Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 2, 1990

УДК 533.6.011

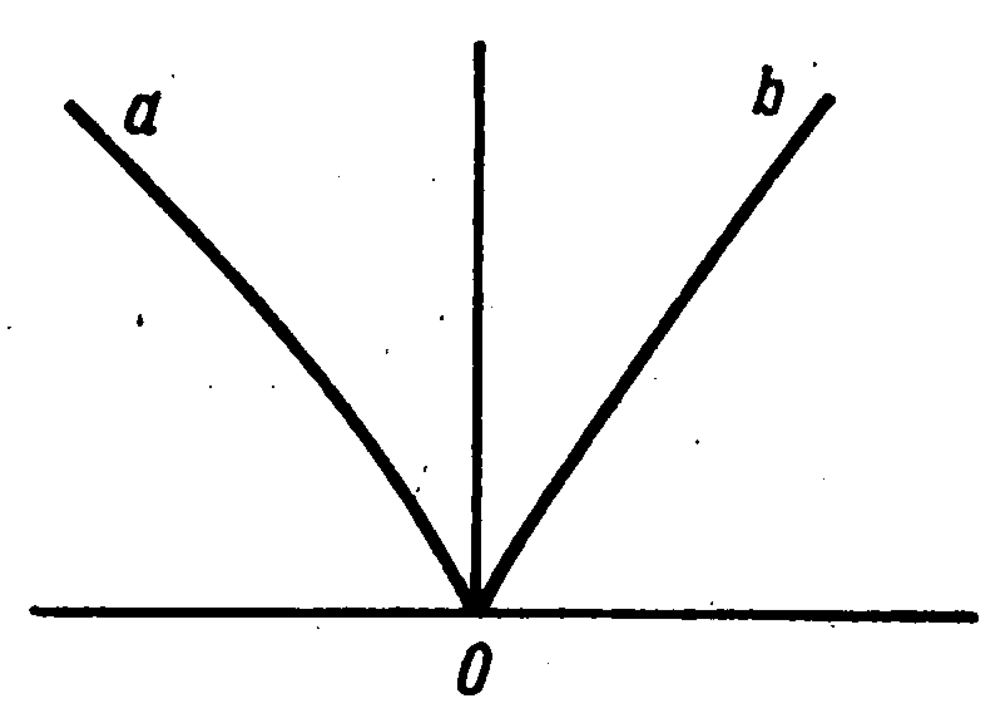
А. И. Рылов

К ВОПРОСУ О НЕВОЗМОЖНОСТИ РЕГУЛЯРНОГО ОТРАЖЕНИЯ СТАЦИОНАРНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ОТ ОСИ СИММЕТРИИ

