

УДК 532.5 : 534.1

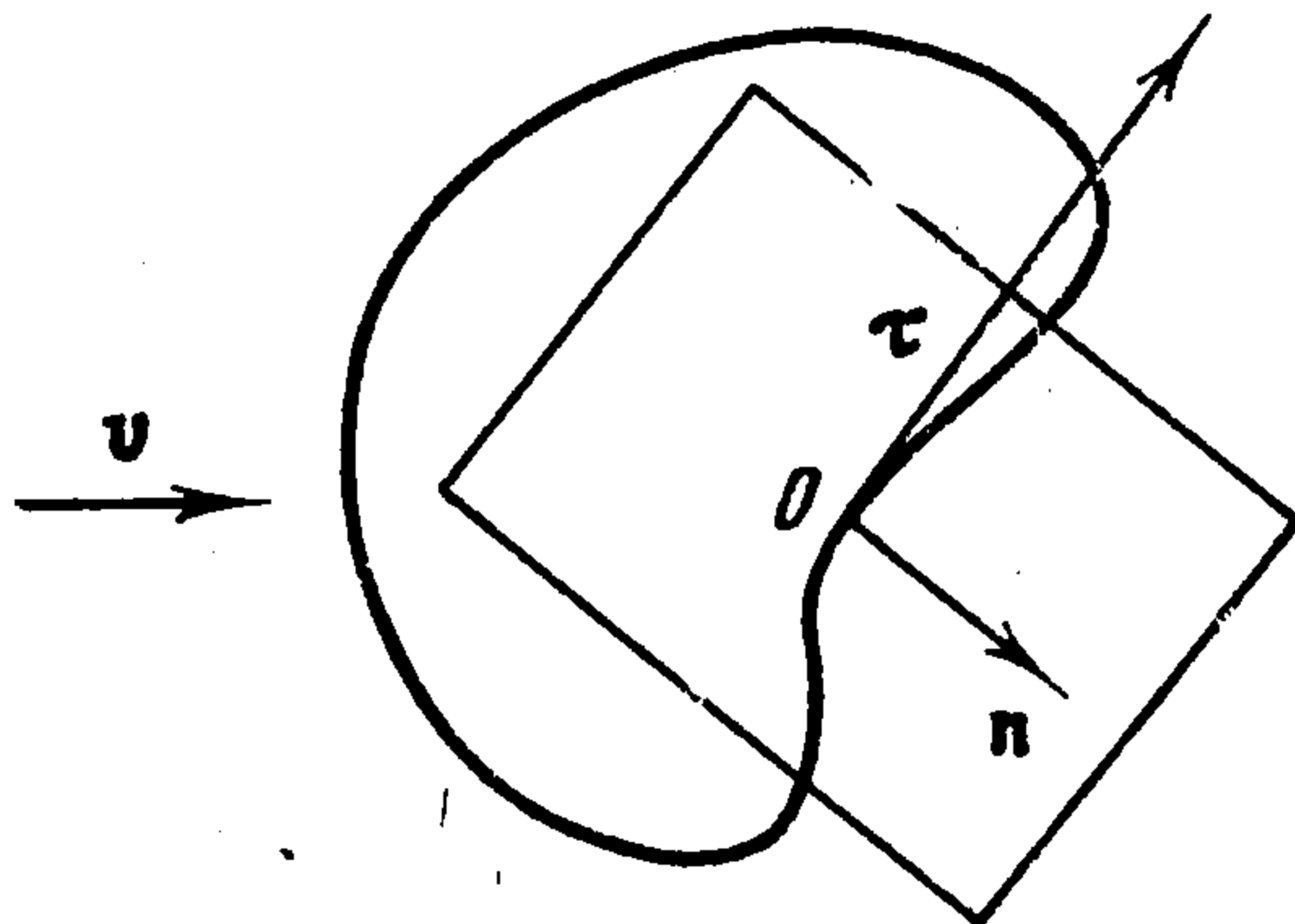
© 1990 г.

