УДК 531.36

Н. К. Мощук, И. Н. Синицын

О СТОХАСТИЧЕСКИХ НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМАХ

Рассматривается натуральная механическая система с идеальными стохастическими неголономными связями, находящаяся под действием потенциальных, диссипативных и возмущающих сил, зависящих от случайных (в общем случае негауссовых) параметров, удовлетворяющих нелинейным стохастическим (в смысле Ито) дифференциальным уравнениям. Составлены соответствующие стохастические уравнения движения в переменных Лагранжа и Гамильтона, а также уравнения для конечномерных плотностей и характеристических функций. Изучены стационарные одномерные распределения в нормальных стохастических неголономных системах Чаплыгина. Исследован систематический и флуктуационный дрейф. Рассмотрены задачи о качении шара и выпуклого твердого тела на поступательно вибрирующей горизонтальной плоскости.

1. Пусть во всякий момент времени t положение натуральной неголономной стохастической системы с идеальными связями определяется вектором обобщенных координат $\mathbf{q} = [q_1 \ldots q_n]^T$ и на скорости системы наложено m условий вида

$$\mathbf{a}^\varkappa \mathbf{q}^\cdot + a_0{}^\varkappa = 0, \quad \varkappa = 1, \ldots, m \tag{1.1}$$

где $\mathbf{a}^\varkappa = \mathbf{a}^\varkappa(\mathbf{q}, \boldsymbol{\pi}, t)$ — матрицы-строки размерности n, являющиеся детерминированными функциями обобщенных координат $\mathbf{q}$, случайных параметров $\boldsymbol{\pi} = [\pi_1(t) \ldots \pi_k(t)]^T$ и времени t; $a^\varkappa{}_0 = a^\varkappa{}_0(\mathbf{q}, \boldsymbol{\pi}, t)$ — детерминированные функции отмеченных переменных.

Примем, что вектор случайных параметров $\boldsymbol{\pi}$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению Ито известного вида с соответствующими начальными условиями:

$$\boldsymbol{\pi}^\cdot = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\pi}, t) + \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\pi}, t)\mathbf{V}, \quad \mathbf{V} = [V_1(t) \ldots V_l(t)]^T, \quad \boldsymbol{\pi}(t_0) = \boldsymbol{\pi}_0 \tag{1.2}$$

Здесь $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\pi}, t)$ и $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\pi}, t)$ — детерминированные функции размерности $k \times 1$ и $k \times l$ соответственно; $\mathbf{V} = d\mathbf{W}/dt$ — вектор белых шумов (в строгом смысле), $\mathbf{W} = \mathbf{W}(t)$ — произвольный случайный процесс с независимыми приращениями, обладающий нулевым математическим ожиданием и конечной ковариационной матрицей и независящей от $\boldsymbol{\pi}_0$. Как известно [1], такой процесс в общем случае выражается формулой

$$\mathbf{W}(t) = \mathbf{W}_0(t) + \int_{R^l} \mathbf{c}(\mathbf{x}) \mathbf{P}^\circ(t, d\mathbf{x}) \tag{1.3}$$

Здесь $\mathbf{W}_0(t)$ — винеровский (нормальный) случайный процесс; $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ — некоторая векторная функция (той же размерности l, что и процесс $\mathbf{W}(t)$) l-мерного векторного аргумента $\mathbf{x}$, а интеграл при любом $t \geqslant t_0$ представляет собой стохастический интеграл Ито по центрированной пуассоновской мере $\mathbf{P}^\circ(t, dx)$, независимой от процесса $\mathbf{W}(t)$ и имеющей независимые значения на попарно непересекающихся множествах. Интенсивность $\boldsymbol{\nu}(t)$ процесса $\mathbf{W}(t)$ определяется формулой

$$\boldsymbol{\nu}(t) = \boldsymbol{\nu}_0(t) + \int_{R^l} \mathbf{c}(\mathbf{x}) \mathbf{c}(\mathbf{x})^T \nu_P(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \tag{1.4}$$

где $\nu_0(t)$ — интенсивность винеровского процесса $\mathbf{W}_0(t)$, $\nu_P(t, \mathbf{x})$ — интенсивность потока скачков процесса $\mathbf{W}(t)$, равных $\mathbf{c}(\mathbf{x})$.

Примем, что вектор обобщенных возмущающих сил (размерности n) допускает представление

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\bullet}, \mathbf{V}, \pi, t) = \mathbf{Q}^1(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\bullet}, \pi, t) + \mathbf{Q}^2(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\bullet}, \pi, t)\,\mathbf{V} \tag{1.5}$$

Следуя П. В. Воронцу [2], получим стохастические уравнения движения (в смысле Ито) в переменных Лагранжа.

В самом деле, в силу идеальности связей (1.1) из принципа Даламбера — Лагранжа имеем уравнение

$$\sum_{s=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_s^{\bullet}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_s} + \frac{\partial R}{\partial q_s^{\bullet}} - Q_s\right]\delta q_s = 0 \tag{1.6}$$

$$T = T(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\bullet}, \pi, t), \quad \Pi = \Pi(\mathbf{q}, \pi, t), \quad R = R(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\bullet}, \pi, t)$$

где T, Π, R — соответственно кинетическая энергия, потенциальная энергия и функция рассеивания Релея.

Среди n виртуальных перемещений δq_s только $n - m$ независимых, так как в силу (1.1) $\mathbf{a}^{\varkappa}\delta\mathbf{q} = 0$. Предположим для определенности, что в качестве независимых виртуальных перемещений можно взять $\delta q_{m+1}, \ldots, \delta q_n$. Введем обозначения $\mathbf{q}' = [q_{m+1} \ldots q_n]^T$, $\mathbf{q}'' = [q_1 \ldots q_m]^T$. Тогда уравнения (1.1) позволяют выразить $\mathbf{q}''^{\bullet}$ через $\mathbf{q}'^{\bullet}$ и $\mathbf{q}$ в виде

$$\mathbf{q}''^{\bullet} = \mathbf{B}'\mathbf{q}'^{\bullet} + \mathbf{B}'' \tag{1.7}$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B}'(\mathbf{q}, \pi, t) \equiv \|B_{is}'\|, \quad \mathbf{B}'' = \mathbf{B}''(\mathbf{q}, \pi, t) \equiv \|B_i''\|; \quad i = 1, \ldots, m;$$
$$s = m + 1, \ldots, n$$

где $\mathbf{B}'$ — матрица размерности $m \times (n - m)$, $\mathbf{B}''$ — матрица-столбец размерности m.

