

УДК 531.383

© 1990 г.

Д. Д. Лещенко, С. Н. Саллам

ВОЗМУЩЕННЫЕ ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА, БЛИЗКИЕ К РЕГУЛЯРНОЙ ПРЕЦЕССИИ

Исследуются возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа, когда восстанавливающий момент зависит от угла нутации. Предполагается, что угловая скорость тела достаточно велика, ее направление близко к оси динамической симметрии тела и возмущающие моменты малы по сравнению с восстанавливающим. Специальным образом вводится малый параметр, применяется метод усреднения. Получены усредненные системы уравнений движения в первом и втором приближениях. Рассмотрены конкретные механические модели возмущений.

Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа, исследовались также в [1]. Рассматривались возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной [2, 3]¹ и псевдoreгулярной² прецессии в случае Лагранжа, причем в первом случае считалось, что на тело действует постоянный восстанавливающий момент.

1. Постановка задачи. Рассмотрим движение динамически симметричного твердого тела вокруг неподвижной точки O под действием восстанавливающего момента, зависящего от угла нутации θ , и возмущающего момента.

Уравнения движения (динамические и кинематические уравнения Эйлера) имеют вид

$$\begin{aligned} Ap' + (C - A)qr &= k(\theta) \sin \theta \cos \varphi + M_1 \\ Aq' + (A - C)pr &= -k(\theta) \sin \theta \sin \varphi + M_2 \\ Cr' &= M_3, \quad M_i = M_i(p, q, r, \psi, \theta, \varphi, t) \quad (i = 1, 2, 3) \\ \psi' &= (p \sin \varphi + q \cos \varphi) / \sin \theta, \quad \theta' = p \cos \varphi - q \sin \varphi \\ \varphi' &= r - (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta \end{aligned} \quad (1.1)$$

Динамические уравнения записаны в проекциях на главные оси инерции тела, проходящие через точку O . Здесь p, q, r — проекции вектора угловой скорости тела на эти оси, M_i ($i = 1, 2, 3$) — проекции вектора возмущающего момента на те же оси, являющиеся периодическими функциями углов Эйлера ψ, θ, φ с периодами 2π , A — экваториальный, а C — осевой моменты инерции тела относительно точки O , $A \neq C$.

Предполагается, что на тело действует восстанавливающий момент, зависящий от угла нутации $k(\theta)$. В случае тяжелого волчка имеем $k = mgl$, где m — масса тела, g — ускорение силы тяжести, l — расстояние от неподвижной точки O до центра тяжести тела.

¹ См. также: Лещенко Д. Д., Саллам С. Н. Возмущенные вращательные движения твердого тела с распределением масс, близким к случаю Лагранжа. Одесса, 1988. 22 с. — Деп. в УкрНИИНТИ 28.06.1988, № 1655 — Ук 88.

² Лещенко Д. Д., Саллам С. Н. Возмущенные движения твердого тела, близкие к псевдoreгулярной прецессии. Одесса, 1988. 18 с. — Деп. в УкрНИИНТИ 28.06.1988, № 1656 — Ук 88.

Возмущающие моменты M_i в (1.1) предполагаются известными функциями своих аргументов. При отсутствии возмущений ($M_i = 0$, $i = 1, 2, 3$) и $k(\theta) = \text{const}$ уравнения (1.1) отвечают случаю Лагранжа. Делаются следующие предположения:

$$p^2 + q^2 \ll r^2, Cr^2 \gg k, |M_i| \ll k \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.2)$$

которые означают, что направление угловой скорости тела близко к оси динамической симметрии; угловая скорость достаточно велика, так что кинетическая энергия тела много больше потенциальной энергии, обусловленной восстанавливающим моментом; возмущающие моменты малы по сравнению с восстанавливающим. Неравенства (1.2) позволяют ввести малый параметр $\varepsilon \ll 1$ и положить

$$p = \varepsilon P, q = \varepsilon Q, k(\theta) = \varepsilon K(\theta), M_i = \varepsilon^2 M_i^* (P, Q, r, \psi, \theta, \varphi, t) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.3)$$

В [3], как и в данной работе, предполагались выполненными условия (1.2), (1.3), но считалось, что на тело действует постоянный восстанавливающий момент k . В [2], вместо третьего неравенства (1.2) рассматривалось условие $|M_i| \ll k$ ($i = 1, 2$), $M_3 \sim k$.

Новые переменные P, Q , а также переменные и постоянные $r, \psi, \theta, \varphi, K, A, C, M_i^*$ предполагаются ограниченными величинами порядка единицы при $\varepsilon \rightarrow 0$. Ставится задача исследования асимптотического поведения системы (1.1) при малом ε , если выполнены условия (1.2), (1.3). Будем пользоваться методом усреднения [4—6] на интервале времени порядка ε^{-1} .