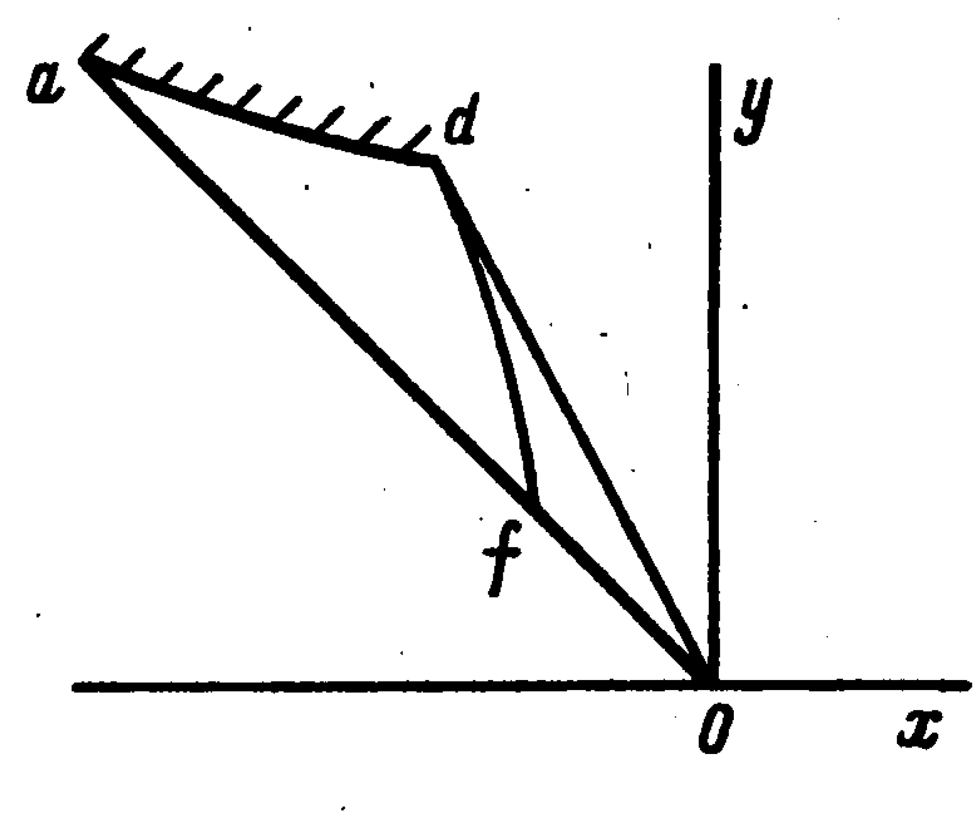
Рассматриваются вопросы, связанные с объяснением невозможности регулярного отражения ударной волны от оси симметрии. Этот факт известен, он может быть показан при помощи линейного анализа и доказан [1] путем интегрирования условия совместности вдоль характеристики, приходящей в точку предполагаемого регулярного отражения. В работе исследуется характер течения в окрестности указанной точки и показывается, что течение должно быть коническим. Также доказывается, что обратная задача построения поля течения и граничной линии тока по заданной произвольной форме ударной волны физически нереализуема в малой окрестности оси симметрии.

Интерес к рассматриваемому вопросу связан еще и с тем, что встречаются утверждения как о возможности регулярного отражения, так (существенно реже) и о невозможности, причем без детального объяснения (например, в [2, 3]). Возможно, по этой причине в авторитетных монографиях указанный вопрос детально не разбирается, в отличие от аналогичной задачи о схлопывании нестационарной сферической или цилиндрической ударной волны.

1. Рассмотрим следующую предполагаемую картину сверхзвукового осесимметричного течения идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа. На фиг. 1 aO и Ob — падающая и отраженная ударные волны. Слева на aO набегает сверхзвуковой равномерный и параллельный оси x (y — радиальная координата) поток. Это условие не ограничивает общности, т. к. в случае неравномерного набегающего потока рассмотрение может быть ограничено достаточно малой окрестностью точки O (0, 0). На правой



Фиг. 1



Фиг. 2

стороне aO наклон вектора скорости строго отрицателен (с помощью линейного анализа можно показать, что вырождение волны aO в характеристику при подходе к точке O исключено). Между aO и Ob предполагается непрерывное сверхзвуковое течение.

Как отмечалось выше, такое течение в отличие от плоского случая, невозможно. Для выяснения причин невозможности такого течения более детально исследуем структуру предполагаемого течения в малой окрестности точки O. Запишем уравнения движения в полярной системе координат

λ, r ($\lambda = x/y$, $r^2 = x^2 + y^2$) при использовании в качестве функций давление p и угол наклона θ вектора скорости к оси x [4]