Подставим (1.7) в (1.6) и приравняем нулю коэффициенты при независимых вариациях δq_s. Тогда, обозначая звездочкой результат исключения зависимых обобщенных скоростей $\mathbf{q}''^{\bullet}$ посредством (1.7), получим уравнения в стохастических дифференциалах Ито

$$d\left(\frac{\partial T^*}{\partial q_s^{\bullet}}\right) + \left[-\frac{\partial(T^* - \Pi)}{\partial q_s} + \frac{\partial R^*}{\partial q_s^{\bullet}} - \sum_{i=1}^{m} B_{is}'\,\frac{\partial(T^* - \Pi)}{\partial q_i} - \right.$$
$$\left. - \left(Q_s + \sum_{i=1}^{m} B_{is}'Q_i\right)\right]dt - \sum_{i=1}^{m}\left\{\left(\frac{\partial T}{\partial q_i^{\bullet}}\right)^*\left[dB_{is}' - \sum_{\beta=m+1}^{n}\left(\frac{\partial B_{i\beta}'}{\partial q_s} + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \sum_{\varkappa=1}^{m} B_{\varkappa s}'\frac{\partial B_{i\beta}'}{\partial q_\varkappa}\right)dq_\beta - \left(\frac{\partial B_i''}{\partial q_s} + \sum_{\varkappa=1}^{m} B_{\varkappa s}'\frac{\partial B_i''}{\partial q_\varkappa}\right)dt\right] + \Delta\sigma_{is}^* = 0 \tag{1.8}$$

$$\Delta\sigma_{is} = d(U_1U_2) - U_1dU_2 - U_2dU_1, \quad U_1 \equiv dT/\partial q_i, \quad U_2 \equiv B_{is}'$$

В (1.8) полный дифференциал сложной функции $u = u(z, \pi, t)$ вычисляется по обобщенной формуле Ито [1]

$$du = \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial^T u}{\partial \mathbf{z}}d\mathbf{z} + D_1[u]\,dt + \mathbf{D}_2[u]\,d\mathbf{W}_0 + \int_{R^l}\mathbf{D}_3[u]\,d\mathbf{P}^{\circ}(t, d\mathbf{x}) \tag{1.9}$$

$$D_1[u] = \frac{\partial^T u}{\partial \pi}\,\varphi + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(u_{\pi\pi}\Psi_0) +$$
$$+ \int_{R^l}\left[u(\mathbf{z}, \pi + \psi\mathbf{c}, t) - u(\mathbf{z}, \pi, t) - \frac{\partial^T u}{\partial \pi}\,\psi\mathbf{c}\right]\nu_P(t, \mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

$$\mathbf{D}_2[u] = \frac{\partial^T u}{\partial \pi}\,\psi, \quad \mathbf{D}_3[u] = u(\mathbf{z}, \pi + \psi\mathbf{c}, t) - u(\mathbf{z}, \pi, t)$$

$$\Psi_0 = \psi\nu_0\psi^T, \quad \mathbf{c} = \mathbf{c}(\mathbf{x}), \quad u_{\pi\pi} = \frac{\partial}{\partial \pi}\frac{\partial^T}{\partial \pi}u$$

Неголономные системы, описываемые системой стохастических дифференциальных уравнений (1.2), (1.7), (1.8), будем называть нормальными стохастическими неголономными системами, если $\mathbf{W}(t)$ — винеровский процесс; пуассоновскими стохастическими неголономными системами, если $\mathbf{W}(t)$ — пуассоновский процесс; стохастическими неголономными системами общего вида, если $\mathbf{W}(t)$ — произвольный процесс с независимыми приращениями. Уравнения (1.8) после преобразований при учете обобщенной формулы Ито (1.9) принимают вид

$$\sum_{j=m+1}^{n} g_{sj}\, dq_j^{\cdot} + \sum_{j,\beta=m+1}^{n} \Big(\sum_{r=1}^{3} \gamma_{sj\beta}^{r}\Big) q_j^{\cdot}\, dq_\beta + \sum_{j=m+1}^{n} \Big(\sum_{r=1}^{4} \alpha_{sj}^{r}\Big) dq_j -$$
$$- [(F_s^1 + Q_s^{11})\, dt + (\mathbf{F}_s^2 + \mathbf{Q}_s^{21})\, d\mathbf{W}_0] - \int_{R^l} \mathbf{F}_s^3\, d\mathbf{P}^\circ(t, d\mathbf{x}) = 0 \qquad (1.10)$$

Использовались следующие представления и обозначения:

$$T^* - \Pi = {}^1/_2 \mathbf{q}''^T \mathbf{G} \mathbf{q}'' + \mathbf{G}_1 \mathbf{q}'' - \Pi_0, \quad \mathbf{G} \equiv \| g_{sj} \|, \quad \mathbf{G}_1 \equiv \| g_s^1 \|$$
$$R^* = {}^1/_2 \mathbf{q}''^T \mathbf{A} \mathbf{q}'' + \mathbf{A}_0 \mathbf{q}'' + A_0, \quad \mathbf{A} \equiv \| \alpha_{sj}^2 \|, \quad \mathbf{A}_1 \equiv \| \alpha_s \|$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial q_i^{\cdot}}\right)^* \equiv \sum_{j=m+1}^{n} \theta_{ij} q_j^{\cdot} + \theta_i, \quad -\sum_{i=1}^{m} \Delta\sigma_{is}^* \equiv \sum_{j=m+1}^{n} \sigma_{js0}^1\, dq_j + \sigma_s^1\, dt + \boldsymbol{\sigma}_s^2\, d\mathbf{W}_0 +$$
$$+ \int_{R^l} \boldsymbol{\sigma}_s^3\, d\mathbf{P}^\circ(t, d\mathbf{x}) + \sum_{j=m+1}^{n} q_j^{\cdot} \left[\boldsymbol{\sigma}_{js0}^2\, d\mathbf{W}_0 + \int_{R^l} \boldsymbol{\sigma}_{js0}^3\, d\mathbf{P}^\circ(t, d\mathbf{x})\right]$$

$$F_s^1 = -\frac{\partial \Pi_0}{\partial q_s} - \sum_{i=1}^{m} B_{is}' \frac{\partial \Pi_0}{\partial q_i} - \alpha_s + \sum_{i=1}^{m} \theta_i \rho_{si} + f_s^1 \qquad (1.11)$$

$$\mathbf{F}_s^2 = \mathbf{f}_s^2 - \sum_{j=m+1}^{n} \boldsymbol{\alpha}_{sj}^5 q_j^{\cdot}, \quad \mathbf{F}_s^3 = \mathbf{c}(\mathbf{x})\,\mathbf{f}_s^2 - \sum_{i=1}^{m} \theta_i \mathbf{D}_3 [B_{is}'] - \sum_{j=m+1}^{n} \boldsymbol{\alpha}_{sj}^6 q_j^{\cdot} - \boldsymbol{\sigma}_s^3$$

$$\mathbf{f}_s^k = \mathbf{Q}_s^k + \sum_{i=1}^{m} B_{is}' \mathbf{Q}_i^k, \quad \mathbf{Q}_s^{k1} = \sum_{i=1}^{m} Q_i \mathbf{D}_k [B_{is}'] - \boldsymbol{\sigma}_s^k, \quad k = 1, 2$$

