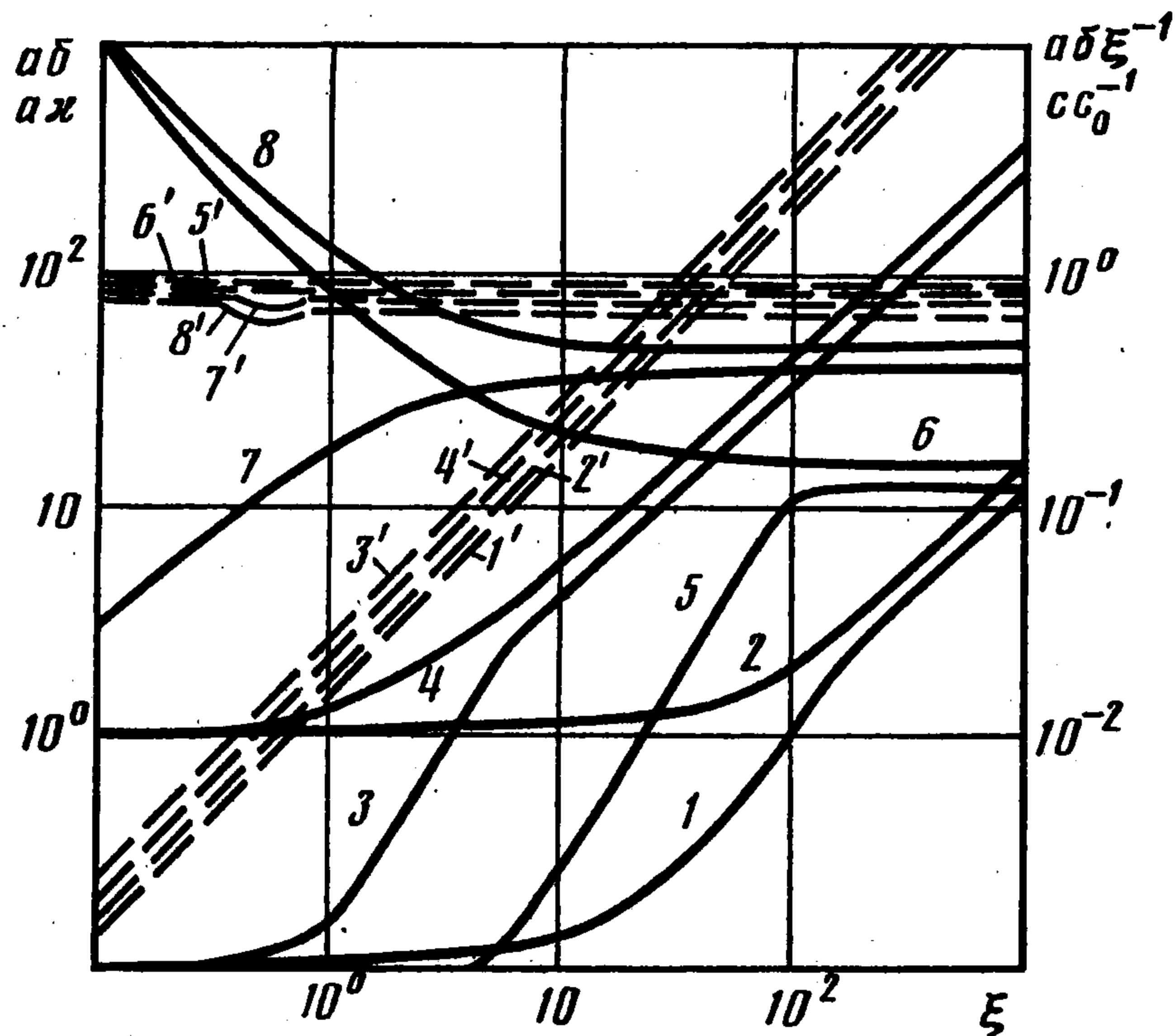
$$\alpha^4 + \alpha^2(\beta^2 - \xi^2) - \xi^2\beta(\beta - i\eta\xi) = 0 \quad (4.7)$$

$$\alpha = aq, \xi = ak, \eta = 1/2(\pi D), \beta = 1 - i\xi$$

Физический смысл имеют два корня α_1, α_2 , расположенные в первом квадранте комплексной плоскости $\alpha = ak + ia\delta$. Общее решение уравнения (4.2) имеет вид

$$\langle u(x) \rangle = a_1(q) \exp(iq_1x) + a_2(q) \exp(iq_2x) \quad (4.8)$$

На фигуре изображены зависимости $a\delta_1, a\delta_2$ (сплошные линии), ak_1, ak_2 (штриховые линии) от ξ кривыми 1, 2 (1', 2') при $\eta = 10^{-3}$ и 3, 4 (3', 4') при $\eta = 1$ соответственно, а также зависимости декрементов колебаний соответствующих ветвей $a\delta_1\xi^{-1}, a\delta_2\xi^{-1}$ (сплошные линии) и скоростей



$c_1c_0^{-1}, c_2c_0^{-1}$ (штриховые линии) от ξ кривыми 5, 6 (5', 6') при $\eta = 10^{-3}$ и 7, 8 (7', 8') при $\eta = 1$. Параметр ξ характеризует соотношение между радиусом корреляции a и длиной волны k^{-1} , параметр η характеризует дисперсии упругих коэффициентов среды. Подставляя (4.8) в (4.3), найдем выражение для первого приближения.