$$\begin{gathered}\theta_\lambda (\lambda + k) - p_\lambda (M^2 - 1)(1 - \lambda k) / (\rho q^2) - k = \\ = (r\theta_r (1 - \lambda k) + r p_r (M^2 - 1)(\lambda + k) / (\rho q^2)) y^2 r^{-2} \\ \theta_\lambda (1 - \lambda k) - p_\lambda (\lambda + k) / (\rho q^2) = \\ = -(r\theta_r (\lambda + k) + r p_r (1 - \lambda k) / (\rho q^2)) y^2 r^{-2}; \; k = \operatorname{tg} \theta\end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь ρ — плотность, q — модуль вектора скорости, M — число Маха. В области aOb ρ, q и M зависят от p и энтропии s, которая постоянная вдоль линий тока. При подходе к точке O s стремится к конечному пределу s_0. Поэтому в малой окрестности точки O величины ρ, q и M с точностью до $\delta \sim s - s_0$ — известные функции p и s_0. В уравнениях (1.1) выражения с производными по r собраны в правых частях. Важно, что θ_r и p_r входят с сомножителем r. В результате при подходе к точке O правые части (1.1) стремятся к нулю. Действительно, p и θ должны иметь конечные значения в точке O. Поэтому, даже при наличии особенности в точке O производные p_r и θ_r не могут возрастать быстрее, чем $r^{-1+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, откуда и следует, что rp_r и $r\theta_r$, а значит, и правые части уравнений (1.1) стремятся к нулю при подходе к точке O.

Из сказанного следует, что в предполагаемой схеме течения в бесконечно малой окрестности точки O уравнения (1.1) описывают коническое течение. Точнее, при смещении вправо от aO по дуге окружности бесконечно малого радиуса с центром в точке O величины p и θ должны меняться как в коническом течении.

Указанное коническое течение, сопрягающееся по прямой ударной волне aO с набегающим слева вдоль x равномерным потоком (фиг. 2), рассмотрено в [5], где показано, что такое коническое течение может существовать в области afd, где fd — характеристика второго семейства, касающаяся в точке d луча Od. В точке d имеем $\theta_\lambda = -p_\lambda = \infty$. Численные примеры [5] говорят о том, что в afd реализуется течение разрежения, т. е. $p_\lambda < 0$, а также, что $\theta_\lambda > 0$.

2. Можно показать, что сказанное носит общий характер. Действительно, из уравнений (1.1) при нулевых правых частях следует

$$\begin{gathered}\theta_\lambda = -\sin\theta \sin\varphi \sin^2\alpha \cos(\varphi - \theta) / (S^- S^+) \\ p_\lambda / (\rho q^2) = \theta_\lambda \operatorname{tg}(\varphi - \theta) = -\sin\theta \sin\varphi \sin^2\alpha \sin(\varphi - \theta) / (S^- S^+) \\ \varphi = \operatorname{arcctg}\lambda, \; \alpha = \arcsin(M^{-1}), \; S^\pm = \sin(\varphi - \theta \pm \alpha)\end{gathered} \tag{2.1}$$

За ударной волной в точке a

$$\theta < 0, \; \cos(\varphi - \theta) < 0, \; S^- > 0; \; \varphi - \theta + \alpha > \pi, \; S^+ < 0$$

Два последних неравенства следуют из теоремы Цемплена. Следовательно, $\theta_\lambda < 0$, $p_\lambda < 0$ при $\lambda = \lambda_a$.