$$\gamma_{sj\beta}^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{js}}{\partial q_\beta} + \frac{\partial g_{s\beta}}{\partial q_j} - \frac{\partial g_{j\beta}}{\partial q_s}\right), \quad \gamma_{sj\beta}^2 = -\sum_{i=1}^{m} \theta_{ij} \gamma_{is\beta}^1,$$

$$\gamma_{is\beta}^3 = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} B_{is}' \frac{\partial g_{j\beta}}{\partial q_i}$$

$$\gamma_{is\beta}' = \frac{\partial B_{is}'}{\partial q_\beta} - \frac{\partial B_{i\beta}'}{\partial q_s} + \sum_{\varkappa=1}^{m} \left(B_{\varkappa\beta}' \frac{\partial B_{is}'}{\partial q_\varkappa} - B_{\varkappa s}' \frac{\partial B_{i\beta}'}{\partial q_\varkappa}\right) = -\gamma_{i\beta s}'$$

$$\alpha_{sj}^1 = \frac{\partial g_s^1}{\partial q_j} - \frac{\partial g_j^1}{\partial q_s} = -\alpha_{js}^1, \quad \alpha_{sj}^3 = -\sum_{i=1}^{m} \left(B_{is}' \frac{\partial g_s^1}{\partial q_i} + \theta_i \gamma_{isj}' + \theta_{ij} \rho_{sj}\right)$$

$$\rho_{sj} = \frac{\partial B_{is}'}{\partial t} - \frac{\partial B_i''}{\partial q_s} + \sum_{\varkappa=1}^{m} \left(B_\varkappa'' \frac{\partial B_{is}'}{\partial q_\varkappa} - B_{\varkappa s}' \frac{\partial B_i''}{\partial q_\varkappa}\right)$$

$$\alpha_{sj}^4 = \beta_{sj}^1 + \sigma_{js0}^1, \quad \boldsymbol{\alpha}_{sj}^5 = \boldsymbol{\beta}_{sj}^2 + \boldsymbol{\sigma}_{js0}^2, \quad \boldsymbol{\alpha}_{sj}^6 = \boldsymbol{\beta}_{sj}^3 + \sigma_{js0}^1$$

$$\boldsymbol{\beta}_{sj}^k = -\sum_{i=1}^{m} \theta_{ij} \mathbf{D}_k [B_{is}'] + \mathbf{D}_k [g_{sj}], \quad k = 1, 2, 3$$

В качестве начальных данных при $t = t_0$ для (1.10) принимаются случайные величины: $q_i = q_{i0}$, $q_i^{\cdot} = q_{i0}^{\cdot}$.

Для нормальной стохастической неголономной системы, когда $\mathbf{W} = \mathbf{W}_0$, имеем

$$\mathbf{D}_3[u] = 0, \quad \mathbf{v}_P = 0, \quad \boldsymbol{\sigma}_{js0}^3 = \boldsymbol{\sigma}_s^3 = 0, \quad \mathbf{F}_s^3 = 0$$

й уравнения (1.10) можно представить в виде стохастических дифференциальных уравнений Ито

$$\sum_{j=m+1}^{n} g_{sj}q_j^{\cdot\cdot} + \sum_{j,\beta=m+1}^{n}\Big(\sum_{r=1}^{3}\gamma_{sj\beta}^{r}\Big) q_j^{\cdot} q_\beta^{\cdot} + \sum_{j=m+1}^{n}\Big(\sum_{r=1}^{4}\alpha_{sj}^{r} + \alpha_{sj}^{5}\mathrm{V}_0\Big) q_j^{\cdot} -$$

$$- [F_s^1 + Q_s^{11} + (\mathrm{F}_s^2 + \mathrm{Q}_s^{21})\,\mathrm{V}_0] = 0 \quad (\mathrm{V}_0 = d\mathrm{W}_0/dt) \qquad (1.12)$$

Анализ структуры уравнений движения (1.12) показывает следующее. Слагаемые со вторыми производными характеризуют инерционные силы. Квадратичные по скоростям слагаемые характеризуют при $r = 1, 2$ гироскопические силы, а при $r = 3$ — некоторые, вообще говоря, диссипативные силы. Линейные по скоростям слагаемые определяют: при $r = 1$ — гироскопические силы, $r = 2$ — диссипативные силы, $r = 3$ — силы, вызванные неоднородностью и неавтономностью связей, $r = 4$ — возмущающие силы, обращающиеся в нуль при отсутствии случайных возмущений, $r = 5$ — нерегулярные возмущающие силы. Выражение в квадратных скобках характеризует некоторую эквивалентную возмущающую силу, причем $Q_s^{11} = 0$ и $\mathrm{Q}_s^{21} = 0$ при отсутствии случайных возмущений ($\pi = 0$).

Отметим, что в практически важном случае, когда коэффициенты g_{sj}, g_s^1 в выражении для кинетической энергии и коэффициенты B_{is}' неголономных связей линейно зависят от случайных параметров π, имеем $\Delta\sigma_{is} \equiv 0$, и уравнения (1.10) стохастической неголономной системы общего вида также можно привести к виду (1.12). Аналогичный вид имеют и уравнения движения пуассоновской стохастической неголономной системы.

Уравнения нормальной стохастической неголономной системы можно записать и в гамильтоновой форме

$$\mathrm{q}'^{\cdot} = \partial H/\partial \mathrm{p}' \equiv \mathrm{Y}(\mathrm{q}, \mathrm{p}', \pi, t) \qquad (1.13)$$

$$\mathrm{p}'^{\cdot} = \mathrm{U}(\mathrm{q}, \mathrm{p}', \pi, t) + \mathrm{U}''(\mathrm{q}, \mathrm{p}', \pi, t)\,\mathrm{V}$$

где $\mathrm{p}' = \partial T^*/\partial \mathrm{q}'^{\cdot}$, H — результат преобразования Лежандра функции $L^* = T^* - \Pi^*$, а $dp_s' - U_s dt - \mathrm{U}_s'' d\mathrm{W}_0 = 0$ — эквивалентная запись уравнения (1.8), в котором надо всюду заменить $\mathrm{q}'^{\cdot}$ на Y. Эти уравнения следует дополнить соотношением

$$\mathrm{q}''^{\cdot} = \mathrm{B}'\mathrm{Y} + \mathrm{B}'' \equiv \Lambda(\mathrm{q}, \mathrm{p}', \pi, t) \qquad (1.14)$$

