

УДК 532.5

© 1990 г.

В. И. Керчман

ЗАДАЧИ РАСТЕКАНИЯ И ВЫДАВЛИВАНИЯ СЛОЯ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

В приближении теории смазки [1] выводится уравнение, описывающее нестационарное движение тонкого слоя степенной жидкости по горизонтальной плоскости при различных условиях на верхней границе слоя. Рассматриваются задачи расплывания начальной локализованной неоднородности, натекания струи и растекания (выдавливания) полубесконечного слоя и строятся их автомодельные решения, которые описывают волны, распространяющиеся в области стационарной толщины слоя с конечной скоростью. К такой постановке приводится ряд задач тектонофизики [2], гляциомеханики [3, 4], технологии полимеров [5, 6]. Точно так же можно рассмотреть более общую задачу о движении слоя на податливом основании [2].

1. В рамках предположений, аналогичных основным гипотезам гидродинамической теории смазки [1], получим уравнение, которое описывает медленное нестационарное движение слоя несжимаемой вязкой весомой жидкости по горизонтальной плоскости. Направим ось z вертикально вверх от плоскости, так что поверхность слоя переменной толщины h задается уравнением $z = h(x, y, t)$. На поверхность слоя действует нормальное давление $P_0(x, y, t)$: а) приложенное через нерастяжимую гибкую пленку, либо б) в условиях свободных горизонтальных смещений (отсутствия касательных напряжений).

Оценки удобно проводить в безразмерных переменных

$$X = x/L, Y = y/L, Z = z/H, V = v/U, \alpha = H/L \ll 1$$

(H и L — характерные толщина слоя и горизонтальный масштаб соответственно, U — характерная горизонтальная скорость).

В приближении тонкого слоя вектор скорости почти параллелен опорной плоскости ($V_z \sim \alpha$), а в выражениях для скоростей деформации можно пренебречь производными по x и y в сравнении с производными по z

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xz} &= UH^{-1}V_x' [1 + O(\alpha^2)], \quad \varepsilon_{yz} = UH^{-1}V_y' [1 + O(\alpha^2)] \quad (1.1) \\ \varepsilon_0 &= UH^{-1} \sqrt{(V_x')^2 + (V_y')^2} [1 + O(\alpha)], \quad V_x' = \partial V_x / \partial Z, \quad V_y' = \partial V_y / \partial Z \end{aligned}$$

(величина ε_0 пропорциональна октаэдрической скорости деформации [6, 7]).

Упрощенные уравнения ползущего течения принимают вид

$$\begin{aligned} \partial \sigma_{xz} / \partial z - \partial p / \partial x &= 0, \quad \partial \sigma_{yz} / \partial z - \partial p / \partial y = 0 \\ \partial p / \partial z &= -\rho g, \quad \partial v_x / \partial x + \partial v_y / \partial y + \partial v_z / \partial z = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

где отброшены члены, имеющие порядок малости α относительно оставленных.

К уравнениям (1.2) добавляются реологические соотношения, которые при описании изотермической ползучести горных пород [8] и льда [3, 4], а также течения некоторых полимеров [5, 6, 9] можно принять в виде, характерном для степенных жидкостей псевдопластического типа, т. е.

при учете оценок (1.1)

$$\sigma_{xz} = B\varepsilon_0^{\nu-1} \partial v_x / \partial z, \quad \sigma_{yz} = B\varepsilon_0^{\nu-1} \partial v_y / \partial z \quad (1.3)$$

$$\varepsilon_0 = \sqrt{(\partial v_x / \partial z)^2 + (\partial v_y / \partial z)^2}, \quad \nu < 1$$

На нижней границе слоя обычно ставится условие прилипания к плоскости

$$v = 0, \quad z = 0$$

В случае нерастяжимой пленки на верхней поверхности слоя граничные условия на этой поверхности таковы:

$$v_x = 0, \quad v_y = 0, \quad p = P_0, \quad (z = h) \quad (1.4)$$

При свободных горизонтальных смещениях поверхности слоя вместо (1.4) ставятся условия

$$\partial v_x / \partial z = 0, \quad \partial v_y / \partial z = 0, \quad p = P_0 \quad (1.5)$$

Решение третьего уравнения (1.2), удовлетворяющее условию на поверхности слоя, соответствует гидростатическому распределению давления: $p = P_0 + \rho g (h - z)$. Подставляя это выражение в первые два уравнения (1.2), получим для каждой точки плоскости систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих изменение скоростей v_x, v_y по z (зависимость от x, y параметрическая). Первый интеграл этой системы имеет вид ($\mathbf{u} = (v_x, v_y)$ — двумерное поле скоростей)

$$B \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right|^{\nu-1} = (\nabla P_0 + \rho g \nabla h) z + C, \quad \nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\} \quad (4.6)$$