2. Процедура усреднения. Сделаем в системе (1.1) замену переменных (1.3). Сократив обе части первых двух уравнений (1.1) на ε , получим

$$\begin{aligned} AP' + (C - A)Qr &= K(\theta) \sin \theta \cos \varphi + \varepsilon M_1^* \\ AQ' + (A - C)Pr &= -K(\theta) \sin \theta \sin \varphi + \varepsilon M_2^* \\ Cr' &= \varepsilon^2 M_3^*, \quad \psi' = \varepsilon (P \sin \varphi + Q \cos \varphi) / \sin \theta \\ \theta' &= \varepsilon (P \cos \varphi - Q \sin \varphi), \quad \varphi' = r - \varepsilon (P \sin \varphi + Q \cos \varphi) \text{ctg } \theta \end{aligned} \quad (2.1)$$

Рассмотрим систему нулевого приближения и положим $\varepsilon = 0$ в (2.1). Тогда из последних четырех уравнений (2.1) имеем

$$r = r_0, \psi = \psi_0, \theta = \theta_0, \varphi = r_0 t + \varphi_0 \quad (2.2)$$

Здесь $r_0, \psi_0, \theta_0, \varphi_0$ — постоянные, равные начальным значениям этих переменных при $t = 0$. Подставим выражения (2.2) в первые два уравнения системы (2.1) при $\varepsilon = 0$ и проинтегрируем полученную систему линейных уравнений для P, Q . Решение представим в виде

$$\begin{aligned} P &= a \cos \gamma_0 + b \sin \gamma_0 + \lambda_0 \sin (r_0 t + \varphi_0) \\ Q &= a \sin \gamma_0 - b \cos \gamma_0 + \lambda_0 \cos (r_0 t + \varphi_0) \\ a &= P_0 - \lambda_0 \sin \varphi_0, \quad b = -Q_0 + \lambda_0 \cos \varphi_0 \\ \lambda_0 &= K_0 C^{-1} r_0^{-1} \sin \theta_0, \quad \gamma_0 = n_0 t, \quad n_0 = (C - A) A^{-1} r_0 \neq 0 \\ &|n_0 / r_0| \leq 1, \quad K_0 = K(\theta_0) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь P_0, Q_0 — начальные значения переменных P, Q , введенных согласно (1.3), а переменная $\gamma = \gamma_0$ имеет смысл фазы колебаний. Система (2.1) существенно нелинейна, поэтому вводится дополнительная переменная γ , определяемая уравнением

$$\gamma' = n, \quad \gamma(0) = 0, \quad n = (C - A) A^{-1} r \quad (2.4)$$

При $\varepsilon = 0$ имеем $\gamma = \gamma_0 = n_0 t$ в соответствии с (2.3). Равенства (2.2), (2.3) определяют общее решение системы (2.1), (2.4) при $\varepsilon = 0$.

Исключим из первых двух соотношений (2.3) постоянные с учетом (2.2) и разрешим полученные равенства относительно a, b :

$$\begin{aligned} a &= P \cos \gamma + Q \sin \gamma - \lambda \sin (\gamma + \varphi) \\ b &= P \sin \gamma - Q \cos \gamma + \lambda \cos (\gamma + \varphi); \lambda = KC^{-1}r^{-1} \sin \theta \end{aligned} \quad (2.5)$$

Введем новую переменную δ следующим образом:

$$r = r_0 + \varepsilon \delta \quad (2.6)$$

Рассмотрим теперь систему (2.1) при $\varepsilon \neq 0$ и соотношения (2.5), (2.6) как формулы (содержащие переменную γ) перехода от переменных P, Q, r к переменным a, b, δ . Пользуясь этими формулами, перейдем в системе (2.1), (2.4) от переменных $P, Q, r, \psi, \theta, \varphi, \gamma$ к новым переменным $a, b, \delta, \psi, \theta, \alpha, \gamma$, где

$$\alpha = \gamma + \varphi \quad (2.7)$$

После ряда преобразований получим систему вида

$$\begin{aligned} a^\cdot &= \varepsilon A^{-1} (M_1^\circ \cos \gamma + M_2^\circ \sin \gamma) - \varepsilon K D_{11} \cos \theta (b - K D_{11} \sin \theta \cos \alpha) \\ &\quad - \varepsilon K' D_{11} \sin \theta \sin \alpha (a \cos \alpha + b \sin \alpha) + \varepsilon^2 K D_{12} \delta \cos \theta (b - \\ &\quad - 2K D_{11} \sin \theta \cos \alpha) + \varepsilon^2 K' D_{12} \delta \sin \theta \sin \alpha (a \cos \alpha + \\ &\quad + b \sin \alpha) + \varepsilon^2 K D_{22} M_3^\circ \sin \theta \sin \alpha \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} b^\cdot &= \varepsilon A^{-1} (M_1^\circ \sin \gamma - M_2^\circ \cos \gamma) + \varepsilon K D_{11} \cos \theta (a + K D_{11} \sin \theta \sin \alpha) \\ &\quad + \varepsilon K' D_{11} \sin \theta \cos \alpha (a \cos \alpha + b \sin \alpha) - \varepsilon^2 K D_{12} \delta \cos \theta (a + \\ &\quad + 2K D_{11} \sin \theta \sin \alpha) - \varepsilon^2 K' D_{12} \delta \sin \theta \cos \alpha (a \cos \alpha + b \sin \alpha) - \\ &\quad - \varepsilon^2 K D_{22} M_3^\circ \sin \theta \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta^\cdot &= \varepsilon C^{-1} M_3^\circ, \psi^\cdot = \varepsilon (a \sin \alpha - b \cos \alpha) / \sin \theta + \varepsilon K D_{11} - \varepsilon^2 K D_{12} \delta \\ \theta^\cdot &= \varepsilon (a \cos \alpha + b \sin \alpha), \gamma^\cdot = n_0 + \varepsilon (C - A) A^{-1} \delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha^\cdot &= C A^{-1} r_0 + \varepsilon C A^{-1} \delta - \varepsilon \operatorname{ctg} \theta (a \sin \alpha - b \cos \alpha) - \varepsilon K D_{11} \cos \theta + \\ &\quad + \varepsilon^2 K D_{12} \delta \cos \theta \end{aligned}$$