Объединяя уравнения (1.2), (1.13), (1.14) вместе с соответствующими начальными условиями, представим их в виде следующего уравнения для расширенного вектора состояния $\mathrm{Z} = [\pi^T \mathrm{q}^T \mathrm{p}'^T]^T$:

$$\mathrm{Z}^{\cdot} = \mathrm{a}(\mathrm{Z}, t) + \mathrm{b}(\mathrm{Z}, t)\,\mathrm{V}_0, \quad \mathrm{Z}(t_0) = \mathrm{Z}_0 \qquad (1.15)$$

$$\mathrm{a}(\mathrm{Z}, t) = \begin{Vmatrix} \varphi(\pi, t) \\ \mathrm{X}(\pi, \mathrm{q}, \mathrm{p}', t) \\ \mathrm{U}(\pi, \mathrm{q}, \mathrm{p}', t) \end{Vmatrix}, \quad \mathrm{b}(\mathrm{Z}, t) = \begin{Vmatrix} \psi(\pi, t) \\ 0 \\ \mathrm{U}''(\pi, \mathrm{q}, \mathrm{p}', t) \end{Vmatrix}, \quad \mathrm{X} = \begin{Vmatrix} \Lambda(\pi, \mathrm{q}, \mathrm{p}', t) \\ \mathrm{Y}(\pi, \mathrm{q}, \mathrm{p}', t) \end{Vmatrix}$$

2. Для получения уравнений для распределений вектора состояния стохастической неголономной системы, описываемой стохастическими дифференциальными уравнениями Ито (1.15), могут быть использованы различные точные и приближенные методы теории стохастических дифференциальных систем (см. например, [1]).

Составим уравнения для характеристических функций и плотностей вектора состояния $\mathrm{Z}(t)$, предполагая известным одномерное распределение (а следовательно, и все конечномерные распределения) процесса с независимыми приращениями $\mathbf{W}(t)$, определяемого (1.3). Обозначим $h_1(\rho; t)$ и $g_1(\lambda; t)$ одномерные характеристические функции процессов $\mathbf{W}(t)$ и $\mathbf{Z}(t)$ соответственно. Тогда характеристическая функция $g_1(\lambda; t)$ удовлетворяет известному уравнению В. С. Пугачева

$$\partial g_1(\lambda; t)/\partial t = M\{i(\lambda^{\pi})^T \varphi(\pi, t) + i(\lambda^{q})^T \mathbf{X}(\pi, \mathbf{q}, \mathbf{p}', t) + i(\lambda^{p'})^T \mathbf{U}(\pi, \mathbf{q}, \mathbf{p}', t) +$$
$$+ \chi[\psi(\pi, t)^T \lambda^{\pi}; t] + \chi[\mathbf{U}''(\pi, \mathbf{q}, \mathbf{p}', t)^T \lambda^{p'}; t]\} \exp(i\lambda^T \mathbf{Z}) \qquad (2.1)$$
$$\lambda = [(\lambda^{\pi})^T (\lambda^{q})^T (\lambda^{p'})^T]^T, \quad \chi(\rho; t) \equiv \partial \ln h_1(\rho; t)/\partial t, \quad i = \sqrt{-1}$$

с начальным условием $g_1(\lambda; t_0) = g_0(\lambda)$, где $g_0(\lambda)$ — характеристическая функция величины $\mathbf{Z}(t_0)$. Уравнение и начальное условие (2.1) при известных условиях полностью и однозначно определяют $g_1(\lambda; t)$ при $t \geqslant t_0$ [1].

Следуя [1], аналогично (2.1) можно выписать уравнения для n-мерной ($n = 2, 3, \ldots$) характеристической функции процесса $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}(t)$.

Конкретный вид функции $\chi(\rho; t)$ в уравнении (2.1) определяется характером процесса $\mathbf{W}(t)$. Если $\mathbf{W}(t)$ — винеровский процесс, то $\chi(\rho; t) = -1/2\rho^T \mathbf{v}(t)\rho$, если $\mathbf{W}(t)$ — общий пуассоновский процесс, то $\chi(\rho; t) = [g(\rho) - 1]\mathbf{v}(t)$, где $g(\rho)$ — характеристическая функция скачков. Если процесс $\mathbf{W}(t)$ состоит из N независимых блоков, $\mathbf{W}(t) = [\mathbf{W}_1(t)^T \ldots \mathbf{W}_N(t)^T]^T$, то, разделив ρ на соответствующие блоки, имеем

$$\chi(\mathbf{b}(\mathbf{z}, t)^T \lambda; t) = \sum_{k=1}^{N} \chi_k(\mathbf{b}_k(\mathbf{z}, t)^T \lambda; t), \; \mathbf{b}(\mathbf{z}, t) = [\mathbf{b}_1(\mathbf{z}, t) \ldots \mathbf{b}_N(\mathbf{z}, t)]$$

В общем случае, когда процесс $\mathbf{W}(t)$ определяется формулой (1.3), для функции $\chi(\rho; t)$ и математического ожидания числа скачков процесса $\mathbf{W}(t)$, равных $\mathbf{c}(\mathbf{x})$, имеем

$$\chi(\rho; t) = -\frac{1}{2}\rho^T \mathbf{v}_0(t)\rho + \int_{R^l} [\exp(i\rho^T \mathbf{c}(\mathbf{x})) - 1 - i\rho^T \mathbf{c}(\mathbf{x})] \mathbf{v}_P(t, \mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

$$\mu(t, \mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_0^t \mathbf{v}_P(\tau, \mathbf{x})\, d\tau\, d\mathbf{x}$$

В случае нормального белого шума $\mathbf{V}$ уравнение (2.1) приводится к уравнению Фоккера — Планка — Колмогорова для одномерной плотности $f_1 = f_1(\pi, \mathbf{q}, \mathbf{p}', t)$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = -\frac{\partial^T}{\partial \pi}(\varphi f_1) - \frac{\partial^T}{\partial \mathbf{q}'}(\mathbf{X} f_1) - \frac{\partial^T}{\partial \mathbf{p}'}(\mathbf{U} f_1) +$$
$$+ \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\frac{\partial}{\partial \pi}\frac{\partial^T}{\partial \pi}(\psi \mathbf{v} \psi^T f_1)\right] + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}'}\frac{\partial^T}{\partial \mathbf{p}'}(\mathbf{U}'' \mathbf{v} \mathbf{U}''^T f_1)\right] \qquad (2.2)$$

Для стационарной нормальной стохастической неголономной системы одномерное стационарное распределение определяется из (2.1) при $\partial g_1/\partial t = 0$ или (2.2) при $\partial f_1/\partial t = 0$.

В общем случае, когда процесс $\mathbf{W} = \mathbf{W}(t)$ определяется формулой (1.3), соответствующее уравнение для одномерной плотности, приведено в ([1], с. 314).

Замечание. Уравнения для распределений вектора состояния нормальной стохастической неголономной системы (1.15) можно получить, понимая в исходных уравнениях задачи случайные процессы в смысле Стратоновича, а затем на последнем этапе воспользоваться формулой Ито (1.9) для винеровского процесса $\mathbf{W} = \mathbf{W}_0$. Для пуассоновских систем и систем общего вида такой прием не может быть использован, так как соответствующий случайный процесс не будет марковским.

3. Уравнения движения стохастической неголономной системы (1.1), (1.6) можно получить и при помощи общих теорем динамики или, например, при помощи уравнений Аппеля. Если полученная система стохастических уравнений движения будет линейной, то в этом случае можно сразу выписать явные формулы для конечномерных распределений.

