Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 2, 1990

УДК 532.516

А. С. Басмат, А. Н. Гузь

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ВОЛНЫ С ТВЕРДОЙ СФЕРОЙ, ПОМЕЩЕННОЙ В СЖИМАЕМУЮ ВЯЗКУЮ ЖИДКОСТЬ

Дается постановка задачи о нестационарном взаимодействии неподвижно закрепленной абсолютно твердой сферы, помещенной в сжимаемую вязкую жидкость, с плоской нестационарной продольной волной. При помощи интегрального преобразования Лапласа в пространстве изображений получено выражение для реакции жидкости на сферу. Обращение этого выражения проведено при помощи аналитических и численных методов. Рассматриваемая линеаризованная постановка задач для сжимаемой вязкой жидкости позволяет получить в качестве предельных известные результаты для случая акустической среды [1].

Постановка динамических задач для твердых тел, находящихся в сжимаемой вязкой жидкости, в рамках линеаризованных уравнений Навье — Стокса изложена в [2]. Под линеаризованными уравнениями с учетом инерционных членов понимаются уравнения, полученные из нелинейных уравнений Навье — Стокса, применительно к описанию задач для малых возмущений. В указанной постановке исследовалось нестационарное движение твердой сферы под воздействием активной силы [3] и импульса [4], сообщенного сфере в начальный момент времени. Нестационарное взаимодействие твердых и деформируемых тел с нестационарными волнами, распространяющимися в акустической среде, изложено, в частности, в [1, 5].

1. Постановка задачи и метод решения. Пусть твердая сфера радиусом a находится в безграничной покоящейся сжимаемой вязкой жидкости. Движение жидкости будем написывать линеаризованными уравнениями Навье — Стокса.

Поле вектора возмущения скорости жидкости представим в виде [2]

$$\mathbf{v} = \nabla\Phi + \nabla\times\Psi \tag{1.1}$$

Для определения скалярного Φ и векторного Ψ потенциалов имеет уравнения [2]

$$[(1 + {}^4/_3\nu' a_0^{-2}\partial/\partial t)\,\Delta - a_0^{-2}\partial^2/\partial t^2]\,\Phi = 0 \tag{1.2}$$

$$(\nu'\Delta - \partial/\partial t)\,\Psi = 0 \tag{1.3}$$

где a_0 — скорость распространения малых возмущений в жидкости, ν' — кинематический коэффициент вязкости.

Возмущения давления P и плотности ρ представляются в следующем виде (ρ_0 — плотность жидкости):

$$P = \rho_0\,({}^4/_3\nu'\Delta - \partial/\partial t)\,\Phi \tag{1.4}$$

$$\rho = \rho_0 a_0^{-2}\,({}^4/_3\nu'\Delta - \partial/\partial t)\,\Phi \tag{1.5}$$

Считаем, что жидкость в начальный момент времени покоится:

$$t = 0,\ u = v = P = 0 \tag{1.6}$$

(u — смещение частиц жидкости, v — их скорость).

Свяжем со сферой декартову (x, y, z) и сферическую (r, θ, φ) системы координат, причем угол θ отсчитываем от оси z. Пусть сфера неподвижно закреплена. Определим нагрузки, действующие на сферу при ее взаимодействии с плоской настационарной волной давления, распространяющейся в отрицательном направлении оси z.

Зададим начальное возмущение давления P в жидкости в плоскости $= l + a$

$$P = f(t) H(t) \tag{1.7}$$

Здесь $f(t)$ — некоторая функция, $H(t)$ — функция Хевисайда. Пусть Φ° — потенциал падающей волны, Φ^* и Ψ^* — потенциалы отраженных волн. Условимся также все величины, относящиеся к падающей волне, снабжать индексом $^\circ$, к отраженным волнам — индексом $*$. Эти потенциалы удовлетворяют уравнениям (1.2) и (1.3), а возмущения давления P° в падающей волне и P^* в отраженных волнах — выражению (1.4).