$$D_{ij} = C^{-i} r_0^{-j}, K' = dK/d\theta$$

Здесь M_i° — функции, полученные из M_i^* (см. (1.3)) в результате подстановки (2.5)—(2.7):

$$M_i^\circ (a, b, \delta, \psi, \theta, \alpha, \gamma, t) = M_i^* (P, Q, r, \psi, \theta, \varphi, t) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.9)$$

Рассматриваемая система уравнений (2.8) имеет вид

$$\begin{aligned} x^\cdot &= \varepsilon F_1 (x, y) + \varepsilon^2 F_2 (x, y), x(0) = x_0 \\ y^1 \cdot &= \omega_1 + \varepsilon g_1 (x, y) + \varepsilon^2 g_2 (x, y), y^1(0) = y^{10} \\ y^2 \cdot &= \omega_2 + \varepsilon h_1 (x, y) + \varepsilon^2 h_2 (x, y), y^2(0) = y^{20} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Вектор-функция $x = (x^1, \dots, x^5)$ состоит из медленных переменных $a, b, \delta, \psi, \theta$; через y^1 и y^2 обозначаются быстрые переменные α, γ ; ω_1, ω_2 — постоянные фазы, равные $C A^{-1} r_0$ и $(C - A) A^{-1} r_0$ соответственно. Вектор-функции F_i, g_i, h_i ($i = 1, 2$) определяются правыми частями уравнений (2.8).

Двумерный вектор (g_1, h_1) обозначим Z_1 . Предполагаем, что возмущающие моменты M_i^* не зависят от t .

Следуя известной процедуре построения асимптотики системы (2.10) [5], ищем замену переменных

$$\begin{aligned} x &= x^* + \varepsilon u_1 (x^*, y^*) + \varepsilon^2 u_2 (x^*, y^*) + \dots \\ y &= y^* + \varepsilon v_1 (x^*, y^*) + \varepsilon^2 v_2 (x^*, y^*) + \dots \\ y &= (y^1, y^2), x^* = (x^{*1}, \dots, x^{*5}), y^* = (y^{*1}, y^{*2}) \end{aligned}$$

такую, чтобы система (2.10) в новых переменных приняла вид

$$\begin{aligned} x^* &= \varepsilon A_1(x^*) + \varepsilon^2 A_2(x^*) + \dots \\ y^* &= \omega + \varepsilon B_1(x^*) + \varepsilon^2 B_2(x^*) + \dots, \quad \omega = (\omega_1, \omega_2) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Для этого нужно выбрать функции u_1, u_2, v_1, v_2 , определяющие замену переменных. Уравнения для вектор-функций u_1, v_1 , таковы [5]:

$$\begin{aligned} \omega \frac{\partial u_1}{\partial y^*} &= F_1(x^*, y^*) - A_1(x^*) \\ \omega \frac{\partial v_1}{\partial y^*} &= Z_1(x^*, y^*) - B_1(x^*) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Здесь $(\partial f / \partial x)$ — матрица частных производных $\| \partial f_i / \partial x^j \|$ ($i, j = 1, 2, \dots, 5$). Функции $A_1(x^*), B_1(x^*)$ определяются по формулам

$$\begin{aligned} A_1(x^*) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(x^*, y^*) dy^{*1} dy^{*2} \\ B_1(x^*) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} Z_1(x^*, y^*) dy^{*1} dy^{*2} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Функция $u_2(x^*, y^*)$ должна быть решением уравнения

$$\frac{\partial u_2}{\partial y^*} \omega = G(x^*, y^*) - A_2(x^*) \quad (2.14)$$

$$G(x^*, y^*) = F_2(x^*, y^*) + \frac{\partial F_1}{\partial x^*} u_1 + \frac{\partial F_1}{\partial y^*} v_1 - \frac{\partial u_1}{\partial x^*} A_1(x^*) - \frac{\partial u_1}{\partial y^*} B_1(x^*)$$

Функция $A_2(x^*)$ определяется следующим образом:

$$A_2(x^*) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} G(x^*, y^*) dy^{*1} dy^{*2} \quad (2.15)$$

Определим усредненную систему уравнений первого приближения для медленных переменных

$$x_1^{*'} = \varepsilon A_1(x_1^*), \quad x_1^*(0) = x_{10} \quad (2.16)$$

а также систему второго приближения для медленных переменных

$$x_2^{*'} = \varepsilon A_1(x_2^*) + \varepsilon^2 A_2(x_2^*), \quad x_2^*(0) = x_0 \quad (2.17)$$