Пример. Рассмотрим качение однородного шара по поступательно вибрирующей плоскости при наличии сил сопротивления качению. Считаем виброускорения произвольным векторным белым шумом $\mathbf{V} = [V_x V_y]^T$ с постоянными интенсивностями ν_x, ν_y. В дальнейшем x и y — координаты центра шара относительно вибрирующей плоскости. Тогда для $u_x = x^{\cdot}$ и x можно получить уравнения

$$u_x^{\cdot} + 2\varepsilon u_x = \delta V_x, \quad x^{\cdot} = u_x, \quad \delta = \mathrm{const} \tag{3.1}$$

($\varepsilon > 0$ — коэффициент трения). Уравнения для u_y и y получаются из (3.1) заменой x на y. Между проекциями угловой скорости ω на оси x и y и u_x, u_y существует кинематическая связь: $u_x = r\omega_y$, $u_y = -r\omega_x$ (r — радиус шара). Стохастические уравнения (3.1) представляют собой линейные уравнения Ланжевена. При нулевых начальных условиях математические ожидания, дисперсии и ковариации процессов u_x, x определяются известными формулами ([1], с. 307), из которых следует, что

$$k_{xx} \approx 0, \quad k_{xu_x} \approx 0, \quad k_{u_x u_x} \approx \nu_x \delta^2 t \quad (t \sim 0)$$

$$k_{xx} \approx \nu_x \delta^2 t/(4\varepsilon^2), \quad k_{xu_x} \approx \nu_x \delta^2/(8\varepsilon^2), \quad k_{u_x u_x} \approx \nu_x \delta^2/(4\varepsilon) \ (t \to \infty)$$

Явные формулы для конечномерных характеристических функций в этом случае приведены в [1].

4. Известно, что в нелинейных механических системах, находящихся под действием возмущающих сил, представляющих собой нормально распределенные белые шумы, существует стационарный в узком смысле процесс, одномерная плотность которого определяется формулой Гиббса [3]. Было получено [1, 4, 5] обобщение распределения Гиббса для некоторых типов голономных систем. В силу структуры уравнений неголономных систем (1.13), (1.14) возможно следующее обобщение.

Утверждение 1. Пусть стохастические уравнения движения некоторой механической системы в канонических переменных имеют вид

$$\mathbf{q}'^{\cdot} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}'}, \quad \mathbf{p}'^{\cdot} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}'} - 2\varepsilon \mathbf{a}(\mathbf{q}') \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}'} + \mathbf{b}(\mathbf{q}')\mathbf{V}, \quad \mathbf{q}''^{\cdot} = \Lambda(\mathbf{q}', \mathbf{p}')$$

Здесь 2ε — удельный коэффициент вязкого трения, $\mathbf{V}$ — вектор независимых нормально распределенных белых шумов одной и той же постоянной интенсивности ν; $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{q}')$ и $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{q}')$ — матричные функции. Положим $\mathbf{x} = [\mathbf{q}'^T \mathbf{p}'^T]^T = [\mathbf{x}'^T \mathbf{x}''^T]^T$ $\dim \mathbf{x}' = \dim \Lambda \leqslant \dim \mathbf{x}$. Тогда при выполнении условий

1) $\mathbf{a} + \mathbf{a}^T = 2\mathbf{b}\mathbf{b}^T$, 2) $|\partial\Lambda/\partial\mathbf{x}'| \neq 0$

3) $\displaystyle\iint_{-\infty}^{\infty} \exp[-\alpha H(\mathbf{q}', \mathbf{p}')]\, d\mathbf{q}'\, d\mathbf{p}' < \infty \quad (\alpha = 4\varepsilon/\nu)$

существует стационарное в узком смысле решение, причем одномерные плотности $\mathbf{q}'$, $\mathbf{p}'$ и $\mathbf{p}'' = \mathbf{q}''^{\cdot}$ определяются формулами

$$f_1(\mathbf{q}', \mathbf{p}') = c \exp[-\alpha H(\mathbf{q}', \mathbf{p}')]$$

$$f_1(\mathbf{p}'') = \int_{-\infty}^{\infty} f_1[\Lambda^{-1}(\mathbf{p}'', \mathbf{x}''), \mathbf{x}'']\, J(\mathbf{p}'', \mathbf{x}'')\, d\mathbf{x}''$$

$$J(\mathbf{p}'', \mathbf{x}'') = |\partial\Lambda^{-1}(\mathbf{p}'', \mathbf{x}'')/\partial\mathbf{p}''| \neq 0 \tag{4.1}$$

где c — постоянная, определяемая из условий нормировки.

Доказательство утверждения 1 проводится аналогично указанному в ([1], пример 5.16) с использованием формулы для плотности распределения функции случайного аргумента [6].

Утверждение 1 допускает обобщение на случай неголономных систем вида

$$q^{\cdot} = Y(q', p'), \; p'^{\cdot} = U_1(q', p') - 2\varepsilon U_2(q', p') + b(q') V, \quad q'''^{\cdot} = \Lambda(q', p') \quad (4.2)$$

которые при отсутствии трения ($\varepsilon = 0$) и случайных возмущений ($b = 0$) обладают инвариантной мерой и некоторым первым интегралом $H = H(q', p')$.

Утверждение 2. Предположим, что при $\varepsilon = 0$, $b = 0$ система (4.2) обладает инвариантной мерой с плотностью $N(q')$, т. е. $\partial^T (NY)/\partial q' + \partial^T (NU_1)/\partial p' = 0$, и первым интегралом $H = H(q', p')$. Тогда при выполнении условия $U_2 = a(q')\partial H/\partial p'$ и условий 1) — 3) утверждения 1 существует стационарное в узком смысле решение и одномерные плотности q', p' и $p'' = q'''^{\cdot}$ определяются формулами

$$f_1(q', p') = cN(q') \exp[-\alpha H(q', p')], \quad \alpha = 4\varepsilon/\nu \quad (4.3)$$

и (4.1) соответственно.

Утверждения 1 и 2 дают точные стационарные решения только для нормальных неголономных систем, удовлетворяющих сформулированным условиям.

Для ряда встречающихся в статистической неголономной нелинейной механике систем общего вида конечномерные распределения можно приближенно получить методом нормальной аппроксимации [1].

5. В дальнейшем некоторые обозначения, принятые в разд. 1—4, будут иметь иной смысл, так как являются традиционными для динамики твердого тела. Рассмотрим тяжелое твердое тело, ограниченное строго выпуклой поверхностью и находящееся на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Предполагаем, что опорная плоскость совершает поступательную вибрацию. Положение тела будем задавать координатами $r = [xyz]^T$ его центра масс G в системе координат $Oxyz$ (плоскость Oxy совпадает с опорной вибрирующей плоскостью, ось Oz направлена вертикально вверх) и углами Эйлера $q = [\psi\varphi\theta]^T$, определяющими ориентацию главных центральных осей $G\xi\eta\zeta$ инерции тела относительно системы координат $Oxyz$. Введем неподвижную систему координат $O_1x_1y_1z_1$, оси которой параллельны соответствующим осям системы координат $Oxyz$. Положение вибрирующей плоскости задано, если известно изменение со временем вектора $O_1O(t)$. Компоненты вектора $O_1O = [x_0(t) y_0(t) z_0(t)]^T$ считаем независимыми случайными процессами. Предполагается, что тело во время своего движения не отрывается от опорной плоскости. Следовательно, $z = z(\varphi, \theta)$.