В. А. Бужинский

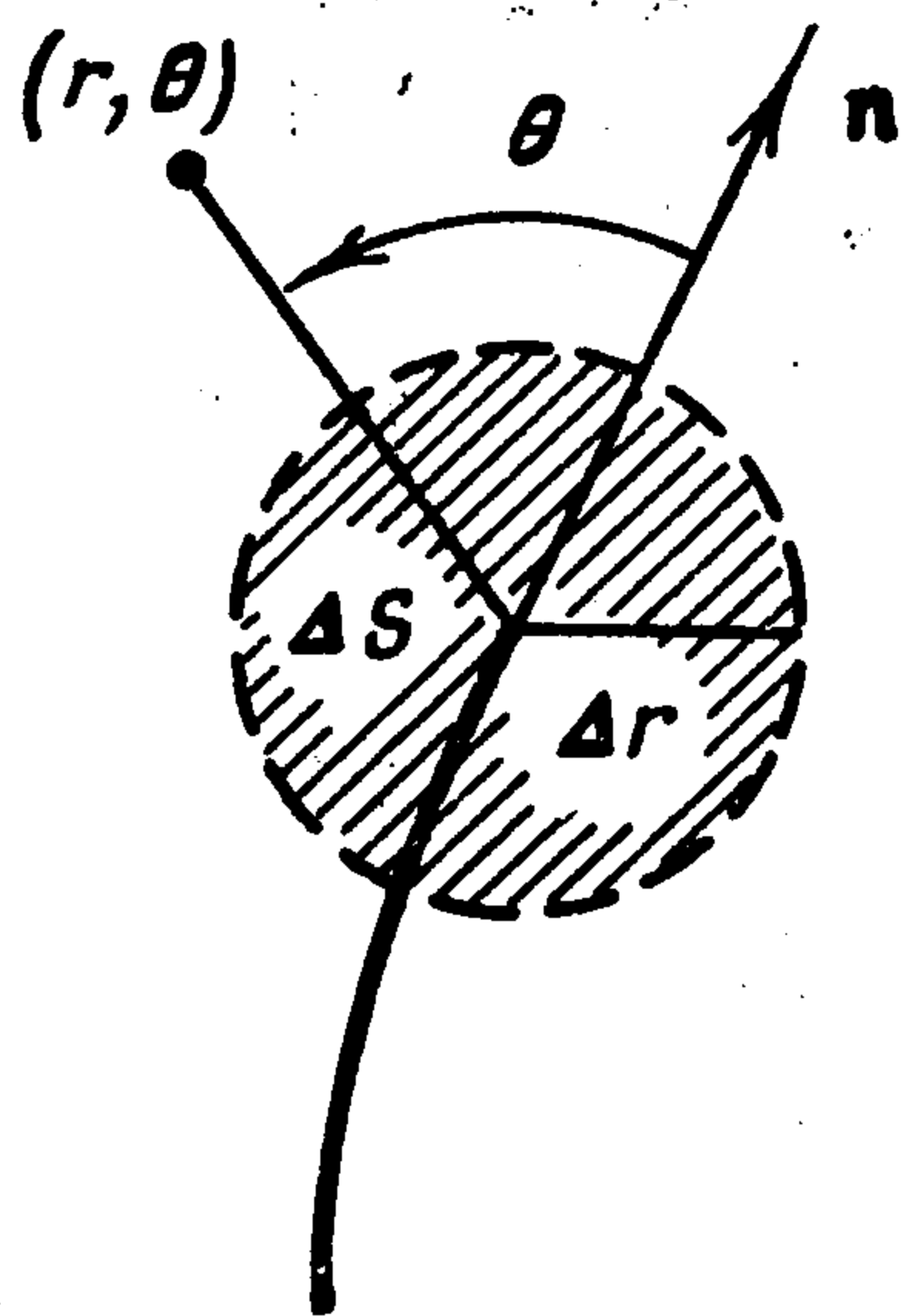
ВИХРЕВОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ПЛАСТИНКИ ПРИ КОЛЕБАНИЯХ В МАЛОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Рассматриваются гармонические колебания пластинки в однородной несжимаемой покоящейся на бесконечности жидкости. Предполагается, что вихревое течение локализуется за счет вязкости в малой окрестности кромок пластинки, а порождающий это течение поток жидкости описывается главным членом разложения потенциала с сингулярной особенностью для скорости на кромке. Эта особенность характеризуется коэффициентом интенсивности скоростей. Устанавливается связь этого коэффициента с кинетической энергией жидкости и рассматриваются методы его определения. Выяснены необходимые условия существования предполагаемого течения жидкости. При выполнении этих условий получены асимптотические зависимости для энергии вихреобразования и коэффициента сопротивления. Приведено сравнение с экспериментальными данными.