и систему уравнений второго приближения для быстрых переменных

$$y_2^{*'} = \omega + \varepsilon B_1(x_1^*(t)), \quad y_2^*(0) = y^0; \quad y^0 = (y^{10}, y^{20}) \quad (2.18)$$

которая сразу интегрируется:

$$y_2^*(t) = y^0 + \omega t + \varepsilon \int_0^t B_1(x_1^*(s)) ds \quad (2.19)$$

Для исследования системы второго приближения (2.17) сделаем замену переменной $\tau = \varepsilon t$, после чего система (2.17) примет вид

$$dx_2^*/d\tau = A_1(x_2^*) + \varepsilon A_2(x_2^*) \quad (2.20)$$

В этом случае интервал времени $(0, T/\varepsilon)$, на котором рассматриваются решения исходной системы (2.10), перейдет в интервал $(0, T)$, не зависящий от малого параметра ε . Решение системы (2.20) ищется в виде

$$x_2^*(\tau) = x^{(1)}(\tau) + \varepsilon x^{(2)}(\tau) + O(\varepsilon^2) \quad (2.21)$$

Подставляя в (2.20) разложение (2.21), получим системы уравнений для вектор-функций $x^{(i)}(\tau) = x_i(t)$ ($\tau = \varepsilon t, i = 1, 2$):

$$dx^{(1)}/d\tau = A_1(x^{(1)}), \quad x^{(1)}(0) = x_0, \quad (2.22)$$

$$dx^{(2)}/d\tau = A_1'(x^{(1)}(\tau))x^{(2)} + A_2(x^{(1)}(\tau)), \quad x^{(2)}(0) = 0 \quad (2.23)$$

где A_1' — матрица частных производных компонент вектор-функций $A_1(x)$: $A_1'(x) = \|\partial A_1^i/\partial x^j\|$. Система (2.22) линейна, поэтому ее исследовать в ряде случаев проще, чем систему (2.20).

Обозначим $X(\tau, c)$ общее решение системы первого приближения (2.22):

$$X_\tau = A_1(X), \quad X(0, c) = c = x_0 \quad (2.24)$$

Тогда для функций $x^{(1)}(\tau)$, $x^{(2)}(\tau)$ получаются выражения

$$x^{(1)}(\tau) = X(\tau, x_0), \quad x^{(2)}(\tau) = \Phi(\tau) \int_0^\tau \Phi^{-1}(\tau_1) \eta(\tau_1) d\tau_1 \quad (2.25)$$

Здесь Φ — фундаментальная матрица однородного уравнения, соответствующего второму приближению

$$\Phi(\tau) = \|\partial X(\tau, c)/\partial c\|_{c=x_0}, \quad \eta(\tau) = A_2(x^{(1)}(\tau)) = A_2(X(\tau, x_0))$$

Определим вектор-функции

$$x_\varepsilon^v(t) = x^{(1)}(\varepsilon t) + \varepsilon x^{(2)}(\varepsilon t) + \varepsilon u_1(x^{(1)}(\varepsilon t), y^0 + \omega t + \varepsilon \int_0^t B_1(x^{(1)}(\varepsilon s)) ds) \quad (2.26)$$

$$y_\varepsilon^v(t) = y^0 + \omega t + \varepsilon \int_0^t B_1(x^{(1)}(\varepsilon s)) ds$$

Обоснование приведенной формальной схемы построения функций $x_\varepsilon^v(t)$, $y_\varepsilon^v(t)$ приведено в [3].

Таким образом, построение приближенных решений $x_\varepsilon^v(t)$, $y_\varepsilon^v(t)$ сводится к следующей процедуре: решаем при помощи рядов Фурье

уравнения (2.12), (2.14), затем по формуле (2.15) строим вектор-функцию $A_2(x^*)$, далее, согласно (2.25), определяем решения $x^{(1)}(\tau)$ и $x^{(2)}(\tau)$ уравнений (2.22), (2.23) и, наконец, по формуле (2.26) получаем искомые приближения $x_\varepsilon^v(t)$, $y_\varepsilon^v(t)$. Далее описанная процедура реализуется для некоторых конкретных систем уравнений динамики твердого тела.

Рассматриваемые ниже примеры возмущений таковы, что разложения в ряд Фурье правых частей уравнений (2.12) и (2.14) содержат лишь конечное число членов. Поэтому условие разрешимости уравнений (2.12) и (2.14) сводится к проверке конечного числа условий вида $\omega_1 m_1 + \omega_2 m_2 \neq 0$. В исследуемых примерах эти условия принимают вид $CA^{-1}r_0 \neq 0$, $(C - A)A^{-1}r_0 \neq 0$, а последние условия выполняются всегда в силу исходных предположений.