Уравнения связей системы (выражающие отсутствие проскальзывания в точке контакта тела с плоскостью) детерминированные и имеют вид [7]

$$r^{\cdot} = b^T(q)q^{\cdot}, \quad b = \| b_{ij} \| \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (5.1)$$

$$b_{11} = -z_\varphi \sin\psi/\sin\theta - z_\theta \cos\psi, \quad b_{12} = -\partial b_{11}/\partial\psi, \quad b_{13} = 0$$

$$b_{21} = -z_\varphi \sin\psi \operatorname{ctg}\theta - (z_\theta \cos\theta + z\sin\theta)\cos\psi,$$

$$b_{22} = -\partial b_{21}/\partial\psi, \quad b_{23} = z_\varphi$$

$$b_{31} = z\sin\psi, \quad b_{32} = -z\cos\psi, \quad b_{33} = z_\theta \quad (z_\theta = \partial z/\partial\theta, \; z_\varphi = \partial z(\partial\varphi)$$

Заметим, что $b_1 = bb^T$ — матричная функция только углов φ и θ. Функция Лагранжа системы имеет вид

$$L = L_1 + m(x_0^{\cdot 2} + y_0^{\cdot 2} + z_0^{\cdot 2} + 2x^{\cdot}x_0^{\cdot} + 2y^{\cdot}y_0^{\cdot} + 2z^{\cdot}z_0^{\cdot})/2$$

$$L_1 = m(x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2})/2 + (A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi + mz_\theta^2)/\theta^{\cdot 2}/2 +$$

$$+ (C + mz_\varphi^2)\varphi^{\cdot 2}/2 + [(A \sin^2\varphi + B\cos^2\varphi)\sin^2\theta + C\cos^2\theta]\psi^{\cdot 2}/2 +$$
$$+ mz_\theta z_\varphi \theta^\cdot \varphi^\cdot + C\cos\theta\psi^\cdot\varphi^\cdot + (A - B)\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi\theta^\cdot\psi^\cdot - mgz \quad (5.2)$$

где m — масса тела, A, B, C — его главные центральные моменты инерции, L_1 — функция Лагранжа, соответствующая движению тела по неподвижной абсолютно шероховатой плоскостью [7].

Пусть на тело действуют диссипативные силы с функцией Релея $\Phi = \Phi(\mathbf{r}^\cdot, \mathbf{q}, \mathbf{q}^\cdot, \mathbf{O_1O}^\cdot)$. Движение твердого тела на горизонтальной, абсолютно шероховатой, поступательно вибрирующей плоскости может быть сведено к исследованию движения твердого тела на неподвижной горизонтальной абсолютно шероховатой плоскости при наличии возмущающих сил вида $\mathbf{Q} = -m\mathbf{bO_1O}^{\cdot\cdot}$.

Действительно, для элементарной работы $\delta A'$ сил инерции в подвижной системе координат $Oxyz$ можно получить выражение:

$$\delta A' = - m\mathbf{O_1O}^{\cdot\cdot T}\delta\mathbf{r} = - m\mathbf{O_1O}^{\cdot\cdot T}\mathbf{b}^T\delta\mathbf{q}$$

Отсюда $\mathbf{Q} = -m\mathbf{bO_1O}^{\cdot\cdot}$.

Следовательно, уравнения движения тела можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_1^*}{\partial \mathbf{q}^\cdot}\right) - \frac{\partial L_1^*}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{\Gamma} - \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{q}^\cdot} + \mathbf{Q} \quad (5.3)$$

где $\mathbf{\Gamma}$ — матрица-столбец членов неголономности; L_1^*, Φ^* получаются из L_1 и Φ заменой $x^\cdot$, $y^\cdot$, $z^\cdot$ соответствующими выражениями (5.1) через $\mathbf{q}$ и $\mathbf{q}^\cdot$. Явный вид L_1^* и $\mathbf{\Gamma}$ приведен в [7].

Уравнения (5.3) запишем в гамильтоновой форме

$$\mathbf{q}^\cdot = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \mathbf{p}^\cdot = - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \Phi^*}{\partial \mathbf{q}^\cdot} + \mathbf{\Gamma} + \mathbf{Q}, \quad \mathbf{p} = [p_\psi p_\varphi p_\theta]^T = \frac{\partial L_1}{\partial \mathbf{q}^\cdot} \quad (5.4)$$

Здесь H — результат преобразования Лежандра функции L_1^*, в правой части уравнений для $\mathbf{p}^\cdot$ всюду надо заменить $\mathbf{q}^\cdot$ на $\partial H/\partial \mathbf{p}$.

Далее будем рассматривать две модели вязкого трения. Первой соответствует функция Релея $\Phi_1 = m\varepsilon \mathrm{U}_e^2$, а второй — $\Phi_2 = m\varepsilon \mathrm{U}^2$, где U и U_e — абсолютная и относительная (по отношению к подвижной системе координат $Oxyz$) скорости центра масс G, $\varepsilon > 0$ — удельный коэффициент трения. Тогда

$$\Phi_1^* = m\varepsilon\mathbf{q}^{\cdot T}\mathbf{b}_1\mathbf{q}^\cdot, \quad \Phi_2^* = \Phi_1^* + 2m\varepsilon\mathbf{O_1O}^{\cdot T}\mathbf{b}^T\mathbf{q}^\cdot + m\varepsilon\mathbf{O_1O}^{\cdot 2}$$

В первом случае будем считать, что виброускорения $\mathbf{O_1O}^{\cdot\cdot}$ представляют собой вектор $\mathbf{V}$ независимых, нормально распределенных белых шумов постоянной интенсивности ν. Во втором случае будем считать $\pi = \mathbf{O_1O}^\cdot$ вектором стационарных случайных функций, удовлетворяющим следующему дифференциальному уравнению формирующего фильтра ([1], с. 260): $\pi^\cdot + 2\varepsilon\pi = \mathbf{V}$. Это позволяет записать уравнения движения (5.4) в первом и во втором случаях в виде системы стохастических нелинейных дифференциальных уравнений

$$\mathbf{q}^\cdot = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \mathbf{p}^\cdot = - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{\Gamma} - 2\varepsilon m\mathbf{b}_1\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - m\mathbf{bV} \quad (5.5)$$

Уравнения (5.5) при $\varepsilon = 0$, $\mathbf{b} = 0$ допускают интеграл энергии $H = \mathrm{const}$. Кроме того, выполнены условия 1)—3) утверждения 1. Однако инвариантной мерой эти уравнения, вообще говоря, не обладают [8].