1. Коэффициент интенсивности скоростей. Рассмотрим безвихревое течение идеальной несжимаемой жидкости около пространственной бесконечно тонкой пластинки с произвольными гладкими поверхностью и граничным контуром (фиг. 1). Выберем на границе точку, в которой проведем касательную плоскость к поверхности пластинки. Обозначим через



Фиг. 1



Фиг. 2

n и τ лежащие в этой плоскости единичные векторы по нормали и касательной к граничному контуру. Определим орт бинормали $e = \tau \times n$. С каждой точкой границы свяжем локальную прямоугольную систему координат Oxy , оси x и y которой направим вдоль n и e соответственно.

В малой окрестности кромки пластинки течение жидкости близко к плоскому, поэтому комплексный потенциал и скорость в плоскости xy можно представить в виде [1]

$$w = Az^{1/2}, \quad \bar{v} = 1/2Az^{-1/2}, \quad z = x + iy \quad (1.1)$$

где A — комплексная постоянная для выбранной точки контура. Если течение жидкости нестационарное, то A зависит от времени t , которое

играет роль параметра. Скорость жидкости имеет сингулярную особенность в точке $z = 0$. Эта особенность характеризуется показателем степени и величиной A . Скорость вдоль τ конечна в любой точке.

Наряду с комплексными коэффициентами A введем действительные по формуле

$$K_v^2 = 1/2 \pi A \bar{A} \quad (1.2)$$

и назовем K_v коэффициентом интенсивности скоростей (КИС). Покажем, что квадрат КИС характеризует плотность кинетической энергии жидкости T вблизи кромки пластинки. Используя асимптотические представления (1.1) и определение (1.2), получим

$$\Delta T / \Delta l = 1/2 \rho K_v^2 \Delta r$$

где ρ — плотность жидкости, Δl — малый элемент длины кромки, Δr — радиус малого круга с центром в точке O (фиг. 2).

2. Определение КИС. Коэффициенты A и K_v зависят от положения точки на граничном контуре, геометрии пластинки и области, занятой жидкостью, а также от граничных условий.

Рассмотрим плоскую задачу обтекания неподвижной пластинки бесконечного размаха идеальной несжимаемой жидкостью, скорость v_∞ которой на бесконечности постоянна по величине и направлению. Задачу можно обратить, считая, что движется пластинка, а жидкость на бесконечности покоится. Если функция

$$z = f(\zeta) = 1/2 \zeta + c_0 + c_1 \zeta^{-1} + \dots \quad (2.1)$$

осуществляет конформное отображение внешности пластинки в физической комплексной плоскости z на внешность круга радиуса R во вспомогательной комплексной плоскости ζ , то [2]

$$dw/dz = 1/2 (\bar{v}_\infty - v_\infty R^2 \zeta^{-2}) d\zeta/dz \quad (2.2)$$

Можно принять, что кромка пластинки находится на действительной оси в точке z_* , а ее образом в плоскости ζ служит точка $\zeta_* = R e^{-i\alpha}$, где α — некоторый угол. В малой окрестности кромки

$$d\zeta/dz = g(z_*) (z - z_*)^{-1/2} \quad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в (2.2) и сравнивая с (1.1) при $\zeta = \zeta_*$, получим

$$A = -2ig(z_*) v_\infty \sin(\theta + \alpha) e^{i\alpha} \quad (2.4)$$

где θ — угол между направлением скорости и действительной осью.

Коэффициент A может быть вычислен по формуле (2.4), когда известно отображение (2.1). Так, для прямой пластинки

$$K_v^2 = 1/2 \pi R v_\infty^2 \sin^2 \theta \quad (2.5)$$

где R — ширина пластинки, θ — угол между пластинкой и скоростью. Для дуги окружности радиуса R с углом полураствора 2β

$$K_v^2 = \pi R v_\infty^2 \sin^2(\theta + \beta) \sin 2\beta \quad (2.6)$$

где θ — угол между хордой дуги и скоростью. Из (2.4) следует, что всегда существует направление $\theta = -\alpha$, при котором $A = 0$ и $K_v = 0$.