Граничные условия при $t > 0$ имеют вид

$$r = a, \; v_r^\circ + v_r^* = 0, \; v_\theta^\circ + v_\theta^* = 0 \tag{1.8}$$

Таким образом, задача заключается в следующем: необходимо совместно решить уравнения (1.2) для определения потенциала падающей волны Φ° и (1.2), (1.3) — для определения потенциалов Φ^* и Ψ^* отраженных волн, удовлетворяя нулевым начальным условиям

$$t = 0, \; \Phi^\circ = \Phi^* = 0, \; \Psi^* = 0 \tag{1.9}$$

и граничным условиям (1.8).

Учитывая нулевые начальные условия, применим к уравнениям (1.2) и (1.3), а также граничным условиям (1.8) интегральное преобразование Лапласа и решение поставленной выше задачи перенесем в область изображений.

2. Определение в пространстве изображений реакции жидкости на сферу. При указанном подходе в пространстве изображений будем иметь следующую задачу (p — параметр преобразования):

$$(\partial^2/\partial z^2 - s^2)\, \Phi^{\circ L} = 0, \; (\Delta - s^2)\, \Phi^{*L} = 0, \; (\nu'\Delta - p)\, \Psi^{*L} = 0 \tag{2.1}$$

$$P^{\circ L} = \rho_0 (4/_3 \nu' \partial^2/\partial z^2 - p)\, \Phi^{\circ L}, \quad P^{*L} = \rho_0 (4/_3 \nu' \Delta - p)\, \Phi^{*L}, \quad P^{\circ L}\big|_{z=l+a} = f^L(p) \tag{2.2}$$

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$s = \frac{p}{a_0\sqrt{1 + 4/_3 \nu' a_0^{-2} p}}$$

$$r = a, \quad \overset{\circ}{v}{}_r^L + \overset{*}{v}{}_r^L = 0, \quad \overset{\circ}{v}{}_\theta^L + \overset{*}{v}{}_\theta^L = 0 \tag{2.3}$$

Потенциал плоской волны, распространяющейся вдоль оси z, удовлетворяет первому уравнению (2.1). Его общее решение имеет вид

$$\Phi^{\circ L} = A(p)\, e^{-sz} + B(p)\, e^{sz} \tag{2.4}$$

В случае распространения волны в отрицательном направлении оси z $A(p) = 0$. Коэффициент $B(p)$ определим из первого и последнего соотношений (2.2). В результате получим выражение для потенциала падающей волны, а также давление в сжимаемой вязкой жидкости, созданное падающей волной

$$\Phi^{\circ L} = -\frac{1 + 4/_3 \nu' a_0^{-2} p}{\rho_0 p} f^L(p)\, e^{-s(l+a-z)}, \quad P^{\circ L} = f^L(p)\, e^{-s(l+a-z)} \tag{2.5}$$

Можно показать, что давление в сжимаемой вязкой жидкости, вызванное скачком давления в плоскости $z = l + a$, отлично от нуля при любых

$t > 0$, во всех точках среды. В самом деле, делая асимптотическую оценку последнего изображения (2.5) для больших значений $|p|$ и обращая его, в случае $f(t) = 1$ получим

$$P(z, t) = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{l + a - z}{4} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\nu' t}}\right) \tag{2.6}$$

Это приводит к необходимости при исследовании распространения нестационарных волн в сжимаемой вязкой жидкости вводить новый параметр l — расстояние от источника возмущения до тела, а отсчет времени вести с момента возникновения возмущения в жидкости. В случае предельного перехода к акустической среде следует, очевидно, сделать замену $t \to t + l/a_0$ при условии $\nu' \to 0$.