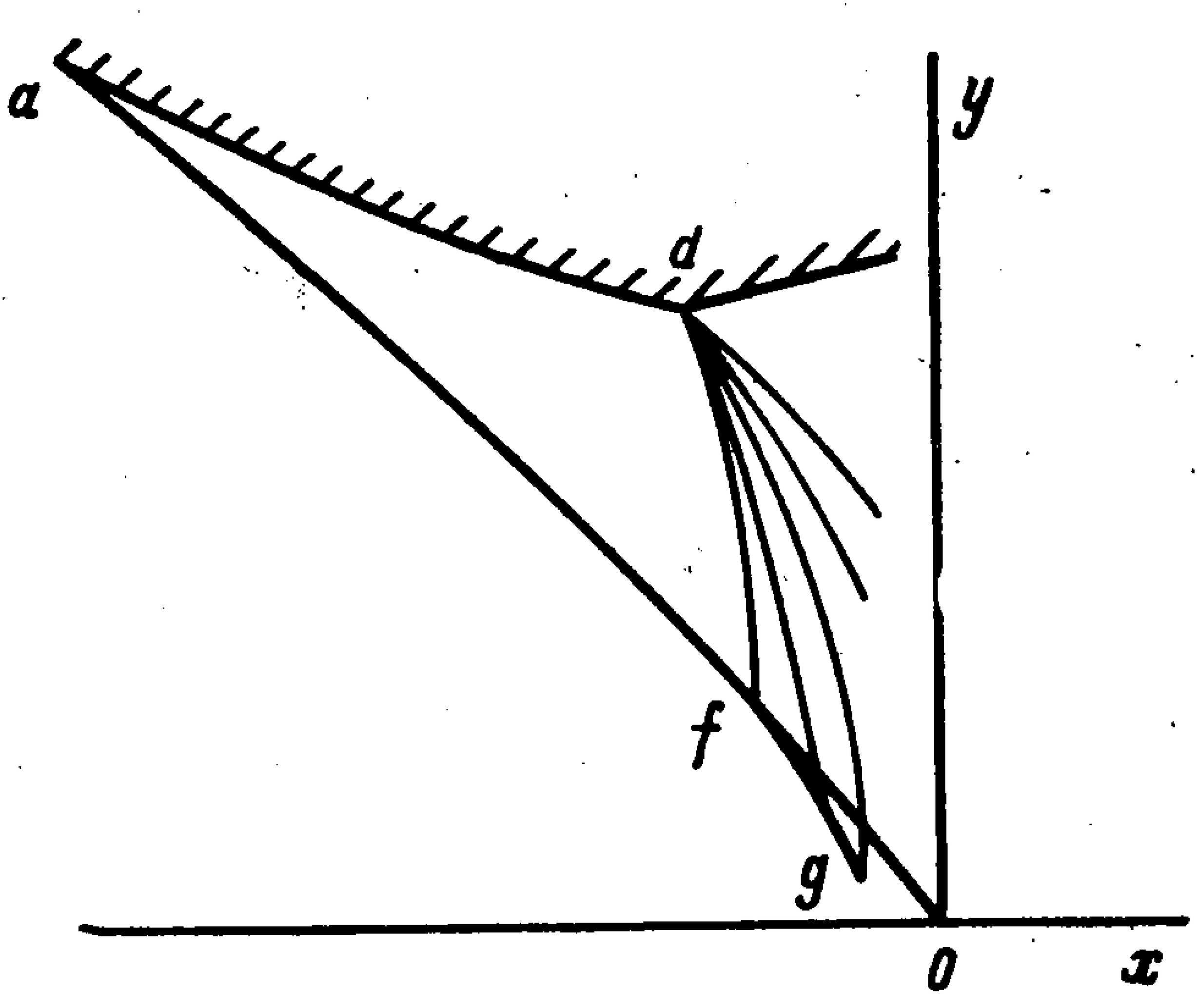
Можно показать, что при смещении от точки a вправо, т. е. при возрастании λ, величины θ, θ_λ и p_λ не могут обратиться в нуль. Действительно, из $\theta = 0$ при $S^+ < 0$ следует, что течение должно быть равномерным с $\theta = \theta_\lambda = p_\lambda = 0$ во всем диапазоне изменения λ, что исключено. Случай, когда $\varphi + \alpha = \pi$ при $\theta = 0$, исследован при изучении конических течений Буземана [6]. Отметим лишь, что особенности типа $0/0$ в правых частях равенств (2.1) могут быть раскрыты по правилу Лапиталя, и в результате для этой точки получаются неравенства $\theta_\lambda < 0$, $p_\lambda > 0$, что также исключено для течений, начинающихся с ударной волны, за которой $\theta < 0$, $\theta_\lambda > 0$, $p_\lambda < 0$.

Итак, при допустимых значениях λ ($\lambda_a < \lambda < \lambda_d$) течение является течением разрежения с $p_\lambda < 0$, в котором $\theta < 0$, $\theta_\lambda > 0$. В точке d имеем $\varphi - \theta + \alpha = \pi$, т. е. характеристика второго семейства fd касается луча Od. В этой точке $\theta_\lambda = \infty$, $p_\lambda = -\infty$. Данное вырождение аналогично рассмотренному ранее [7], относящемуся к другому коническому течению разрежения.