Рассмотрим один из случаев, когда инвариантная мера все же существует. Пусть тело ограничено поверхностью вращения с осью ζ и динамически симметрично, т. е. $A = B$, $z = z(\theta)$. Тогда H, Γ, $\mathbf{b}_1$ от углов ψ и φ не зависят. Уравнения (5.5) при $\varepsilon = 0$, $\mathbf{b} = 0$ допускают три первых интеграла [9] и обладают инвариантной мерой с плотностью $N(\theta)$ [10]

$$N(\theta) = \delta^{-1}(\theta),\ \delta(\theta) = (1 + mC^{-1}\mu^2 + mA^{-1}\varkappa^2)^{1/2}$$
$$\mu = z\sin\theta + z_\theta\cos\theta,\ \varkappa = -z\cos\theta + z_\theta\sin\theta$$

Условию 3 утверждения 1 удовлетворяет только интеграл энергии $H = H(\mathbf{p}, \theta)$. Следовательно, согласно утверждению 2 существует стационарное решение и одномерная плотность для переменных θ, p_θ, p_ψ, p_φ определяется формулой

$$f_1(\theta, p_\theta, p_\psi, p_\varphi) = cN(\theta)\exp(-2\varepsilon\nu^{-1}H) =$$
$$= cN(\theta)\exp\{-2\varepsilon\nu^{-1}[(A + m(z^2 + z_\theta^2))^{-1}p_\theta^2 + (C + m\mu^2)\Delta^{-1}p_\psi^2 -$$
$$- (C\cos\theta + mz_\theta\mu)\Delta^{-1}p_\psi p_\varphi + (A\sin^2\theta + C\cos^2\theta + mz_\theta^2)\Delta^{-1}p_\varphi^2]\},$$
$$\Delta = AC\delta^2\sin^2\theta$$

6. Важным частным случаем нормальных стохастических неголономных систем являются нормальные стохастические неголономные системы Чаплыгина, для которых выполнены следующие условия:

$$\mathbf{a}^\varkappa(\mathbf{q}, \boldsymbol{\pi}, t) = \mathbf{a}^\varkappa(\mathbf{q}', \boldsymbol{\pi}, t),\quad a_0^\varkappa(\mathbf{q}, \boldsymbol{\pi}, t) = a_0^\varkappa(\mathbf{q}', \boldsymbol{\pi}, t) \tag{6.1}$$
$$Q_s^1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\pi}, t) = Q_s^1(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\pi}, t),\ Q_s^2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\pi}, t) = Q_s^2(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\pi}, t) \tag{6.2}$$
$$(s = m + 1, \ldots, n),\quad Q_1 = \ldots = Q_m = 0$$
$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\pi}, t) = T(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\pi}, t),\quad \Pi(\mathbf{q}, \boldsymbol{\pi}, t) = \Pi(\mathbf{q}', \boldsymbol{\pi}, t) \tag{6.3}$$
$$R(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\pi}, t) = R(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\pi}, t),\quad \mathbf{q}' = [q_{m+1} \ldots q_n]^T$$

Уравнения движения неголономной стохастической системы Чаплыгина в переменных Лагранжа имеют вид (1.12) при

$$\gamma^3_{sj\beta} = 0,\quad \gamma'_{is\beta} = \frac{\partial B_{is}'}{\partial q_\beta} - \frac{\partial B_{i\beta}'}{\partial q_s} = -\gamma'_{i\beta s},\quad \alpha_{sj}^3 = -\sum_{i=1}^{m}(\theta_i\gamma'_{isj} + \theta_{ij}\rho_{sj})$$
$$F_s' = -\frac{\partial \Pi_0}{\partial q_s} - \alpha_s + \sum_{i=1}^{m}\theta_i\rho_{si} + f_s^1,\quad D_1[u] = \frac{\partial^T u}{\partial \boldsymbol{\pi}}\boldsymbol{\varphi} + {}^1/_2\,\mathrm{tr}(u_{\pi\pi}\Psi_0) \tag{6.4}$$

(выражения для остальных величин приведены в (1.9), (1.11)).

Стохастические уравнения движения неголономной стохастической системы Чаплыгина в канонических переменных Гамильтона приводятся к виду (1.3), (1.14) при

$$H = \frac{1}{2}\mathbf{p}'^T\mathbf{G}^{-1}\mathbf{p}' - \mathbf{G}_1\mathbf{G}^{-1}\mathbf{p}' + \frac{1}{2}\mathbf{G}_1\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}_1^T + \Pi_0 \tag{6.5}$$
$$\mathbf{Y} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{p}' - \mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}_1^T,\quad \boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{B}'\mathbf{Y} + \mathbf{B}''$$

В силу декомпозиции стохастических уравнений на два блока для лагранжевых переменных $\mathbf{q}'$, $\dot{\mathbf{q}}$ (или $\mathbf{q}'$, $\mathbf{p}'$) и для переменных $\mathbf{q}''$ ясна последовательность их решения [11]. Следует сначала найти распределения переменных $\mathbf{q}'$, $\dot{\mathbf{q}}'$ (или $\mathbf{q}'$, $\mathbf{p}'$), а затем по формулам распределения функций случайного аргумента найти распределения $\dot{\mathbf{q}}''$.

В общем случае вследствие нелинейности задачи точное решение уравнений для конечномерных распределений $\mathbf{Z}_1 = \boldsymbol{\pi}$, $\mathbf{Z}_2 = \mathbf{q}'$, $\mathbf{Z}_3 = \mathbf{p}'$, $\mathbf{Z}_4 = \mathbf{q}''$ для нормально распределенного белого шума $\mathbf{V}_0$ невозможно. Простейшим приближенным методом нахождения конечномерных распределений вектора состояния $\mathbf{Z}$ является метод нормальной аппроксимации МНА [1]. Ясно, что чем ближе система к линейной, тем точнее будут расчеты по МНА. Однако, как показывает опыт практического применения МНА в задачах прикладной механики, он может давать хорошие результаты и для существенно нелинейных систем.

Как видно из структуры функций (1.15), по переменным отсутствует «возвращающая» сила и возможен дрейф в условиях случайных колебаний переменных $\mathbf{q}'$, $\mathbf{q}''$ (или $\mathbf{q}'$, $\mathbf{p}'$). Это качественно новый эффект, присущий стохастическим неголономным системам.

Найдем математическое ожидание и ковариационную функцию переменной $\mathbf{q}''$, считая известным одномерное $f_1(\mathbf{x}; t)$ и двумерное $f_2(\mathbf{x}', \mathbf{x}''; t_1, t_2)$ распределение для вектора $\mathbf{X} = [\mathbf{Z}_1{}^T\mathbf{Z}_2{}^T\mathbf{Z}_3{}^T]^T$.