Получим зависимость, позволяющую в ряде случаев упростить вычисление КИС. Уменьшим размеры пластинки путем смещения точек граничного контура l против n на одинаковую величину δn , сохранив неизменными давления по разные стороны образованной поверхности разрыва. Перейдем к локальным координатам, связанным с новой кром-

кой, оставив для них прежние обозначения x и y . Всякое потенциальное движение однородной несжимаемой жидкости можно рассматривать как возникшее из состояния покоя в результате удара [3], поэтому после снятия давления изменение кинетической энергии жидкости будет

$$\delta T = \frac{1}{2} i \oint_l \int_0^{\delta n} p_t v dx dl, \quad p_t = -\rho (w_+ - w_-)$$

где p_t — импульс давлений. Значения скорости v и потенциала w_+ и w_- на разных сторонах поверхности определяются по формуле (1.1), причем потенциал определяется путем замены z на $z + \delta n$.

Вычисляя интеграл по x , находим:

$$\delta T / \delta n = \frac{1}{2} \rho \oint K_v^2 dl \quad (2.7)$$

Применение полученной зависимости особенно эффективно в случаях, когда известен, например, из соображений симметрии, вид изменения K_v по длине контура l . Можно вычислять K_v , изменяя часть граничного контура пластинки и вычисляя интеграл в (2.7) только по этой части контура.

Рассмотрим в качестве примера применение зависимости (2.7) для определения K_v при движении перпендикулярно своей плоскости тонкого круглого диска в безграничной покоящейся на бесконечности жидкости. Кинетическая энергия жидкости будет

$$T = \frac{1}{2} \mu v_0^2 = \frac{4}{3} \rho R^3 v_0^2 \quad (2.8)$$

где μ — присоединенная масса, v_0 и R — скорость и радиус диска. Принимая $\delta n = \delta R$ и подставляя (2.8) в (2.7) находим

$$K_v^2 = 4\pi^{-1} R v_0^2 \quad (2.9)$$

В общем случае для определения КИС требуется привлечение численных методов. При этом также полезно использование зависимости (2.7) для уточнения полученных результатов. Аналитическое решение можно получить для эллиптической пластинки, которая интересна тем, что K_v зависит от положения точки на граничном контуре. Очевидно, что для плоских пластинок K_v зависит только от нормальной к пластинке компоненты скорости, потому достаточно рассмотреть движение пластинки перпендикулярно своей плоскости. Решение этой задачи аналогично известному из линейной механики разрушения ([4], с. 149—156) определению коэффициентов интенсивности напряжений для эллиптической трещины в твердом теле, поэтому

$$K_v^2 = \frac{\pi v_0^2}{E^2(k)} \frac{b}{a} (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{1/2}, \quad k^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \quad (2.10)$$

где a и b — большая и малая полуоси эллипса, φ — угол, определяющий параметрические координаты точки на эллипсе: $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$; $E(k)$ — полный эллиптический интеграл второго рода. На концах большой полуоси K_v^2 в b/a раз меньше, чем на концах малой полуоси. Из (2.10) при $k = 1$ и $k = 0$ как частные случаи получаются зависимости (2.5) и (2.9).

3. Энергия вихреобразования при колебаниях пластинки в жидкости. Рассмотрим гармонические колебания пластинки в безграничной покоящейся на бесконечности жидкости. Радиусы кривизны поверхности и граничного контура пластинки считаем величинами того же или большего

порядка, что и ее характерный поперечный размер. В окрестности кромки комплексный потенциал течения жидкости запишем в виде

$$w = Az^{1/2} \cos \omega t \quad (3.1)$$

где ω — частота колебаний. Как и выше, в комплексном потенциале оставлен только главный член разложения, который приводит к сингулярной особенности для скорости и потому играет особую роль. В отличие от (1.1) здесь в явном виде выделена зависимость от времени, поэтому через A и K_v обозначаются амплитудные значения.

Предположим теперь, что обтекание пластинки происходит так, что во всех точках ее контура возникающее весьма сложное вихревое течение локализуется за счет вязкости в малой окрестности кромки, вне же этой окрестности асимптотически справедливо представление (3.1). Выясним необходимые для этого условия.