В большинстве задач действующее на поверхность слоя давление $P_0 = \text{const}$. Уравнение (4.6) при этом преобразуется к форме, в которой просто удовлетворить условиям (1.4) или (1.5)

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = K^n |\nabla h|^{n-1} \nabla h |z - qh|^{n-1} (z - qh) \quad (1.7)$$

$$(K = \rho g / B, \quad n = 1 / \nu)$$

Значение q определяется типом граничных условий на поверхности слоя: для условий прилипания (1.4) $q = 1/2$, а в случае свободной поверхности (1.5) $q = 1$. Интегрирование уравнения (1.7) дает распределение горизонтальных скоростей

$$\mathbf{u} = -(n+1)^{-1} K^n [(qh)^{n+1} - |qh - z|^{n+1}] |\nabla h|^{n-1} \nabla h \quad (1.8)$$

Проинтегрируем уравнение неразрывности, последнее из (1.2), по толщине слоя. Учитывая, что $v_z|_{z=h} = \partial h / \partial t$, получим

$$\partial h / \partial t = -\nabla \int_0^h \mathbf{u} dz \quad (1.9)$$

Подстановка в (1.9) выражения для поля скоростей (1.8) дает окончательно эволюционное уравнение для толщины слоя

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \beta \nabla [h^{n+2} |\nabla h|^{n-1} \nabla h] \quad (1.10)$$

$$\beta = b_n K^n, \quad b_n = q^{n+1} (n+2)^{-1}$$

(множитель b_n зависит от типа условий на поверхности слоя).

Уравнение (1.10) принимает наиболее простой вид, когда n — целое нечетное число. В частности, при $n = 1$ получается известное уравнение типа нестационарной фильтрации, описывающее растекание ньютоновской жидкости [2, 10]. Отметим, что при $n > 1$ уравнения вида (1.10) вырождаются

не только при обращении h в нуль, как уравнение нестационарной фильтрации [11, 12], но и в областях, где толщина слоя h имеет ненулевые стационарные значения ($\nabla h = 0$).

Аналогично рассматривается общий случай неравномерного давления P_0 . При нечетном n уравнение плоскопараллельного движения по направлению x имеет вид

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \beta \frac{\partial}{\partial x} \left[h^{n+2} \left(\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{\rho g} \frac{dP_0}{dx} \right)^n \right] \quad (1.11)$$

Отметим, что уравнения (1.10), (1.11) дают приближение, отвечающее исчезающе малым числам Фруда $Fr = U/\sqrt{gH}$. В соответствии с постановкой задачи имеют физический смысл лишь неотрицательные решения уравнений типа (1.10).

Точно так же можно рассмотреть задачу растекания жидкости по неплоской субгоризонтальной поверхности $z = d(x, y; t)$ ($|\nabla d| = O(\alpha)$). Соответствующее уравнение для толщины слоя имеет вид

$$\partial h / \partial t = \beta \nabla [h^{n+2} | \nabla (h + d) |^{n-1} \nabla (h + d)] \quad (1.12)$$

В частности, основание, по которому растекается слой жидкости, может быть податливым. Пусть отсчетный уровень $z = 0$ отвечает равновесному состоянию при постоянных толщине слоя H_0 и давлении P_0 , тогда дополнительное прогибание (подъем) поверхности основания Δ связано с изменением нагрузки $\rho g (h - H_0)$ соотношением $\Delta = L (h - H_0)$ (L — интегродифференциальный оператор). Для простейшего случая основания типа Винклера, например, когда опорная поверхность слоя $z = -\Delta$ находится в условиях локальной изостатической компенсации относительно расположенной ниже жидкости большей плотности ρ_1 , имеем $\Delta = (h - H_0) \rho / \rho_1$ (такая ситуация характерна для задач геодинамики [2]). При этом уравнение для толщины слоя имеет тот же вид (1.10), но с коэффициентом $\beta_* = k\beta$, где множитель $k = (1 - \rho/\rho_1)^n$.

Можно учесть также силы поверхностного натяжения. В этом случае приповерхностное давление P_0 в (1.4), (1.5) задается выражением

$$P_0 = p_0 - \sigma \nabla^2 h [1 + |\nabla h|^2]^{-1}$$

Выпишем уравнение первого приближения

$$\partial h / \partial t = \beta \nabla [h^{n+2} | \nabla (h - \gamma \nabla^2 h) |^{n-1} \nabla (h - \gamma \nabla^2 h)], \quad \gamma = \sigma / (\rho g). \quad (1.13)$$

2. Рассмотрим некоторые задачи для уравнения (1.10) при $n = 3$, свойства решений которых типичны и для других значений $n > 1$. Построенные автомодельные решения этих задач описывают также асимптотическое поведение при больших временах решений задач с неавтомодельными начальными данными, когда детали начального распределения становятся несущественными [13].