Из третьего уравнения (1.15) после интегрирования следует

$$\mathbf{q}'' = \int_{t_0}^{t} \mathbf{\Lambda}(\mathbf{x}, \tau)\, d\tau \tag{6.6}$$

Отсюда для математического ожидания и ковариационной функции находим

$$\mathbf{m}_{q''}(t) = \int_{t_0}^{t} \mathbf{m}_\Lambda(\tau)\, d\tau, \quad \mathbf{m}_\Lambda(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{\Lambda}(\mathbf{x}, t) f_1(\mathbf{x}; t)\, d\mathbf{x} \tag{6.7}$$

$$\mathbf{K}_{q''}(t_1, t_2) = \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_2} \mathbf{K}_\Lambda(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_1\, d\tau_2, \quad \mathbf{K}_\Lambda(\tau_1, \tau_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{\Lambda}^\circ(\mathbf{x}', \tau_1)\mathbf{\Lambda}^\circ(\mathbf{x}'', \tau_2)^T \times$$
$$\times f_2(\mathbf{x}', \mathbf{x}''; \tau_1, \tau_2)\, d\mathbf{x}'\, d\mathbf{x}'', \quad \mathbf{\Lambda}^\circ = \mathbf{\Lambda} - \mathbf{m}_\Lambda$$

Первые две формулы (6.7) определяют систематический дрейф, остальные — флуктуационный дрейф [12].

Непосредственное вычисление статистических характеристик дрейфа затруднительно из-за нелинейной специфики неголономных задач. Существенные вычислительные преимущества открываются, если, не теряя нелинейной специфики задачи, произвести статистическую линеаризацию нелинейной функции $\mathbf{\Lambda}$ для нормального распределения

$$\mathbf{\Lambda}(\mathbf{x}, t) \approx \mathbf{\Lambda}_0(\mathbf{m}_x, \mathbf{K}_x, t) + (\partial \mathbf{\Lambda}_0(\mathbf{m}_x, \mathbf{K}_x, t)/\partial \mathbf{m}_x)\, \mathbf{x}^\circ$$
$$\mathbf{\Lambda}_0 = M_N \mathbf{\Lambda}, \quad \mathbf{x}^\circ = \mathbf{x} - \mathbf{m}_x$$

В результате формулы (6.7) примут вид

$$\mathbf{m}_{q''}(t) \approx \int_{t_0}^{t} \mathbf{\Lambda}_0\, d\tau, \quad \mathbf{K}_{q''}(t_1, t_2) \approx \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_2} \frac{\partial \mathbf{\Lambda}_0}{\partial \mathbf{m}_x} \mathbf{K}_x(\tau_1, \tau_2) \left(\frac{\partial \mathbf{\Lambda}_0}{\partial \mathbf{m}_x}\right)^T d\tau_1\, d\tau_2$$

В стационарном режиме колебаний по $\mathbf{x}$, полагая $t_1 = t_2 = t$, $t_0 = 0$, $\mathbf{K}_x(t_1, t_2) = \mathbf{k}_x(t_1 - t_2)$, будем иметь

$$\mathbf{m}_{q''}(t) \approx \mathbf{\Lambda}_0 t$$

$$\mathbf{K}_{q''}(t) \approx \frac{\partial \mathbf{\Lambda}_0}{\partial \mathbf{m}_x}\left(\int_0^t \mathbf{\Lambda}_1(\tau)\, d\tau\right)\left(\frac{\partial \mathbf{\Lambda}_0}{\partial \mathbf{m}_x}\right)^T, \quad \mathbf{\Lambda}_1(\tau) = \int_0^\tau \mathbf{k}_x(\xi)\, d\xi$$

Вопрос о допустимости использования МНА решается следующим образом: если спектральные плотности $\mathbf{s}_x(\omega)$ и $\mathbf{s}_{q''}(\omega)$ близки по виду при частоте $\omega \sim 0$, то МНА пригоден и при определении $\mathbf{K}_{q''}$. Если же $\mathbf{s}_x(\omega) \sim 0$, $\omega \sim 0$, то $\mathbf{s}_{q''}(0) \neq 0$, и в таком случае вывод об отсутствии флуктуационного дрейфа будет несправедлив. Для эргодических широкополосных случайных процессов флуктуационный дрейф всегда имеет место, поскольку интеграл $\Lambda_1(\infty)$ существует и отличен от нуля. Напротив, для узкополосного процесса $\Lambda_1(\infty)$ не существует, а значит, флуктуационный дрейф будет отсутствовать [12].

Замечание. Уравнения для математического ожидания вектора состояния $\mathbf{m}$, ковариационной матрицы $\mathbf{K}$ и ковариационной функции $\mathbf{K}(t_1, t_2)$ нелинейной системы (1.15) можно получить, понимая в исходных уравнениях задачи случайные процессы в смысле Стратоновича, а затем лишь на последнем этапе для составления уравнений для $\mathbf{m}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}(t_1, t_2)$ воспользоваться формулой Ито [1].

В основу разд. 6 положен доклад авторов «Корреляционная теория колебаний неголономных систем Чаплыгина» на Всесоюзной Каменковской конференции по устойчивости, колебаниям механических систем и аэродинамике. Москва, 2—4 февр. 1988. Деп. в ВИНИТИ № 8886-В-88, 22.12.1988.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пугачев В. С., Синицын И. Н.* Стохастические дифференциальные системы. М.: Наука, 1985. 560 с.
2. *Воронец П. В.* Об уравнениях движения неголономных систем // Мат. сб. 1901. Т. 22. Вып. 4. С. 659—686.
3. *Гиббс Дж.* Термодинамика. Статистическая механика // М. Наука, 1982. 584 с.
4. *Fuller A. T.* Analysis of non-linear stochastical systems by means of the Fokker-Planker equation // Int. J. Control. 1969. V. 9. № 6. P. 603—655.
5. *Dimentberg M. F.* Statistical Dynamics of Non-linear and Time-Varying Systems // Res. Stud. Press, N.-Y.: Wiley, 1988. P.
6. *Пугачев В. С.* Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1979. 496 с.
7. *Карапетян А. В.* О перманентных вращениях тяжелого твердого тела на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 5. С. 808—814.
8. *Козлов В. В.* К теории интегрирования уравнений неголономной механики // Успехи механики. 1985. Т. 8. Вып. 3. С. 85—107.
9. *Чаплыгин С. А.* Исследования по динамике неголономных систем. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 112 с.
10. *Мощук Н. К.* Качественный анализ движения тяжелого тела вращения на абсолютно шероховатой плоскости // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 2. С. 203—210.
11. *Синицын И. Н., Шин В. И.* Теоретико-групповые методы декомпозиции в задачах управления стохастическими механическими системами // Тез. докл. 5-й Всесоюз. конф. по управлению в механических системах. Казань: Изд-ие Казан. авиац. ин-та, 1985. С. 80.
12. *Синицын И. Н.* О флуктуациях гироскопа в кардановом подвесе // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 3. С. 23—31.

Москва

Поступила в редакцию
7.II.1989