В качестве примера восстанавливающего момента, зависящего от угла нутации, рассмотрим твердое тело с прикрепленной к нему в точке N пружиной, конец L которой закреплен неподвижно (фигура). На тело действуют сила тяжести mg и сила упругости пружины F , модуль которой пропорционален деформации пружины $F = v(s - s_0)$. Здесь v — коэффициент жесткости пружины. В этом случае восстанавливающий момент имеет вид

$$k(\theta) = mgl + vhz [1 - s_0 (h^2 + z^2 - 2hz \cos \theta)^{-1/2}] \quad (2.27)$$

где $ON = z$, $OC = l$, $OL = h$, $LN = s = s(\theta)$.

Согласно (1.3), $k(\theta) = \varepsilon K(\theta)$

3. **Случай линейных внешних диссипативных моментов.** Рассмотрим возмущенное движение твердого тела в случае Лагранжа с учетом моментов, действующих на тело со стороны внешней среды. Считаем, что возмущающие моменты M_i ($i = 1, 2, 3$) с учетом (1.3) имеют вид [7]

$$M_1 = -\varepsilon^2 I_1 P, \quad M_2 = -\varepsilon^2 I_1 Q, \quad M_3 = -\varepsilon^2 I_3 r, \quad I_1, I_3 > 0 \quad (3.1)$$

где I_1, I_3 — некоторые постоянные коэффициенты пропорциональности, зависящие от свойств среды и формы тела.

Первые три уравнения (2.8) для рассматриваемой задачи в переменных $a, b, \delta, \psi, \theta, \alpha, \gamma$ принимают вид

$$\begin{aligned} a' = & -\varepsilon A^{-1} I_1 (a + KD_{11} \sin \theta \sin \alpha) - \varepsilon KD_{11} \cos \theta (b - \\ & - KD_{11} \sin \theta \cos \alpha) + \varepsilon^2 A^{-1} I_1 KD_{12} \delta \sin \theta \sin \alpha + \varepsilon^2 KD_{12} \delta \cos \theta (b - \\ & - 2KD_{11} \sin \theta \cos \alpha) - \varepsilon^2 I_3 KD_{21} \sin \theta \sin \alpha - \varepsilon K' D_{11} \sin \theta \sin \alpha (a \cos \alpha + \\ & + b \sin \alpha) + \varepsilon^2 K' D_{12} \delta \sin \theta \sin \alpha (a \cos \alpha + b \sin \alpha) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} b' = & -\varepsilon A^{-1} I_1 (b - KD_{11} \sin \theta \cos \alpha) + \varepsilon KD_{11} \cos \theta (a + \\ & + KD_{11} \sin \theta \sin \alpha) - \varepsilon^2 KA^{-1} I_1 D_{12} \delta \sin \theta \cos \alpha - \varepsilon^2 KD_{12} \delta \cos \theta (a + \\ & + 2KD_{11} \sin \theta \sin \alpha) + \varepsilon^2 I_3 KD_{21} \sin \theta \cos \alpha + \varepsilon K' D_{11} \sin \theta \cos \alpha (a \cos \alpha + \\ & + b \sin \alpha) - \varepsilon^2 K' D_{12} \delta \sin \theta \cos \alpha (a \cos \alpha + b \sin \alpha) \end{aligned}$$

$$\delta' = -\varepsilon C^{-1} I_3 r_0 - \varepsilon^2 C^{-1} I_3 \delta$$

Остальные уравнения системы (2.8) остаются неизменными.

Для построения приближенного решения системы (3.2) применим описанную в разд. 2 процедуру усреднения. Вектор-функции A_1 и B_1 определяются по формулам (2.13) и имеют вид

$$\begin{aligned} A_1 = & \{A_1^{(i)}\}, \quad (i = 1, 2, \dots, 5), \quad B_1 = \{B_1^{(j)}\}, \quad (j = 1, 2) \quad (3.3) \\ A_1^{(1)} = & -A^{-1} I_1 a - KD_{11} b \cos \theta - 1/2 K' D_{11} b \sin \theta \\ A_1^{(2)} = & -A^{-1} I_1 b + KD_{11} a \cos \theta + 1/2 K' D_{11} a \sin \theta \\ A_1^{(3)} = & -C^{-1} I_3 r_0, \quad A_1^{(4)} = KD_{11}, \quad A_1^{(5)} = 0 \\ B_1^{(1)} = & CA^{-1} \delta - KD_{11} \cos \theta, \quad B_1^{(2)} = (C - A)A^{-1} \delta \end{aligned}$$

Четвертая и пятая компоненты вектор-функции $u_1 \{u_1^{(i)}\}$ ($i = 1, 2, \dots, 5$) выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} u_1^{(4)} = & -AD_{11} (a \cos \alpha + b \sin \alpha) / \sin \theta \quad (3.4) \\ u_1^{(5)} = & AD_{11} (a \sin \alpha - b \cos \alpha) \end{aligned}$$

Отметим, что комбинации вида $M_1^\circ \cos \gamma + M_2^\circ \sin \gamma$ и $M_1^\circ \sin \gamma - M_2^\circ \cos \gamma$, как следует из уравнений (2.8), (3.2), не зависят от γ и правые части этих уравнений зависят лишь от одной быстрой переменной α . Этот факт отмечался в [3] и аналогичен полученным в [1] достаточным условиям возможности усреднения уравнений движения только по углу нутации. В результате упрощается решение уравнений (2.12).