Определяющими параметрами, характеризующими течение жидкости в окрестности кромки, являются: плотность жидкости ρ , частота колебаний ω , кинематическая вязкость жидкости ν и коэффициент K_v . Введем кроме характерного размера пластинки R линейный масштаб $\delta = (\nu/\omega)^{1/2}$, характеризующий толщину колеблющегося погранслоя, и линейный масштаб $d = (K_v/\omega)^{1/2}$, характеризующий размер области завихренности вблизи острой кромки.

Для существования предполагаемого течения необходимо выполнение условий

$$\delta/R \ll d/R \ll 1 \quad (3.2)$$

Если условия (3.2) не выполняются, то вихревое течение не может рассматриваться как наложение на течение с комплексным потенциалом (3.1).

Заметим, что $K_v \sim R^{1/2}v_0$, где v_0 — характерная амплитуда скорости пластинки, и поэтому $d/R \sim (\nu_0/\omega R)^{1/2}$. Отсюда следует, что условие $d/R \ll \ll 1$ выполняется при больших числах Струхала $Sh = \omega R/\nu_0$ или, что эквивалентно, при малых относительных амплитудах колебаний пластинки. Условия (3.2) более грубо (через глобальные характеристики течения) можно записать в виде

$$Re^{-1/2} \ll Sh^{-1/2} \ll 1, \quad Re = \omega R^2/\nu$$

Если условия (3.2) выполняются, то КИС K_v — единственный параметр, характеризующий течение жидкости в «дальней» окрестности кромки и образование области завихренности в «ближней» окрестности кромки. Поэтому асимптотически размеры весьма малой области завихренности зависят от K_v и не зависят явно от геометрических параметров пластинки и граничных условий вдали от кромки. Ясно, что принятое выше допущение о том, что жидкость занимает безграничное пространство, несущественно. Сходящая завихренность перестраивает течение вблизи кромки таким образом, что устраняется сингулярность скорости, вызванная основным безвихревым течением с комплексным потенциалом (3.1). На участках границы пластинки, где при безотрывном потенциальном обтекании $K_v = 0$, области завихренности вообще не образуются.

Считая, что условия (3.2) выполняются, определим энергию вихреобразования dE на малом элементе dl граничного контура пластинки за период колебаний. Из определяющих параметров ρ , ω , ν и K_v можно составить единственную безразмерную комбинацию

$$\pi_1 = K_v^{4/3}/(\nu\omega^{-1/3}) \quad (3.3)$$

эквивалентную числу Рейнольдса локального течения. Применяя л-теорему подобия [5], получим

$$dE / dl = B (\pi_1) \rho K_v^{3/2} \omega^{-2/3} \quad (3.4)$$

Так как выражение (3.3) приводится к виду $\pi_1 = d^2/\delta^2$, то из (3.2) следует $\pi_1 \gg 1$. Поэтому можно принять, что коэффициент B от числа Рейнольдса не зависит, т. е. является постоянной.

Экспериментальные исследования [6, 7] показывают, что вихревое сопротивление при колебаниях пластинок в жидкости практически не зависит от числа Рейнольдса при его изменении в широком диапазоне значений $Re = 10^3 \dots 10^6$. Полная энергия вихреобразования за период колебаний находится интегрированием выражения (3.4) по граничному контуру

$$E = B \rho \omega^{-2/3} \oint K_v^{3/2} dl \quad (3.5)$$

При выводе зависимости (3.5) форма движения пластинки не конкретизировалась и может быть произвольной, лишь бы не нарушались принятые допущения. Важным частным случаем являются упругие колебания пластинки.