Представляет интерес осесимметричная задача о растекании конечного объема жидкости Q , в начальный момент $t = t_0$ локализованного в малой окрестности начала координат

$$h|_{t=t_0} = \begin{cases} h_0(r), & r \leq r_0 \\ 0, & r > r_0 \end{cases} \quad (dh_0/dr \leq 0) \quad (2.1)$$

Уравнение (1.10) принимает вид

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\beta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r h^5 \left(\frac{\partial h}{\partial r} \right)^3 \right] \quad (2.2)$$

Из соображений размерности автомодельное решение задачи (2.2), (2.1) ищется в виде

$$h = [Q^2 / (\beta t)]^{1/5} \Phi(\xi), \quad \xi = r / (\beta Q^2 t)^{1/5} \quad (2.3)$$

что приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению для Φ

$$18 [\xi \Phi^5 (\Phi')^3] + (\xi^2 \Phi)' = 0 \quad (2.4)$$

с условиями

$$\Phi(\xi) \geq 0, \quad \Phi(\infty) = 0, \quad 2\pi \int_0^\infty \xi \Phi(\xi) d\xi = 1 \quad (2.5)$$

и требованием непрерывности функций толщины Φ и потока $\Phi^5 (\Phi')^3$.

Как и для других вырождающихся параболических уравнений [11, 12], не существует классического (гладкого) решения задачи (2.4), (2.5). Обобщенное решение задается функцией $\Phi(\xi)$, удовлетворяющей уравнению (2.4) в области $\xi < \xi_0$, где $\Phi(\xi_0 - 0) = 0$, и тождественно равной нулю при $\xi > \xi_0$. Решение уравнения (2.4) имеет вид

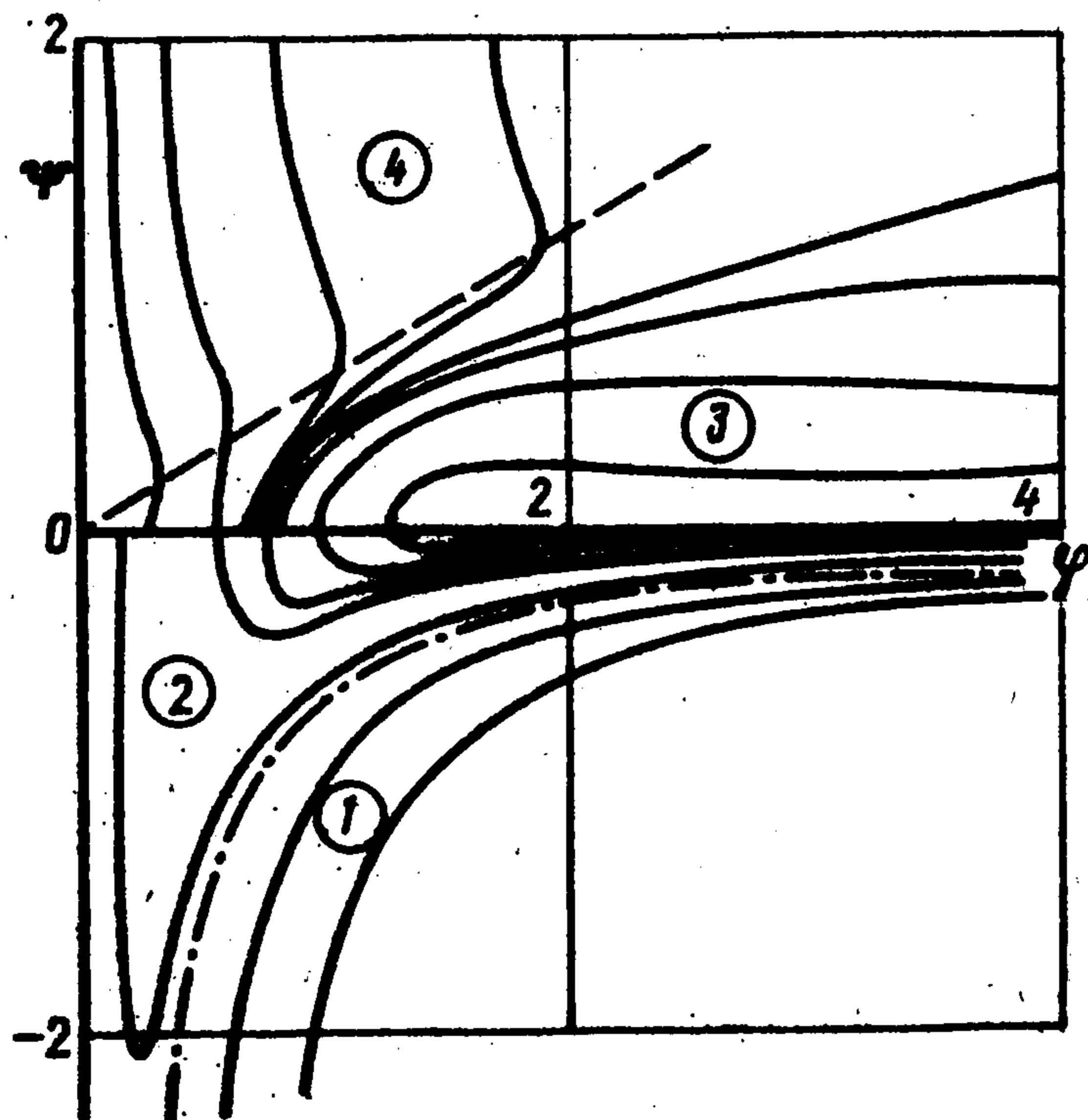
$$\Phi = D (\xi_0^{1/2} - \xi^{1/2})^{2/7}, \quad D = (1372 / 4608)^{1/7} = 0,8411. \quad (2.6)$$