Вектор-функция $A_2(x^*)$ после соответствующих вычислений по формуле (2.15) записывается в виде

$$\begin{aligned} A_2(x^*) = & \{A_2^{(i)}\} \quad (i = 1, 2, \dots, 5) \quad (3.5) \\ A_2^{(1)} = & KD_{12} [\delta b \cos \theta - 1/2 KD_{21} Ab (3 \cos^2 \theta - 1) - I_1 C^{-1} a \cos \theta] + \\ & + 1/2 K' D_{12} \delta b \sin \theta - 1/3 AD_{33} b (K' \sin \theta)^2 - 1/2 AK' D_{33} b K \sin 2\theta - \\ & - 1/2 I_1 D_{22} ad (K \sin \theta) / d\theta \\ A_2^{(2)} = & -KD_{12} [\delta a \cos \theta - 1/2 KD_{21} Aa (3 \cos^2 \theta - 1) + I_1 C^{-1} b \cos \theta] - \\ & - 1/2 K' D_{12} \delta a \sin \theta + 1/3 AD_{33} a (K' \sin \theta)^2 + 1/2 AK' D_{33} a K \sin 2\theta - \\ & - 1/2 I_1 D_{22} bd (K \sin \theta) / d\theta \\ A_2^{(3)} = & -C^{-1} I_3 \delta, \quad A_2^{(4)} = KD_{12} (-\delta + KD_{21} \cos \theta) \\ A_2^{(5)} = & I_1 KD_{22} \sin \theta \end{aligned}$$

Определим решение усредненной системы уравнений первого приближения (2.16) с учетом (3.3) для медленных и быстрых переменных

$$\begin{aligned} a^{(1)} &= \exp(-\varepsilon A^{-1} I_1 t) (a^\circ \cos wt - b^\circ \sin wt) \\ b^{(1)} &= \exp(-\varepsilon A^{-1} I_1 t) (b^\circ \cos wt + a^\circ \sin wt) \\ \delta^{(1)} &= -\varepsilon C^{-1} I_3 r_0 t, \quad \psi^{(1)} = \varepsilon K_0 D_{11} t + \psi_0, \quad \theta^{(1)} = \theta_0 \\ \alpha^{(1)} &= CA^{-1} r_0 t - \varepsilon K_0 D_{11} \cos \theta_0 t - 1/2 \varepsilon^2 A^{-1} I_3 r_0 t^2 + \varphi_0 \\ \gamma^{(1)} &= n_0 t - 1/2 \varepsilon^2 (C - A) A^{-1} C^{-1} I_3 r_0 t^2 \\ \omega &= 1/2 \varepsilon D_{11} (2K \cos \theta + K' \sin \theta)_{\theta=\theta_0} \end{aligned} \quad (3.6)$$

где величины a°, b°, n_0 определяются согласно (2.3); $\psi_0, \theta_0, \varphi_0$ — постоянные, равные начальным значениям углов Эйлера при $t = 0$. Сравнение полученных выражений (3.6) для медленных переменных $a^{(1)}, b^{(1)}$ с соответствующими формулами (4.5) работы [3], если положить в них $K = \text{const}$, дает совпадение указанных выражений.

На основании приведенных формул можно, следуя (2.26), построить компоненты функции $x_\varepsilon^v(t)$, отвечающие переменным ψ и θ , и записать их в виде

$$\begin{aligned} \psi_\varepsilon^v(t) &= \psi_0 + \varepsilon K_0 D_{11} t + S^{(1)} \\ S^{(1)} &= \varepsilon^2 t K_0^2 D_{33} \cos \theta_0 + 1/2 \varepsilon^3 K_0 D_{21} I_3 t^2 - \\ &- \varepsilon A D_{11} \exp(-\varepsilon A^{-1} I_1 t) C^\circ \sin(\alpha^{(1)} + \sigma) / \sin \theta_0 \\ \theta_\varepsilon^v(t) &= \theta_0 + \varepsilon^2 t I_1 K_0 D_{22} \sin \theta_0 + \varepsilon A D_{11} \exp(-\varepsilon A^{-1} I_1 t) C^\circ \sin(\alpha^{(1)} - \mu) \\ \cos \sigma &= \sin \mu = b^{(1)} \exp(\varepsilon A^{-1} I_1 t) / C^\circ, \quad C^\circ = (a^{\circ 2} + b^{\circ 2})^{1/2} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Сравнение полученных выражений (3.7) с формулами (4.7) статьи [3] дает совпадение указанных выражений при $K = K_0$. В выражении (3.7) для θ_ε^v слагаемое порядка ε является произведением медленно экспоненциально убывающего сомножителя $\exp(-\varepsilon A^{-1} I_1 t)$, обусловленного диссипацией энергии, и осциллирующего сомножителя $\sin(\alpha^{(1)} - \mu)$.

Величина декремента затухания и характер медленного изменения фазы малых колебаний видны из формул (3.6) для $b^{(1)}, \alpha^{(1)}$, которые отличаются от соответствующих формул (4.5) [3] величиной ω .