4. Вихревое сопротивление при гармонических колебаниях пластинки. Имеющиеся экспериментальные данные [7] представлены в виде зависимости усредненного (на основании равенства работ за период колебаний) коэффициента сопротивления c_x от числа Струхала $\omega R/v_0$, так как заметной зависимости c_x от числа Рейнольдса не было обнаружено. Силу сопротивления, действующую на пластинку, представим в виде [6]

$$F = -1/2 c_x \rho S |v| v, \quad v = v_0 \cos \omega t$$

где S — площадь миделевого сечения. Приравнивая работу этой силы за период колебаний энергии вихреобразования (3.5), находим

$$c_x = K (R \omega / v_0)^{1/2} \quad (4.1)$$

$$K = \frac{3}{4} B \frac{R^2}{S} \oint \left(\frac{K_v^2}{R v_0^2} \right)^{1/2} d \frac{l}{R} \quad (4.2)$$

Формула (4.1) дает зависимость коэффициента сопротивления пластинки от относительной амплитуды колебаний. Эта зависимость существенно отличается от известной [8], полученной для малых колебаний пластинки в потоке жидкости со значительной скоростью.

КИС K_v могут быть определены теоретически, поэтому единственной неизвестной величиной в (4.2) остается коэффициент B . Так как при принятых допущениях этот коэффициент является универсальной постоянной, то его можно найти, если численно или экспериментально определить зависимость c_x от амплитуды колебаний для какой-либо одной пластинки.

Экспериментально определялись [7] значения c_x для колец и длинных пластинок постоянной ширины при вынужденных колебаниях в направлении, перпендикулярном их плоскости. Эти результаты аппроксимировались зависимостью $c_x = K [v_0/(R \omega)]^n$, а значения K и n находились методом наименьших квадратов. Для условий, соответствующих колебаниям пластинки в безграничной жидкости, в частности, была получена зависимость (4.1) с $K \approx 4,6$.

Определяя в рассматриваемом случае K_v по формуле (2.5) при $\theta = 1/2\pi$ и подставляя в (4.2), получим $K = 3/2 (1/2\pi)^{1/2} B$. Отсюда $B \approx 1,7$.

В результате, если условия (3.2) приближенно выполняются, задача определения энергии вихреобразования и вихревого сопротивления при

гармонических колебаниях пластинок сводится к определению КИС в рамках концепции безотрывного потенциального течения жидкости.

Рассмотрим два примера. Сравним вихревое сопротивление при колебаниях в направлении нормали к своей плоскости свободной пластинки бесконечного размаха и такой же пластинки, расположенной одной из своих бесконечных кромок на бесконечной плоской стенке. Подставляя $K_p^2 = \pi R v_0^2$ в (4.2), получим $K = 5,7$. Сравнивая с $K = 4,6$ для свободной пластинки, находим, что сопротивление пластинки на стенке в 1,25 раз выше, что согласуется с экспериментальными данными [7].

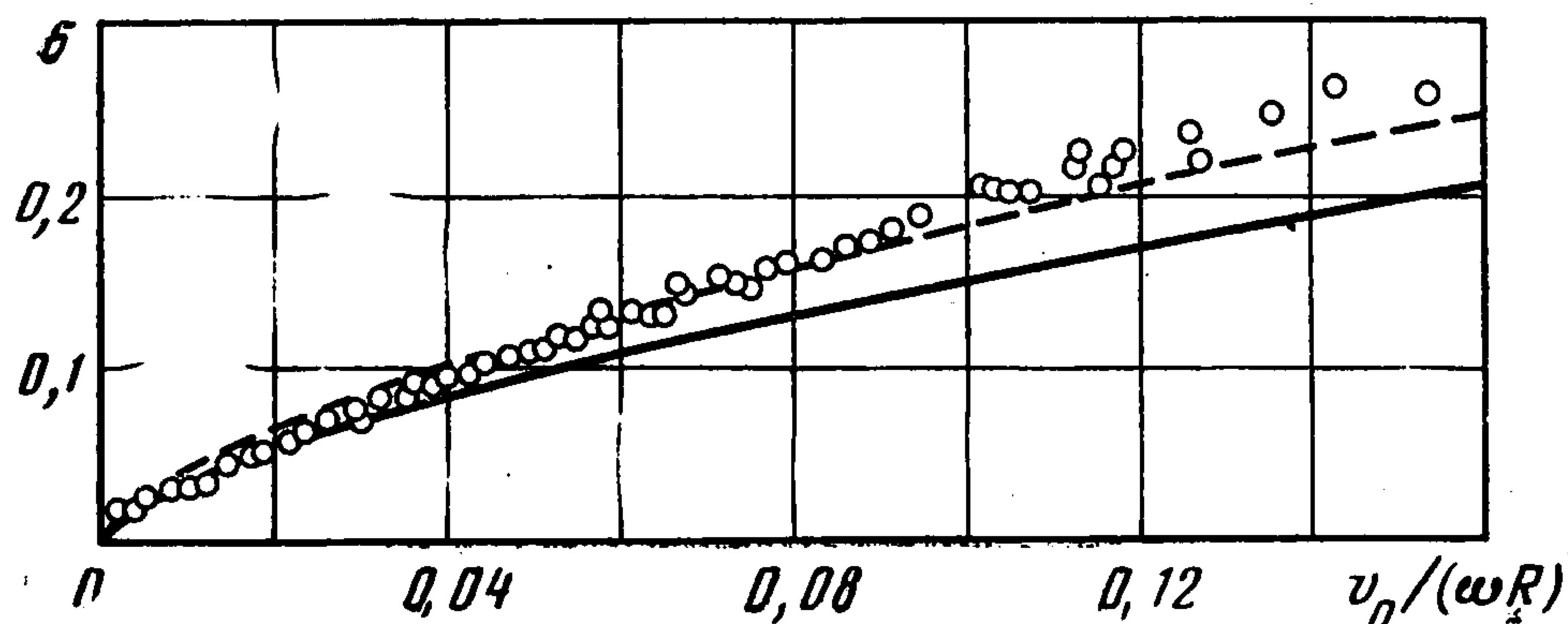
Определим вихревое сопротивление тонкого круглого диска, совершающего колебания перпендикулярно своей плоскости. Подставляя (2.9) в (4.2), находим $K = 3,5$.