где значение ξ_0 определяется из интегрального условия (2.5)

$$3/2 \pi D \Gamma(3/2) \Gamma(10/7) [\Gamma(41/14)]^{-1} \xi_0^{20/7} = 1, \quad \xi_0 = 0,821$$

Случай произвольного реологического показателя n рассматривается так же (см. ниже). Отметим, что подходящий «отсчетный» момент времени t_0 в решении (2.3) при неавтомоделных начальных данных удобно выбрать по формуле $t_0 = (\beta Q^2)^{-1} (r_0 / \xi_0)^{18}$. При этом решение (2.3), (2.6) дает «промежуточную асимптотику» [13] для задачи с начальными данными (2.1), когда $t \gg t_0$.

Более сложную структуру имеет решение задачи с такими начальными данными $h|_{t=t_0}$, что $\nabla h|_{t=t_0} \equiv 0$ в некоторых подобластях. Рассмотрим



Фиг. 1

задачу о плоскопараллельном растекании (выдавливании) полубесконечного в начальный момент слоя, когда создается возможность его горизонтального распространения, т. е.

$$h|_{t=t_0} = \begin{cases} H_0, & x \leq -l_2 \\ h_0(x), & l_1 > x > l_2 \quad (dh_0/dx < 0) \\ 0, & x \geq l_1 \end{cases} \quad (2.7)$$

и при условиях

$$h|_{x=\infty} = 0, \quad h|_{x=-\infty} = H_0 \quad (\text{либо } h|_{x=0} = H_0) \quad (2.8)$$

Автомоделное решение этого класса задач для уравнения

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \beta \frac{\partial}{\partial x} \left[h^5 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^3 \right] \quad (2.9)$$

имеет вид

$$h = H_0 f_1(\xi), \quad \xi = (x - x_0) / (\beta H_0^2 t)^{1/4}. \quad (2.10)$$

Для функции $f(\xi)$ получается обыкновенное дифференциальное урав-

нение

$$4 [f^5 (f')^3]' + \xi f' = 0 \quad (2.11)$$

с условиями

$$f(\infty) = 0; f(-\infty) = 1 \text{ (либо } f(0) = 1) \quad (2.12)$$

и требованиями непрерывности функций f и $f^5 (f')^3$.

Уравнение (2.11) инвариантно относительно группы преобразований

$$F(\xi, \lambda) = \lambda^{-1/7} f(\lambda \xi) \quad (2.13)$$

Переходя к переменным

$$\tau = \ln |\xi|, \quad \varphi(\tau) = \xi^{-1/7} f, \quad \psi = \xi^{2/7} \frac{df}{d\xi} = \frac{4}{7} \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \operatorname{sign} \xi$$

получим уравнение для функции $\psi(\varphi)$

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = -\frac{5}{3} \frac{\psi}{\varphi} - \frac{1}{7\psi - 4\varphi} \left(\frac{11}{3} \varphi + \frac{7}{12\varphi^5 \psi} \right) \quad (2.14)$$

поле интегральных кривых которого в полуплоскости $\varphi \geq 0$ показано на фиг. 1.