В выражении (3.7) слагаемое $S^{(1)}(\varepsilon, t)$ для переменной $\psi_\varepsilon^v(t)$ имеет порядок ε на интервале времени $(0, T\varepsilon^{-1})$. Выражение для угловой скорости прецессии $\omega_p = K_0 C^{-1} r_0^{-1}$ известно из приближенной теории гироскопов [8]. Найденное слагаемое $S^{(1)}(\varepsilon, t)$ уточняет эту формулу для рассматриваемой задачи.

Для рассматриваемого примера, когда восстанавливающий момент определяется по формуле (2.27) с учетом (2.13) решение усредненной системы уравнений первого приближения (2.16) для $a^{(1)}, b^{(1)}, \delta^{(1)}, \theta^{(1)}, \gamma^{(1)}$ имеет вид (3.6). При этом только выражения для $\psi^{(1)}$ и $\alpha^{(1)}$ изменяются и записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi^{(1)} &= D_{11} k(\theta_0) t + \psi_0 \\ \alpha^{(1)} &= CA^{-1} r_0 t - D_{11} k(\theta_0) t \cos \theta_0 - 1/2 \varepsilon^2 A^{-1} I_3 r_0 t^2 + \varphi_0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

В (3.6):

$$\begin{aligned} \omega &= D_{11} \{ (mgl + vhz) \cos \theta_0 - 1/2 vhzs_0 [2(h^2 + z^2) \cos \theta_0 - \\ &- 5hz \cos^2 \theta_0 + hz] (h^2 + z^2 - 2hz \cos \theta_0)^{-3/2} \} \end{aligned}$$

а в (3.8) $k(\theta_0)$ определяется по формуле (2.27) при $\theta = \theta_0$.

Компоненты функции $x_\varepsilon^v(t)$, отвечающие переменным ψ и θ , для рассматриваемого примера имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_\varepsilon^v(t) &= \psi_0 + D_{11} k(\theta_0) t + S^{(1)} \\ S^{(1)} &= D_{33} \cos \theta_0 k^2(\theta_0) t + 1/2 \varepsilon^2 D_{21} I_3 k(\theta_0) t^2 - \\ &- \varepsilon D_{11} A \exp(-\varepsilon A^{-1} I_1 t) C^\circ \sin(\alpha^{(1)} + \sigma) / \sin \theta_0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\theta_{\varepsilon^v}(t) = \theta_0 + \varepsilon I_1 D_{22} \sin \theta_0 k(\theta_0) t + \varepsilon D_{11} A \exp(-\varepsilon A^{-1} I_1 t) C^{\circ} \sin(\alpha^{(1)} - \mu) \\ \cos \sigma = \sin \mu = b^{(1)} \exp(\varepsilon A^{-1} I_1 t) / C^{\circ}$$

4. Случай малого постоянного момента. Рассмотрим движение твердого тела в случае Лагранжа под действием момента, постоянного в связанных осях. Тогда моменты сил, действующих на твердое тело, имеют вид $M_i = \varepsilon^2 M_i^* = \varepsilon^2 M_i^{\circ} = \text{const}$ ($i = 1, 2, 3$). При построении приближенного решения системы (2.8) с учетом выражения для M_i применим процедуру усреднения, описанную в разд. 2. Вектор-функция B_1 определяется согласно (3.3), а вектор-функция A_1 , полученная по формуле (2.13), имеет следующие компоненты:

$$A_1^{(1)} = -KD_{11}b \cos \theta - 1/2 K' D_{11} b \sin \theta \quad (4.1)$$

$$A_1^{(2)} = KD_{11}a \cos \theta + 1/2 K' D_{11} a \sin \theta$$

$$A_1^{(3)} = C^{-1} M_3^*, A_1^{(4)} = KD_{11}, A_1^{(5)} = 0$$

Четвертая и пятая компоненты вектор-функции u_1 выражаются по формулам (3.4). Функция $A_2(x^*)$ определяется по (2.15) и может быть записана в виде

$$A_2^{(1)} = D_{12}b [\delta K \cos \theta - 1/2 AK^2 D_{21} (3 \cos^2 \theta - 1) + 1/2 K' \delta \sin \theta + \\ + 1/8 AD_{21} (K' \sin \theta)^2 - 1/2 AK' D_{21} K \sin 2\theta] \quad (4.2)$$

$$A_2^{(2)} = -D_2 a [\delta K \cos \theta - 1/2 AK^2 D_{21} (3 \cos^2 \theta - 1) + 1/2 K' \delta \sin \theta + \\ + 1/8 AD_{21} (K' \sin \theta)^2 - 1/2 AK' D_{21} K \sin 2\theta]$$

$$A_2^{(3)} = 0, A_2^{(4)} = -KD_{12}\delta + AK^2 D_{33} \cos \theta, A_2^{(5)} = 0$$

Определим решение усредненной системы уравнений первого приближения (2.16) с учетом (4.1) для медленных и быстрых переменных

$$a^{(1)} = a^{\circ} \cos wt - b^{\circ} \sin wt, b^{(1)} = b^{\circ} \cos wt + a^{\circ} \sin wt \quad (4.3)$$

$$\delta^{(1)} = \varepsilon C^{-1} M_3^* t, \psi^{(1)} = \varepsilon K_0 D_{11} t + \psi_0, \theta^{(1)} = \theta_0$$

$$\alpha^{(1)} = CA^{-1} r_0 t - \varepsilon K_0 D_{11} \cos \theta_0 t + 1/2 \varepsilon^2 A^{-1} M_3^* t^2 + \varphi_0$$

$$\gamma^{(1)} = n_0 t + 1/2 \varepsilon^2 (C - A) C^{-1} A^{-1} M_3^* t^2$$

(Обозначения те же, что в (3.6)).