Для осесимметричного случая отражения от сферы векторный потенциал Ψ имеет вид [2]

$$\Psi = \nabla \times (r\mathbf{e}_r \Psi_2) \tag{2.7}$$

Решения второго и третьего уравнений (2.1) с учетом затухания возмущений в жидкости на бесконечности имеют вид

$$\Phi^{*L} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(p)\, r^{-1/2} K_{n+1/2}(sr) P_n(\cos\theta)$$

$$\Psi_2^{*L} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n(p)\, r^{-1/2} K_{n+1/2}(qr)\, P_n(\cos\theta), \quad q = \sqrt{\frac{p}{\nu'}} \tag{2.8}$$

Коэффициенты $C_n(p)$ и $D_n(p)$ определим, удовлетворив граничным условиям (2.3). Для этого разложим потенциал падающей волны $\Phi^{\circ L}$ в ряд по полиномам Лежандра, учитывая, что $z = r\cos\theta$:

$$\Phi^{\circ L} = -\frac{1 + {}^4/_3 \nu' a_0^{-2} p}{\rho_0 p} f^L(p)\, e^{-s(l+a)} \sqrt{\frac{\pi}{2sr}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, I_{n+1/2}(sr)\, P_n(\cos\theta) \tag{2.9}$$

Выражая компоненты вектора скорости жидкости через потенциалы $\Phi^{\circ L}$, Φ^{*L} и Ψ_2^{*L} и подставляя их в (2.3), для определения $C_n(p)$ и $D_n(p)$ получим для всех n систему двух алгебраических уравнений, из которых определяем $C_n(p)$ и $D_n(p)$. Вид их ввиду громоздкости не приводим.

Вектор напряжений в жидкости на площадке с ортом нормали $\mathbf{N}$ определен компонентами тензора напряжений в жидкости

$$\mathbf{T}_N = \mathbf{e}_r \sigma_{rr} + \mathbf{e}_\theta \sigma_{r\theta} \tag{2.10}$$

Вектор напряжений в жидкости на поверхности сферы $\mathbf{T}_N = \mathbf{T}_N^\circ + \mathbf{T}_N^*$ выражается через компоненты тензора напряжений σ_{rr}°, $\sigma_{r\theta}^\circ$, σ_{rr}^*, $\sigma_{r\theta}^*$. В свою очередь эти компоненты выражаются соответственно через Φ°, Φ^* и Ψ_2^* [2].

В пространстве изображений компоненты тензора напряжений в жидкости имеют вид ($\mu' = \rho_0 \nu'$)

$$\sigma_{rr}^{\circ L} = 2\mu' \left(\frac{\rho_0 p}{2\mu'} - \Delta + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\Phi^{\circ L}, \quad \sigma_{r\theta}^{\circ L} = 2\mu' \frac{\partial^2}{\partial r\, \partial\theta} \frac{1}{r} \Phi^{\circ L}$$

$$\sigma_{rr}^{*L} = 2\mu' \left[\left(\frac{\rho_0 p}{2\mu'} - \Delta + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\Phi^{*L} + \left(r\frac{\partial^3}{\partial r^3} + 3\frac{\partial^2}{\partial r^2} - r\frac{\partial}{\partial r}\Delta - \Delta\right)\Psi_2^{*L}\right] \tag{2.11}$$

$$\sigma_{r\theta}^{*L} = 2\mu' \left[\frac{\partial^2}{\partial r\, \partial\theta} \frac{1}{r} \Phi^{*L} + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} - \frac{\Delta}{2}\right)\Psi_2^{*L}\right]$$

Составляющая (вдоль орта $\mathbf{e}_3$) реакции жидкости на сферу определяется выражением

$$F_3{}^L = 2\pi a^2 \int_0^\pi (\mathbf{T}_N \cdot \mathbf{e}_3)|_{r=a} \sin\theta\, d\theta =$$

$$= 2\pi a^2 \int_0^\pi \{\cos\theta\,(\overset{\circ}{\sigma}{}^L_{rr} + \overset{*}{\sigma}{}^L_{rr}) - \sin\theta\,(\overset{\circ}{\sigma}{}^L_{r\theta} + \overset{*}{\sigma}{}^L_{r\theta})\} \sin\theta\, d\theta \qquad (2.12)$$