Интегральные кривые «общего положения», приближающиеся к оси ψ в нижнем квадранте, могут быть разбиты на два класса в зависимости от того, какой из членов уравнения доминирует при $\varphi \rightarrow 0$. Разделяющая их особая интегральная кривая (показанная штрихпунктиром на фиг. 1) получается, когда порядки обоих сингулярных членов в правой части (2.14) одинаковы, т. е. $\psi \approx -C_0 \varphi^{-1/3}$, и из уравнения находим $C_0^3 = 1/4$. Соответствующее решение уравнения (2.11) имеет при приближении к переднему фронту возмущения — точке ξ_1 , в которой $f(\xi)$ обращается в нуль, асимптотический вид

$$f(\xi) = \xi_1^{1/7} [7/3 C_0 (\xi_1 - \xi)]^{3/7} \quad (2.15)$$

Отметим, что при этом выполняется требование обращения в нуль потока: $f^5 (f')^3 \rightarrow 0$, когда $\xi \rightarrow \xi_1 - 0$.

Интегральные кривые класса 1 лежат ниже этой кривой и отвечают асимптотической форме уравнения (2.14) $d\psi/d\varphi = -5/3 \psi \varphi^{-1} + O(1)$, так что $\psi \sim -C\varphi^{-5/3}$ при $\varphi \rightarrow 0$, и, следовательно, выражение стремится к постоянной, не равной нулю, при $\xi \rightarrow \xi_1 - 0$.

Интегральные кривые класса 2 вертикально подходят к оси φ , при этом уравнение (2.14) имеет асимптотическую форму $48\psi (d\psi/d\varphi) = 7\varphi^{-6}$, и кривая в окрестности точки $(\varphi_*, 0)$ описывается соотношением

$$\psi^2 = (7/24) (\varphi - \varphi_*) / \varphi_*^6 \quad (2.16)$$

а при больших φ кривые класса 2 асимптотически подходят к особой интегральной кривой сверху. Таким образом, лишь особая интегральная кривая может дать ветвь подходящего решения уравнения (2.11) для $\xi > 0$. При $\varphi \rightarrow \infty$, что соответствует $\xi \rightarrow 0$, интегральные кривые имеют асимптотику вида

$$|\psi| = C_\infty \varphi^{-1/3} + o(\varphi^{-1/3}), \quad C_\infty^{(0)} \approx 0,013 \quad (2.17)$$

Поведение решений уравнения (2.11) с отрицательной производной f' при $\xi < 0$ определяется интегральными кривыми уравнения (2.14); лежащими в верхнем квадранте, которые идут из области больших значений φ по асимптотическому закону (2.17) (кривые класса 3). Они подходят к оси φ вертикально, удовлетворяя соотношению (2.16), при этом