Отметим, что в решение усредненной системы первого приближения (4.3) входит только составляющая момента, постоянного в связанных осях, приложенная вдоль оси симметрии M_3^* . Проекция вектора возмущающего момента M_1^* , M_2^* выпадают при усреднении. Сравнение полученных решений (4.3) для медленных переменных $a^{(1)}$, $b^{(1)}$ с соответствующими выражениями (5.3) статьи [3], полагая в них $K = \text{const}$, дает совпадение указанных формул.

Согласно (2.26) и формулам (3.4), (4.2), (4.3) определяются компоненты функции $x_{\varepsilon^v}(t)$, отвечающие переменным ψ и θ :

$$\psi_{\varepsilon^v}(t) = \psi_0 + \varepsilon K_0 D_{11} t + V^{(1)} \quad (4.4)$$

$$V^{(1)} = \varepsilon^2 t K_0^2 D_{33} A \cos \theta_0 - 1/2 \varepsilon^3 D_{22} M_3^* K_0 t^2 - \varepsilon D_{11} A C^{\circ} \sin(\alpha^{(1)} + \kappa) / \sin \theta_0$$

$$\theta_{\varepsilon^v}(t) = \theta_0 + \varepsilon D_{11} A C^{\circ} \sin(\alpha^{(1)} - \chi)$$

$$\cos \kappa = \sin \chi = b^{(1)} / C^{\circ}$$

Здесь в выражении для θ_{ε^v} ограниченное осциллирующее слагаемое содержит ненулевые начальные данные a° , b° . Полученное слагаемое $V^{(1)}$, так же как и в предыдущей задаче, дополняет известное из приближенной теории гироскопов выражение для угловой скорости прецессии $\omega_p = KC^{-1} r_0^{-1}$.

Заметим, что формулы для углов нутации и прецессии не содержат параметров возмущающих моментов, если ограничиться построением пер-

вого приближения. В этом случае влияние возмущений на регулярную прецессию тела не учитывается и, таким образом, построение второго приближения является существенным.

Для рассматриваемого примера, когда восстанавливающий момент зависит от угла нутации согласно (2.27) с учетом (2.13), решение усредненной системы первого приближения (2.16) для $a^{(1)}$, $b^{(1)}$, $\delta^{(1)}$, $\theta^{(1)}$, $\gamma^{(1)}$ имеет вид (4.3). При этом только выражения для $\psi^{(1)}$ и $\alpha^{(1)}$ изменяются и записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}\psi^{(1)} &= D_{11}k(\theta_0)t + \psi_0 \\ \alpha^{(1)} &= CA^{-1}r_0t - D_{11}k(\theta_0)\cos\theta_0t + \frac{1}{2}\varepsilon^2A^{-1}M_3^*t^2 + \varphi_0\end{aligned}\quad (4.5)$$

В (4.3)

$$w = D_{11} \{ (mgl + vhz) \cos\theta_0 - \frac{1}{2}vhzs_0 [2(h^2 + z^2) \cos\theta_0 - 5hz \cos^2\theta_0 + hz] (h^2 + z^2 - 2hz \cos\theta_0)^{-3/2} \}$$

а в (4.5) $k(\theta_0)$ определяется по формуле (2.27) при $\theta = \theta_0$.

Компоненты функций $x_e^v(t)$, отвечающие переменным ψ , θ , для рассматриваемого примера записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}\psi_e^v(t) &= \psi_0 + D_{11}k(\theta_0)t + V^{(1)} \\ V^{(1)} &= -\frac{1}{2}\varepsilon^2D_{22}M_3^*k(\theta_0)t^2 + D_{33}A \cos\theta_0k^2(\theta_0)t - \varepsilon D_{11}AC^\circ \sin(\alpha^{(1)} + \kappa) / \sin\theta_0 \\ \theta_e^v(t) &= \theta_0 + \varepsilon D_{11}AC^\circ \sin(\alpha^{(1)} - \chi) \\ \cos\kappa &= \sin\chi = b^{(1)}/C^\circ\end{aligned}\quad (4.6)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Черноусько Ф. Л. Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 5. С. 771—778.
2. Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Черноусько Ф. Л. Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 5. С. 3—10.
3. Лещенко Д. Д., Шамаев А. С. Возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа // Изв. АН СССР. МТТ, 1987. № 6. С. 8—17.
4. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
5. Волосов В. М., Моргунов Б. С. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
6. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981. 400 с.
7. Кошляков В. Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: Аналитические методы. М.: Наука, 1985. 286 с.
8. Бухгольц Н. Н. Основы курса теоретической механики. Ч. 2. М.: Наука, 1969. 332 с.