Приведем сравнение с экспериментальными данными, полученными И. М. Мельниковой при испытаниях круглой пластины диаметром 1,5 м в воздушной среде. В этих испытаниях определялся логарифмический декремент затухания свободных колебаний пластины на упругой подвеске. При слабом демпфировании декремент δ колебаний можно вычислить как отношение энергии вихреобразования (3.5) к удвоенной полной энергии колебаний, что дает

$$\delta = K \left(\frac{v_0}{\omega R} \right)^{2/3}, \quad K = B \frac{\rho R^3}{\mu} \oint \left(\frac{K_v^2}{R v_0^2} \right)^{1/3} d \frac{l}{R} \quad (4.3)$$

где μ — обобщенная масса с учетом подвески и присоединенной массы воздуха.

Экспериментальные данные, представленные на фиг. 3, получены при частоте $\omega/(2\pi) = 0,4 \text{ с}^{-1}$ и соответствуют $\mu = 11,3 \text{ кг}$. Зависимость (4.3), рассчитываемая для



Фиг. 3

этого случая с использованием (2.9), показана на фиг. 3 кривой, которая лежит ниже опытных данных, причем расхождение растет с увеличением амплитуды колебаний, достигая 25% при $v_0/(\omega R) = 0,16$.

Если учесть асимптотический характер зависимости (4.3), то согласование с экспериментальными данными можно считать удовлетворительным. При этом отмеченное выше расхождение можно объяснить следующими причинами. Погрешность определения универсальной постоянной B по экспериментальным данным [7] составляет вследствие их разброса около 15%. Опытные данные, представленные на фиг. 3, являются более точными, но в расчете не учитывается некоторое влияние небольших ребер жесткости, которыми подкреплялась пластинка, чтобы исключить ее упругие колебания. С учетом сказанного правильнее принять грубо $B = 2$. Соответствующая этому значению B зависимость показана на фиг. 3 штриховой линией.

Автор благодарит участников семинара, руководимого Г. Г. Черным за обсуждение работы и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
2. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970. 904 с.
3. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1973. 584 с.
4. Разрушение / Ред. Г. Либовиц. Т. 2. М.: Мир, 1975. 764 с.
5. Седов Л. И. Методы теории подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1987. 432 с.
6. Keulegan G. H., Carpenter L. H. Forces on cylinders and plates in an oscillating fluid // J. Nes. Rat. Bur. Standards. 1958. V. 60. № 5. P. 423—440.
7. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость. М.: Машиностроение, 1971. 563 с.
8. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966. 448 с.

Москва

Поступила в редакцию
28.I.1988