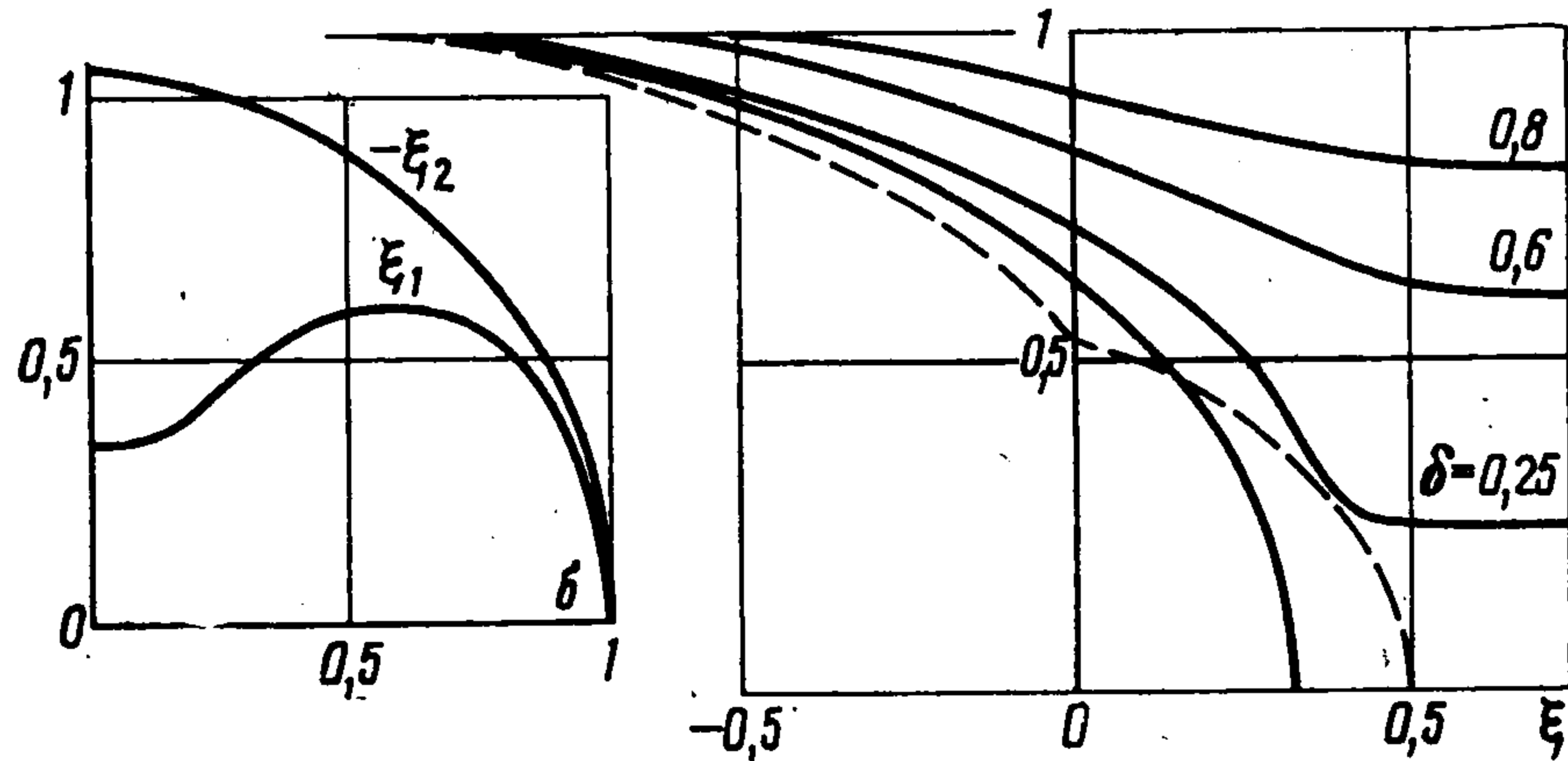
$$f(\xi) - f(\xi_*) \approx m (\xi - \xi_*)^{3/2}, \quad m < 0 \quad (2.18)$$

в окрестности точки $\xi_* < 0$, в которой $f' = 0$.

В этой точке $\xi_* = \xi_2$ для выбранного монотонного решения уравнения (2.11) эффективный «диффузионный коэффициент» $\beta h^5 (\partial h / \partial x)^2$ уравнения (2.9) обращается в нуль, поэтому фронт депрессионной волны распространяется в однородное состояние $h = H_0$ также с конечной скоростью, и вместо продолжения ветви интегральной кривой на фиг. 1 в нижний квадрант (по кривой класса 2) решение следует при $\xi < \xi_2$ принять постоянным $f \equiv 1$ (при этом выполняется и требование непрерывности потока в точке вырождения).

Кривые класса 4, выходящие вертикально из точек оси φ при $\varphi < \varphi_c \approx 0,882$ с асимптотикой (2.16), пересекают с вертикальной же касательной прямую $\psi = 4/7\varphi$ и, меняя направление, уходят на бесконечность вдоль оси ψ . Они отвечают быстро растущим неограниченным решениям уравнения (2.11).

При фактическом построении выбранного решения (нижняя сплошная кривая в правой части фиг. 2) удобно воспользоваться групповым свойством (2.13). Численно находим решение $F_1(\xi)$ задачи Коши для уравнения



Фиг. 2

(2.11) в области $\xi < 1$ с начальными данными для F_1 и F_1' при $\xi = 1 - \varepsilon$ ($\varepsilon = 10^{-6} \dots 10^{-7}$) согласно асимптотике (2.15). Это решение монотонное вплоть до точки $\xi_* \approx -3,175$, в которой $F_1' = 0$. Принимая $\lambda = [F_1(\xi_*)]^{1/4} = 2,9694$, получим искомое решение $f(\xi) = F_1(\lambda\xi) / F_1(\xi_*)$, причем $\xi_1 = 1 / \lambda = 0,3367$; $\xi_2 = \xi_* / \lambda = -1,069$. При $\xi > \xi_1$ имеем $f(\xi) = 0$, а при $\xi < \xi_2$ полагаем $f \equiv 1$.