Интегрируя по поверхности сферы и учитывая свойство ортогональности полиномов Лежандра, а также тот факт, что $K_{n+1/2}(z)$, $I_{n+1/2}(z)$ выражаются через элементарные функции, после ряда выкладок получим в пространстве изображений выражение для реакции жидкости на сферу при ее взаимодействии с плоской нестационарной волной

$$F_3{}^L(p) = -4\pi a^2 (1 + {}^4/_3 \nu' a_0{}^{-2} p) f^L(p) e^{-\lambda\beta} Q^L(p) / (1 + K^L(p)) \qquad (2.13)$$

$$Q^L(p) = \beta^{-1} + 3\beta^{-1}\gamma^{-1} + 3\beta^{-1}\gamma^{-2}, \quad K^L(p) = 2\beta^{-1} + 2\beta^{-2} + \gamma^{-1} + \gamma^{-2}$$

В свою очередь $\beta = sa$, $\gamma = qa$, $\lambda = l/a$.

При исследовании выражения (2.13) перейдем в нем к безразмерному параметру преобразования $\bar{p} = ap/a_0$, соответствующему в пространстве оригиналов безразмерному времени $\tau = a_0 t/a$. В безразмерных величинах

$$\beta = \bar{p}\,(1 + \bar{p}/k)^{-1/2}, \quad \gamma = 2\,(k\bar{p}/3)^{1/2}, \quad k = {}^3/_4 a a_0/\nu'$$

В дальнейшем $\bar{p}$ для удобства заменим на p.

3. Предельные случаи. Предельным переходом к акустической среде $\nu' \to 0$ из (2.13) получим

$$F^L_{\text{зak}}(p) = -4\pi a^2 f^L(p)\, e^{-\lambda p} p\,(p^2 + 2p + 2)^{-1} \qquad (3.1)$$

Для случая $f(\tau) = 1$ обращение выражения (3.1) имеет вид

$$F_{\text{зak}}(\tau) = -4\pi a^2 e^{-(\tau-\lambda)} \sin(\tau - \lambda)\, H(\tau - \lambda) \qquad (3.2)$$

и совпадает с результатом, полученным для модели акустической среды [1], если в нем сделать замену $\tau \to \tau + \lambda$.

Исследуем изменение реакции сжимаемой вязкой жидкости на сферу для больших значений τ. Для этого выражение (2.13) заменим на асимптотически эквивалентное при малых значениях $|p|$. Удержим в функции $Q^L(p)$ второе и третье слагаемое, в знаменателе оставим $2\beta^{-2}$. Экспоненту положим равной единице. В результате получим

$$F_3{}^L(p) \approx -6\pi a^2 f^L(p)\,(\beta\gamma^{-1} + \beta\gamma^{-2}) \qquad (3.3)$$

Для случая $f(\tau) = P_0$ ($P_0 = \text{const}$) обращение (3.3) будет иметь вид [6]

$$F_{\text{зac}}(\tau) = -6\pi a^2 P_0 ({}^1/_2 \sqrt{3} e^{-u} I_0(u) + {}^3/_4 k^{-1} \operatorname{erf} \sqrt{2u}), \quad u = {}^1/_2 k\tau \qquad (3.4)$$

В пределе при $\tau \to \infty$ из (3.4) получим

$$F_3(\infty) = -6\pi a \nu' a_0{}^{-1} P_0 \qquad (3.5)$$

Из (3.5) вытекает классическая формула Стокса в задаче обтекания сферы жидкостью. Действительно, рассмотрим предельное значение скорости частиц жидкости, как это следует из выражения для потенциала $\Phi^{\circ L}$ (2.5) и предельных теорем операционного исчисления

$$v_z(\infty) = \partial\Phi^\circ/\partial z|_{t\to\infty} = \lim_{p\to 0} p\,\partial\Phi^{\circ L}/\partial z = P_0/(\rho_0 a_0) \qquad (3.6)$$

Таким образом, предельная реакция жидкости на неподвижную сферу при $\tau \to \infty$ в случае $f(\tau) = P_0$ совпадает с известной формулой Стокса.