Формула (1.9) с точностью до первого приближения имеет вид

$$u = \langle u \rangle + \sum_{m=1}^2 M_m^{(1)} \langle u_m \rangle \quad (4.9)$$

$$M_m^{(1)} = \frac{1}{2} i q_m \lambda' \sum_{j=1}^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_j^*(x - x_n) \exp(i(q_m - q_n)x) +$$

$$+ \lambda' q_m \sum_{j=1}^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\theta(x_{2n} - x) \{I_{2n-1}^{jm}\} + \theta(x - x_{2n}) \{I_{2n}^{jm}\} +$$

$$+ \lambda_m^{(1)} q_m^2 \sum_{j=1}^2 G_j^*(q_m), \quad \lambda' = \lambda_2 - \lambda_1, \quad \lambda_m^{(1)} = \lambda_1 - \lambda^*(q_m)$$

$$\langle u_m \rangle = a_m(q_m) \exp(iq_m x), \quad \langle u \rangle = \sum_{m=1}^2 \langle u_m \rangle$$

$$I_{2n-1}^{jm} = \frac{\exp(i(q_m - q_j)x)}{i(q_j - q_m)} \exp(i(q_j - q_m)x_{2n-1}) [\exp(i(q_j - q_m)a_{2n}) - 1],$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0, q_j \neq q_m \end{cases}$$

$$I_{2n-1}^{jm} = a_{2n}, \quad q_j = q_m$$

$$I_{2n}^{jm} = -\frac{\exp(iq_j x)}{i(q_j + q_m)} \exp(-i(q_j + q_m)x_{2n-1}) [\exp(-i(q_j + q_m)a_{2n}) - 1]$$

$$G_j^*(x - x_n) = \frac{\exp(iq_j |x - x_n|)}{2iq_j}, \quad a_{2n} = x_{2n} - x_{2n-1}$$

$$G_j^*(q_j) = \frac{1}{\lambda^*(q_j) q_j^2 - \langle \rho \rangle \omega^2}, \quad \lambda^*(q) = \frac{\lambda_0}{1 - \gamma^*(q)}, \quad \gamma^*(q) = \frac{Dk\beta}{2i(\beta^2 + q^2)}$$

Из формулы (4.9) и фигуры следует, что нулевое приближение $\langle u \rangle$ затухает во всем частотном диапазоне (для всех длин волн), имеет место дисперсия скорости. Структура первого приближения $u^{(1)}$ определяется членами, стоящими при λ' и $\lambda^{(1)}$. При учете различий в плотности добавляется еще два члена аналогичных последним в (4.9) и стоящих при $\rho' = \rho_2 - \rho_1$, $\rho^{(1)} = \rho_1 - \rho^*(q)$. Первый член в (4.9) при λ' описывает поле волн, источниками излучения которого являются границы слоев, второй член при λ' описывает плоские волны в слоистой среде, третий член при $\lambda^{(1)}$ определяет изменение амплитуды поля $\langle u \rangle$ (нулевого приближения) за счет отличия характеристик эффективной среды от параметров слоев.

Рассмотрим среду, в которой

$$\lambda(x) = \lambda_0 + \lambda_1 \cos \theta x + \lambda_2 \sin \theta x = \sum_{m=-1}^1 \lambda^{(m)} \exp(-im\theta x), \quad \rho = \rho_0 \quad (4.10)$$

Для нахождения нулевого приближения $\langle u \rangle$ положим, что λ_1, λ_2 — случайные независимые величины с $\langle \lambda_1 \rangle = \langle \lambda_2 \rangle = 0$, $\langle \lambda_1 \lambda_2 \rangle = 0$, $\langle \lambda_1^2 \rangle = \langle \lambda_2^2 \rangle = D/2$ [10]. Тогда $\langle \lambda \rangle = \lambda_0$, $\langle \lambda'(x) \lambda'(x+r) \rangle = 1/2 D \cos \theta r$

Дисперсионное уравнение имеет вид

$$q^2 = k^2 [1 + 1/2 i D \gamma (\delta(k + \theta - q) + \delta(k - \theta - q))] \quad (4.11)$$