Для лучшего согласия решения задачи Коши (2.3), (2.7) при начальных данных достаточно общего вида с асимптотическим автомодельным решением (2.10) удобно выбрать свободные параметры t_0, x_0 так, чтобы

$$t_0 = \beta H_0^7 \left(\frac{l_1 + l_2}{\xi_1 - \xi_2} \right)^4, \quad \int_{x_0}^{l_1} h_0(x) dx = \int_{-l_2}^{x_0} [H_0 - h_0(x)] dx \quad (2.19)$$

Численные эксперименты указывают на затухание отклонения неавтомодельного решения от автомодельной асимптотики для постоянных $\xi \in (\xi_2, \xi_1)$ не медленнее, чем $(t_0 / t)^2$.

Точно так же рассматривается задача с начальными данными, которые отличаются от (2.7) тем, что на положительной полуоси (при $x > l_1$) толщина слоя постоянная: $h = H_+ = \delta H_0$ ($0 < \delta < 1$) (в предельном случае, когда $l_1, l_2 \rightarrow 0$, получается задача «о распаде произвольного разрыва»). Автомодельная промежуточная асимптотика решения имеет тот же вид (2.10), причем передний и задний фронты волны растекания распространяются в стационарные состояния с конечной скоростью по асимптотическому закону: $X_+ = \xi_1 (\beta H_0^7 t)^{1/4}$, $X_- = \xi_2 (\beta H_0^7 t)^{1/4}$ (в отличие от аналогичной задачи для слоя ньютоновской жидкости).

Изображающая фазовая траектория уравнения (2.14), которая соединяет два стационарных уровня, состоит из двух интегральных кривых: класса 2 при $\xi > 0$, и класса 3 при $\xi < 0$. Соответствующие решения уравнения (2.11) строятся с учетом асимптотики (2.18). Графики решений для нескольких значений δ приведены в правой части фиг. 2, а зависимость от δ величин ξ_1 и ξ_2 , определяющих распространение переднего и заднего фронтов растекания, в левой части фиг. 2.

В ряде реальных задач, в частности геофизических, условия на поверхности слоя смешанные: на части ее имеет место течение «под крышкой»,

а остальная поверхность свободная (возможны и более сложные комбинации условий). В соответствии с п. 1 это приводит к уравнению растекания с переменными (разрывными) коэффициентами. Так, в режиме плоскопараллельного самовыдавливания из-под пленки $x \leq 0$ в области со свободной поверхностью $x > 0$ вместо (1.11) имеем уравнение (при $P_0 = \text{const}$)

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \beta \frac{\partial}{\partial x} \left(h^{n+2} \left| \frac{\partial h}{\partial x} \right|^{n-1} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \times \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 2^{n+1}, & x > 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

а в точке $x = 0$ должно выполняться условие сопряжения (непрерывности потока): $(\partial h / \partial x)_{-0} = 2^{1+1/n} (\partial h / \partial x)_{+0}$.

Соответствующее автомодельное решение задачи (2.9), (2.8) (в случае условий при $x = \pm\infty$) при $n = 3$ представляется в виде (2.10) и показано на фиг. 2 штриховой линией.

Более сложные задачи выдавливания получаются при переменном давлении на кровлю слоя в уравнениях типа (1.11), (2.20) и их неоднородных обобщениях. В частности, изменения

приповерхностного давления P_0 могут быть связаны [с конечной жесткостью покрывающей слой пленки (пластины), мембранным эффектом, т. е. в уравнении типа (1.11) $P_0 = p_0 + \Lambda h$, где Λ — дифференциальный оператор.

3. Отметим, что основное уравнение растекания (1.10) имеет место и для дилатантных степенных жидкостей, когда в соотношениях (1.3) $\nu > 1$ (реологический показатель $n < 1$). Уравнение (1.10) для этого класса жидкостей совпадает с частным случаем уравнения турбулентной фильтрации газа [14, 15]

$$c \partial \rho / \partial t = \text{div} [|\text{grad}(\rho^k)|^{n-1} \text{grad}(\rho^k)] \quad (1/2 \leq n \leq 1) \quad (3.1)$$

когда показатель политропического уравнения состояния $\gamma = k - 1$ связан со степенью турбулентности n соотношением $\gamma = 1 + 2/n$. Детальное исследование авто-

модельных решений уравнения (3.1) проведено в [15], его выводы в ряде случаев переносятся на задачи растекания псевдопластических жидкостей (при $n > 1$). Свойства, связанные с сильным вырождением, для дилатантных жидкостей сохраняются, например имеет место конечная скорость распространения возмущений в область, где $h = 0$. Слабое же вырождение (по ∇h) отсутствует, а потому возмущения распространяются в ненулевые стационарные состояния с бесконечной скоростью (в отличие от рассмотренного выше основного случая псевдопластической жидкости).