4. Численное определение реакции жидкости на сферу. Для обратного преобразования выражения (2.13) представим его в виде

$$F_3^L(p) = \exp\left[-\lambda p\left(1 + p/k\right)^{-1/2}\right] Y^L(p) \tag{4.1}$$

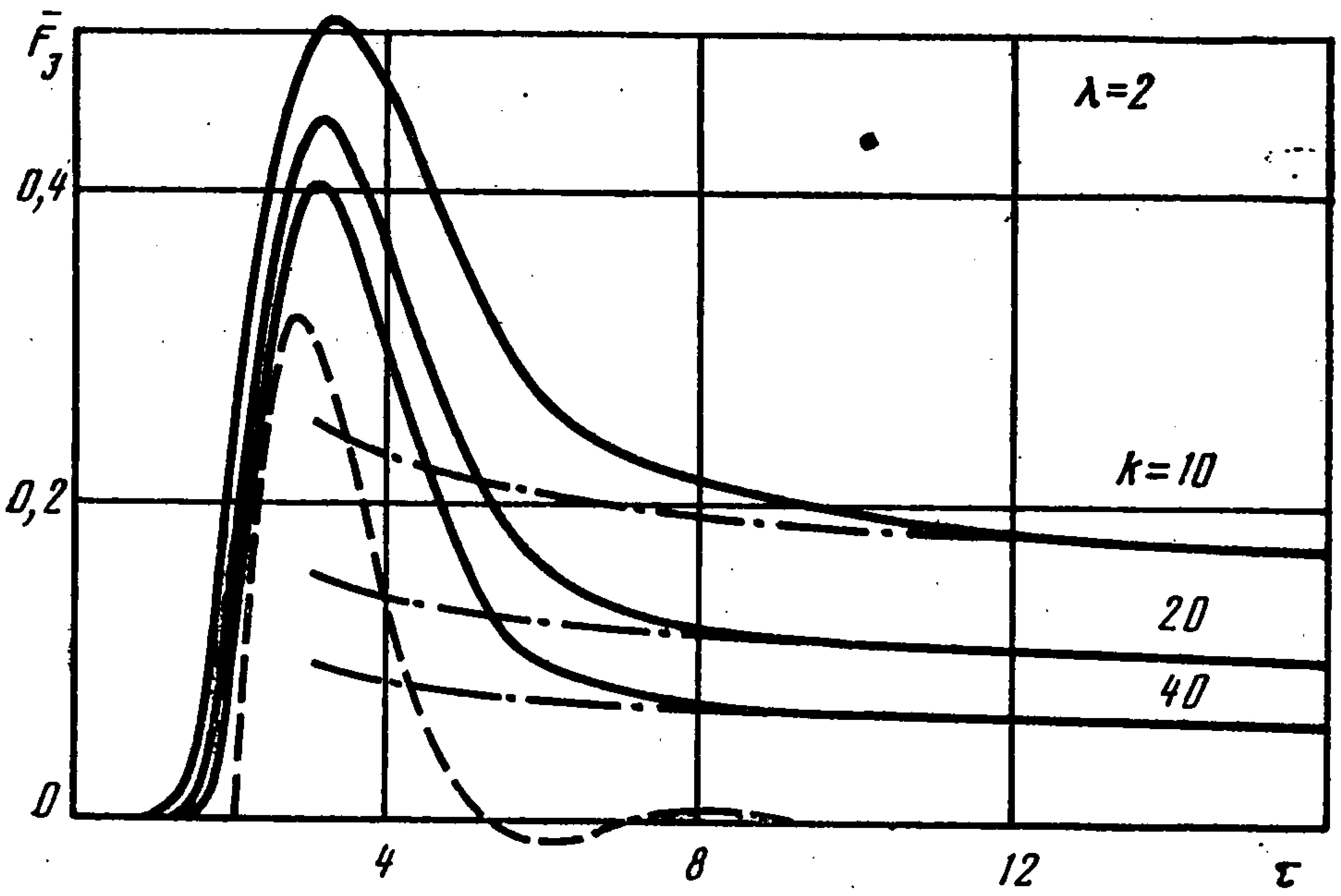