Из (4.11) следует, что при $q \neq k + \theta, k - \theta$ нулевое приближение соответствует плоской незатухающей волне. При $q = k + \theta, k - \theta$ распространяющихся волн нет. С точностью до первого приближения включительно решение уравнения (4.1) запишем в виде

$$u(x) = u_0 \exp(ikx) + u_0 k^2 \lambda' G^*(k) \exp(ikx) +$$

$$+ \frac{1}{2} u_0 k (k - \theta) (\lambda_1 - i\lambda_2) G^*(k - \theta) \exp(i(k - \theta)x) +$$

$$+ \frac{1}{2} u_0 k (k + \theta) (\lambda_1 + i\lambda_2) G^*(k + \theta) \exp(i(k + \theta)x) =$$

$$= \sum_{m=-1}^1 u(q - m\theta) \exp[-i(q - m\theta)x] \quad (4.12)$$

Подставляя (4.12) в (4.1), получим аналогично [11] дисперсионное уравнение:

$$(\lambda_0 q^2 - \rho_0 \omega^2)^2 - \lambda^{(1)2} q^4 = 0, \quad \lambda^{(1)} = \lambda_1 + i\lambda_2, \quad \lambda^{(-1)} = \lambda_1 - i\lambda_2 \quad (4.13)$$

откуда $\omega^2 = q^2 \rho_0^{-1} (\lambda_0 + |\lambda^{(1)}|)$.

Границы полосы пропускания частот

$$\omega_+^2 = \omega^2 (1 + |\lambda^{(1)}| \lambda_0^{-1}), \quad \omega_-^2 = \omega^2 (1 - |\lambda^{(1)}| \lambda_0^{-1})$$

Ширина полосы пропускания частот $\Delta\omega = \omega |\lambda^{(1)}| \lambda_0^{-1}$.

Выражение для волнового числа в центре запрещенной зоны имеет вид

$$q = \frac{\theta}{2} \left(1 \pm i \frac{|\lambda^{(1)}|}{2\lambda_0} \right) = \frac{\theta}{2} \left(1 \pm i \frac{\Delta\omega}{2\omega} \right)$$

Таким образом, предлагаемый метод осреднения позволяет описать все эффекты распространения волн в периодически неоднородных средах.

Обобщением рассмотренной модели является среда, параметры которой представляются в виде

$$\lambda(x) = \lambda_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_{1m} \cos m\theta x + \lambda_{2m} \sin m\theta x = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \lambda^{(m)} \exp(-im\theta x) \quad (4.14)$$

Тогда при тех же предположениях относительно вероятностных свойств λ_{im} , что и выше, решение уравнения (4.1) представляется в виде

$$u(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(q - m\theta) \exp[-i(q - m\theta)x] \quad (4.15)$$

где $u(q - m\theta)$ находятся из решения соответствующей задачи в нулевом и первом приближениях. С каждым коэффициентом Фурье $\lambda^{(m)}$ в разложении (4.14) будет связана своя запрещенная зона шириной $(\Delta\omega)^{(m)} = \omega |\lambda^{(m)}| \lambda_0^{-1}$. При $m = 1$ эти зоны называются запрещенными зонами высших порядков [11].

Разложение (4.14) можно использовать для решения задачи о распространении упругой волны в периодически слоистой двухкомпонентной среде.

В этом случае $\lambda(x) = \lambda(x + 2l)$, $\lambda(x) = \lambda_1$ при $-l < x < l_1$, $\lambda(x) = \lambda_2$ при $l_1 < x < l$ и может быть разложено в ряд (4.14), где $\lambda_0 = \langle \lambda \rangle = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2$, c_i — объемная концентрация i -го компонента, $\lambda_{1m} = (\lambda_1 - \lambda_2) (m\pi)^{-1} \sin m\pi c_1$, $\lambda_{2m} = (\lambda_1 - \lambda_2) (m\pi)^{-1} [(-1)^m - \cos m\pi c_1]$, $\theta_m = m\pi l^{-1}$.

Для нахождения нулевого приближения $\langle u \rangle$ опять полагаем коэффициенты λ_{1m} , λ_{2m} случайными, обладающими ранее перечисленными свойствами, что требует предположения о случайности $\lambda_1 - \lambda_2$, l_1 . Решение уравнения (4.1) в этом случае будет иметь вид (4.15).

Из вышеизложенного следует, что метод осреднения позволяет единообразно решать задачи о распространении волн в средах с диапазоном изменения структуры от полностью разупорядоченной до периодически слоистой. При этом в нулевом приближении учитываются эффекты многократного рассеяния, дисперсии скорости и затухания волн. Первое приближение конкретизирует структуру рассеянного поля, распространяющегося в среде с данной реализацией упругих, плотностных свойств.

Автор благодарит Е. И. Шемякина за предложенную тему и обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В., Новичков Ю. Н. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
2. Ревуженко А. Ф., Шемякин Е. И. Некоторые математические модели деформирования сплошных сред со структурой. // Аналитические методы и вычислительная техника в механике горных пород. Новосибирск: Ин-т горн. дела СО АН СССР, 1975. С. 139—142.
3. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
4. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984. 472 с.
5. Победря Б. Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
6. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. М.: Наука, 1978. 463 с.
7. Чигарев А. В. Вычисление динамического тензора Грина стохастически неоднородной упругой среды. // ПММ. 1979. 43. Вып. 5. С. 916—922.
8. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. М.: Наука, 1982. 424 с.
9. Шермергор Т. Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 399 с.
10. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Т. 1. М.: Сов. радио, 1974. 550 с.
11. Яриш А., Юх П. Оптические волны в кристаллах. М.: Мир, 1987. 616 с.

Минск

Поступила в редакцию
13.V.1989