Оценим протяженность области существования рассматриваемого течения, т. е. величину $\varphi_a - \varphi_d$. Из $p_\lambda < 0$ следует $\alpha_\lambda < 0$, а значит, и $\theta_\lambda - \alpha_\lambda > 0$. Следовательно, $\varphi_d = \pi + \theta_d - \alpha_d > \pi + \theta_a - \alpha_a$. С другой стороны, $\varphi_a < \pi - \alpha_0$ (α_0 — угол Маха в набегающем потоке). Значит, $\varphi_a - \varphi_d < \alpha_a - \theta_a - \alpha_0$. Следовательно, при уменьшении интенсивности ударной волны $\theta_a \to 0$, $\varphi_d \to \varphi_a$.

Здесь уместно отметить, что рассмотренное течение принципиально отличается от, казалось бы, близкого к нему по граничным условиям конического течения Буземана, начинающегося с характеристики второго семейства [6]. Течение Буземана, в отличие от рассмотренного выше, является течением сжатия, оно примыкает к оси оси симметрии и может быть переведено при помощи замыкающей конической ударной волны в параллельный оси x поток.

Правее характеристики fd коническое течение не существует. Этому можно дать следующее объяснение. Возьмем на прямой ударной волне точки f^+ и f^- выше и ниже точки f с расстояниями от нее ε^+ и ε^- соответственно. Проходящая через f^+ характеристика второго семейства пересекает верхнюю стенку в точке d^+ с расстоянием δ^+ между d^+ и d. Неограниченный рост производных θ_λ и p_λ при подходе к точке d означает, что $\delta^+ / \varepsilon^+ \to 0$ при $\varepsilon^+ \to 0$. С другой стороны, при формальном построении течения правее характеристики fd и отрезка f^-f прямой ударной волны характеристика второго семейства, выпущенная из точки f^-, пересечет fd ниже верхней стенки при сколь угодно малом значении ε^-. Поэтому такое течение физически нереализуемо. Из этого также следует, что при любой форме канала правее точки d возможно лишь увеличение интенсивности ударной волны, уменьшение скорости за ней вплоть до дозвуковой с последующей перестройкой течения и формированием нерегулярного отражения.



Фиг. 3

3. Указанная выше картина, по-видимому, будет иметь место и в более общем случае течения с криволинейной ударной волной. Данный случай уместно также рассмотреть при помощи следующей обратной задачи. Пусть задана некоторая достаточно гладкая ударная волна aO (фиг. 3). На правой ее стороне $\theta < 0$, $M > 1$. Рассмотрим задачу построения поля течения и стенки канала правее aO.

Используя распределения p и θ вдоль правой стороны aO и уравнения газовой динамики или условия совместности, вычислим производную $\omega_l = d\omega/dl$, $\omega = \theta - \alpha$, взятую вдоль характеристики второго семейства. Эта производная в данном случае интересна тем, что она прямо связана с радиусом R кривизны характеристики второго семейства, выходящей из указанных точек волны aO

$$\omega_l = \frac{\sin\theta\sin^2\alpha\,(\cos\beta - \alpha_p\rho q^2\sin\beta) + yz}{y\sin(\beta-\alpha)} \tag{3.1}$$

$$\alpha_p = \partial\alpha\,(p,\ s)/\partial p,\quad R = 1/\omega_l$$

где β ($\beta < 0$) — угол между вектором скорости и ударной волной, z — комбинация производных от p и θ, вычисленных вдоль aO.

Как и при анализе системы (1.1), можно показать, что произведение yz из (3.1) стремится к нулю при $y \to 0$. Учитывая, что $\sin\theta < 0$, $\sin\beta < 0$, $\sin(\beta-\alpha) < 0$, $\alpha_p > 0$, можем заключить, что при $y \to 0$ величина ω_l растет как $1/y$. Это, естественно, согласуется с тем, что при $y \to 0$ система (1.1) описывает коническое течение.

Итак, при подходе вдоль aO к точке O наклон рассматриваемых характеристик стремится к конечному пределу, но радиус кривизны $R = 1/\omega_l$ уменьшается пропорционально y. При этом характеристики, выпущенные из точек aO, закручиваются против часовой стрелки.