Функции

$$Y^L(p) = \frac{4\pi a^2 (1 + p/k) f^L(p)\, Q^L(p)}{1 + K^L(p)} \tag{4.2}$$

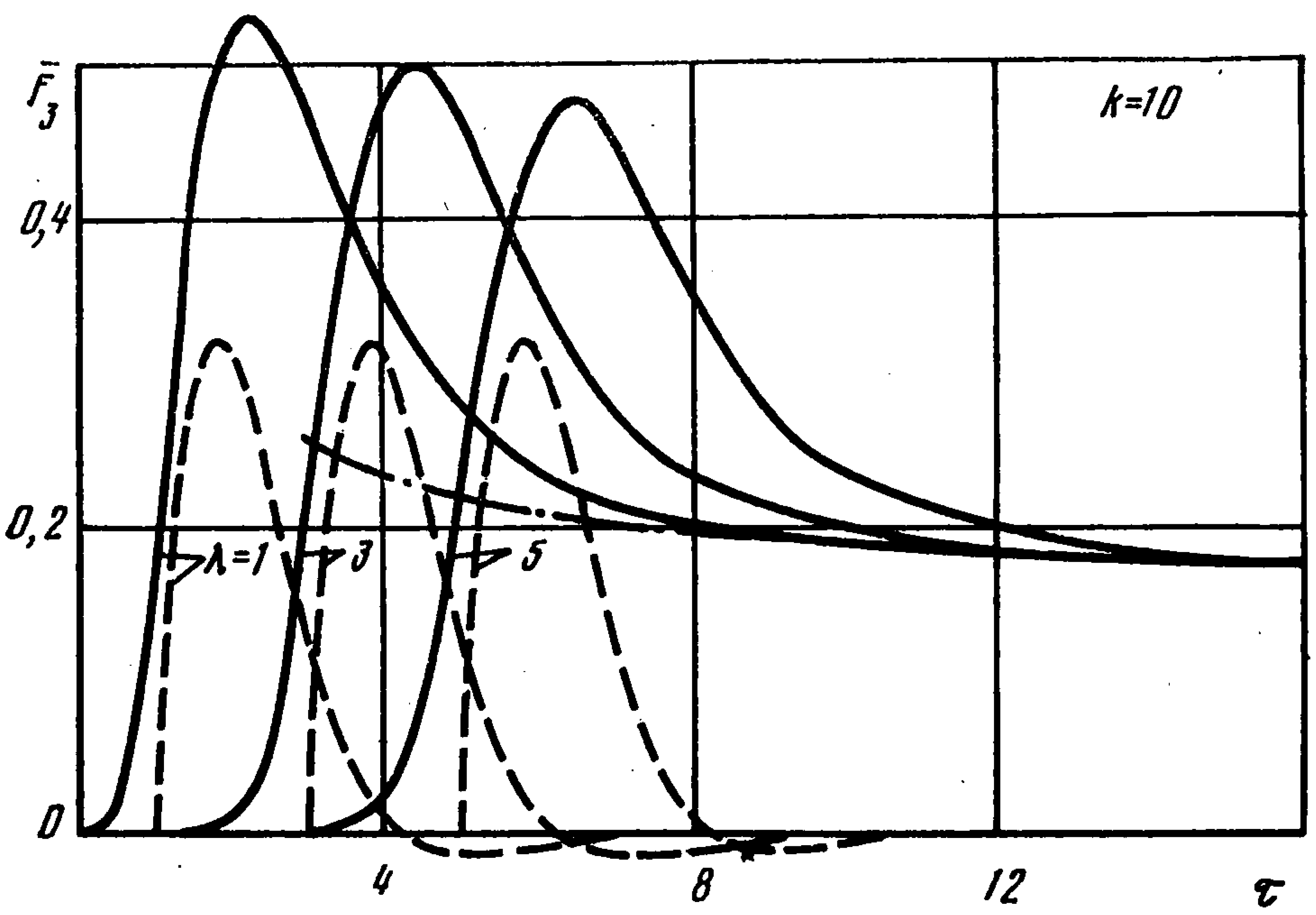
в пространстве оригиналов соответствует линейное интегральное уравнение Вольтерры второго рода [7]