Построим при произвольном n автомодельные решения для нулевых начальных данных и степенного изменения полного объема за счет сосредоточенного у оси $r = 0$ притока

$$2\pi \int_0^\infty h(r, t) r dr = Dt^\lambda$$

которые можно трактовать как нестационарное натекание струи жидкости на опорную плоскость. Они имеют вид

$$h = \left[\frac{D^{n+1} \lambda (n+1)^{-2}}{\beta^2} \right]^{1/(5n-3)} \Phi(\xi), \quad \xi^{5n+3} = \frac{r^{5n+3}}{\beta D^{2n+1} (2n+1) \lambda + 1}$$

где Φ удовлетворяет уравнению

$$(5n + 3) [\xi \Phi^{n+2} (-\Phi')^n]' = [(2n + 1)\lambda + 1] \xi^2 \Phi' - [\lambda(n + 1) - 2] \xi \Phi$$

Для случая неизменного расхода ($\lambda = 1$) графики функции приведены на фиг. 3 при $n = 1$ (сплошная линия), $n = 3$ (штриховая) и $n = 5$ (штрихпунктирная). В автомодельных переменных при $n \geq 2,5$ имеет место «квазиуниверсальный» профиль растекания, отличающийся лишь особенностью на фронте.

Вывод уравнения (1.10) и его обобщений непосредственно переносится на задачи растекания и выдавливания более общих жидкостей Рейнера — Ривлина [6, 7, 9]. Пусть, например, для плоскопараллельного движения слоя реологическое уравнение имеет вид

$$\dot{\gamma} = G(\tau) \quad (\dot{\gamma} = \partial v_x / \partial z, \quad \tau = \sigma_{xz})$$

Тогда аналог уравнений (1.10), (1.11) принимает форму

$$\partial h / \partial t = -\partial Q_x / \partial x$$

$$Q_x = \int_0^h v_x dz = \int_0^h G \left[\left(\frac{dP_0}{dx} + \rho g \frac{\partial h}{\partial x} \right) (z - qh) \right] (h - z) dz$$

Здесь, как и выше, для свободной поверхности слоя $q = 1$, а для течения «под гибкой крышкой» $q = 1/2$.

В частности, для некоторых распространенных моделей имеем [9]: модель Эллиса — де Хавена ($G(\tau) = (A + c |\tau|^{n-1}) \tau$)

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\alpha h^3 + \beta h^{n+2} \left| \frac{\partial h}{\partial x} \right|^{n-1} \right) \frac{\partial h}{\partial x} \right]$$

модель Праудтля — Эйринга ($G(\tau) = B \operatorname{sh}(\tau/\tau_*)$)

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{B}{R} \frac{\partial}{\partial x} \left[h \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^{-1} \operatorname{ch} \left(Rh \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \left(R \frac{\partial h}{\partial x} \right)^{-1} \operatorname{sh} \left(Rh \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right], \quad R = \rho g / \tau_*$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Шлихтинс Г. Теория пограничного слоя. М.: Изд-во иностр. лит., 1974. 712 с.
2. Артюшков Е. В. Геодинамика. М.: Наука, 1979. 320 с.
3. Бадд У. Ф. Динамика масс льда. Л.: Гидрометеиздат, 1975. 236 с.
4. Патерсон У. С. Б. Физика ледников. М.: Наука, 1984. 472 с.
5. Шульман З. П., Байков В. И. Реодинамика и теплообмен в пленочных течениях. Минск: Наука и техника, 1979. 295 с.
6. Виноградов Г. В., Малкин А. Я. Реология полимеров. М.: Химия, 1977. 438 с.
7. Астарита Дж., Маруччи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978. 309 с.
8. Kirby S. H. Rheology of the lithosphere // Rev. Geophys. and Space Phys. 1983. V. 21. № 6. P. 1458—1487.
9. Смольский Б. М., Шульман З. П., Гориславец В. М. Реодинамика и теплообмен нелинейно-вязкопластичных материалов. Минск: Наука и техника, 1970. 446 с.
10. Nakaya C. Spread of fluid drops over a horizontal plane // J. Phys. Soc. Japan. 1974. V. 37. № 2. P. 539—543.
11. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. 288 с.
12. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 477 с.
13. Баренблатт Г. И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеиздат, 1978. 208 с.
14. Лейбензон Л. С. Общая задача о движении сжимаемой жидкости в пористой среде // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз. 1945. Т. 9. № 1. С. 7—10.
15. Баренблатт Г. И. Об автомодельных движениях сжимаемой жидкости в пористой среде // ПММ. 1952. Т. 16. Вып. 6. С. 679—698.