Из сказанного вытекает следующее. В достаточно малой окрестности точки O две близлежащие характеристики второго семейства, выпущенные из точек aO, заведомо пересекутся ниже стенки канала. Это говорит о том, что вблизи оси симметрии обратная задача построения поля течения и стенки канала по заданной ударной волне физически нереализуема.

Общая картина течения будет такой. На достаточном удалении от оси симметрии решение, отвечающее заданной ударной волне aO существует вплоть до характеристики fd, такой, что в точке d $\theta_\tau = \infty$, $p_\tau = -\infty$ (θ_τ и p_τ — производные вдоль линии тока). Правее fd указанная задача решения не имеет. При любой форме стенки правее точки d, в том числе и при изломе в точке d, как на фиг. 3, возможно лишь увеличение интенсивности ударной волны fg с уменьшением скорости за ней до дозвуковой, что и приводит в конечном итоге к нерегулярному отражению с образованием диска Маха. Как показывают имеющиеся численные результаты для струй [3], размер диска Маха быстро уменьшается с приближением нерасчетности струи к единице. Это согласуется с численными исследованиями слабосужающихся каналов с прямой образующей [8]. Сказанное может служить одним из объяснений экспериментов [9], в которых диск Маха визуально не обнаруживается.

В заключение напомним, что в данной работе анализ невозможности регулярного отражения основан на ограниченности газодинамических параметров за ударной волной при ее подходе к оси симметрии. В то же время в аналогичных задачах о схлопывании и отражении ударной волны в одномерной нестационарной газовой динамике с цилиндрической или сферической симметрией подобных ограничений нет. Поэтому в уравнениях, описывающих процесс схлопывания и отражения волны, записанных в переменных r и $\lambda = t/r$, где r — радиальная координата, t — время, нельзя исключить члены с производными по r. И действительно, в известных решениях Гудерлея, Л. Д. Ландау и К. П. Станюковича [10] в процессе схлопывания такие параметры, как, например, давление и скорость ударной волны, неограниченно растут. Но эта же задача при дополнительном ограничении на рост параметров решения не имеет, так как при подходе ударной волны к оси или точке симметрии ее интенсивности будет неограниченно возрастать при любом движении поршня. В этом также видна определенная аналогия с рассмотренными в данной работе вопросами.

Автор благодарит А. Н. Крайко и Б. И. Гутова за обсуждения и советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никольский А. А.* О течениях газа вблизи остроконечных задних кромок тел вращения // Сборник теоретических работ по аэродинамике. М.: Оборонгиз, 1957. С. 74—76.
2. *Черный Г. Г.* Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с.
3. *Ашратов Э. А., Волконская Т. Г., Росляков Г. С., Усков В. И.* Исследование сверхзвуковых течений газа в струях // Некоторые применения метода сеток в газовой динамике. Вып. VI. Течение газа в соплах и струях. М.: Изд-во МГУ, 1974. С. 241—407.
4. *Крайко А. Н.* Вариационные задачи газовой динамики. М.: Наука, 1979, 447 с.
5. *Гродзовский Г. Л.* Сверхзвуковые осесимметричные конические течения с коническими скачками, граничащими с параллельным равномерным потоком // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 2. С. 379—383.
6. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Физматгиз, 1963. 727 с.
7. *Никольский А. А.* Конические осесимметричные сверхзвуковые газовые течения разрежения // Сборник теоретических работ по аэродинамике. М.: Оборонгиз, 1957. С. 43—55.
8. *Гутов Б. И., Затолока В. В.* Гиперзвуковые осесимметричные течения сжатия в каналах без центрального тела // Вопросы газодинамики. Новосибирск: Ин-т теорет. и прикл. механики СО АН СССР, 1975. С. 213—215.
9. *Мельников Д. А.* Отражение скачков уплотнения от оси симметрии // Изв. АН СССР ОТН. Механика и машиностроение. 1962. № 3. С. 24—30.
10. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
22.XII.1988