$$Y(\tau) + \int_0^\tau K(\tau - s) Y(s)\, ds = G(\tau) \tag{4.3}$$

Здесь $G(\tau)$ — оригинал числителя формулы (4.2). Решение уравнения (4.3) проводилось численно методом последовательных приближений. Оригинал функции $\exp\left[-\lambda p\left(1 + p/k\right)^{-1/2}\right]$ находим путем представления ее в виде ряда и почленного



Фиг. 1



Фиг. 2

обратного преобразования. Сумму ряда ищем численно. Затем реакцию жидкости на сферу $F_3(\tau)$ находим численно в виде свертки.

На фиг. 1, 2 для случая $f(\tau) = 1$ показана зависимость реакции среды на сферу $\bar F_3 = - F_3/(4\pi a^2)$ от безразмерного времени τ для разных значений параметров: k, характеризующего размеры сферы и свойства жидкости, и λ, представляющего собой безразмерное расстояние от источника возмущения до сферы. Сплошные кривые отражают случай сжимаемой вязкой жидкости, штриховые представляют решение (3.2) для акустической среды. Штрихпунктирные кривые соответствуют асимптотическому приближению реакции жидкости (3.4).

В отличие от случая акустической среды, где реакция на сферу создается фронтом пришедшей волны при $\tau = \lambda$, в сжимаемой вязкой жидкости реакция на сферу при $\tau > 0$ отлична от нуля. Для $\lambda = 2$ с увеличением вязкости (фиг. 1) реакция сжимаемой вязкой жидкости на сферу все больше отличается от реакции акустической среды. С удалением от источника возмущения (фиг. 2) заметно уменьшение амплитуды реакции жидкости на сферу, а также более плавный характер ее изменения. Видно хорошее совпадение результатов, полученных численно, с асимптотическим приближением (3.4) для умеренных значений безразмерного времени τ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Замышляев Б. В.*, Яковлев Ю. С. Динамические нагрузки при подводном взрыве. Л.: Судостроение, 1967. 388 с.
2. *Гузь А. Н.* Динамика твердых тел в сжимаемой вязкой жидкости (покоящаяся жидкость) // Прикл. механика. 1981. Т. 17. № 3. С. 3—22.
3. *Басмат А. С.* О нестационарном движении твердой сферы в сжимаемой вязкой жидкости // Прикл. механика. 1987. Т. 23. № 1. С. 127—130.
4. *Басмат А. С.* Нестационарное движение твердой сферы в сжимаемой вязкой жидкости под воздействием импульса // Прикл. механика. 1987. Т. 23. № 6. С. 107—111.
5. *Новожилов В. В.* О перемещении абсолютно твердого тела под действием акустической волны давления // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 4. С. 794—796.
6. *Диткин В. А.*, *Прудников А. П.* Справочник по операционному исчислению. М.: Высш. шк., 1965. 468 с.
7. *Кубенко В. Д.* Нестационарное взаимодействие элементов конструкций со средой. Киев: Наук. думка, 1979. 184 с.

Поступила в редакцию
16.V.1988

Киев