Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 2, 1990

УДК 531.36 : 534.1

А. П. Маркеев

РЕЗОНАНСЫ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ТРАЕКТОРИИ В СИСТЕМАХ ГАМИЛЬТОНА

Исследуется задача о существовании движений, асимптотических к положению равновесия гамильтоновой системы с произвольным конечным числом степеней свободы. Предполагается, что функция Гамильтона аналитична в окрестности положения равновесия, периодична или не зависит от времени; характеристические показатели линеаризованных уравнений движения чисто мнимые и имеет место однократный резонанс третьего или четвертого порядка. Найдены достаточные условия существования асимптотических движений и их приближенное аналитическое представление в достаточно малой окрестности положения равновесия.

Пусть движение системы с n степенями свободы описывается каноническими дифференциальными уравнениями

$$\frac{dq_j}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_j},\quad \frac{dp_j}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_j}\quad (j=1,2,\ldots,n) \tag{1}$$

и существует положение равновесия $q_j=p_j=0$. Решение $q_j=f_j(t)$, $p_j=g_j(t)$ уравнений (1), не равное тождественно нулю, называется асимптотическим к решению $q_j=p_j=0$, если $\lim f_j(t)=\lim g_j(t)=0$ при $t\to+\infty$ либо при $t\to-\infty$. Будем говорить, что в первом случае асимптотическое решение принадлежит типу a_+, а во втором — типу a_-.

Известен [1, 2] классический алгоритм получения достаточных условий существования решений a_+ и a_- и их построения в виде рядов. Одно из основных условий применимости этого алгоритма — наличие у линеаризованной системы уравнений (1) хотя бы одного ненулевого характеристичного числа. В гамильтоновых системах характеристичные числа существуют парами $\pm\varkappa_j$ $(j=1,2,\ldots,n)$, поэтому теория Ляпунова и Пуанкаре применима к (1) лишь тогда, когда положение равновесия неустойчиво, причем это устанавливается по первому (линейному) приближению. Далее будем предполагать, что имеет место устойчивость в первом приближении. Гамильтониан H считаем 2π-периодической или не зависящей от t функцией в достаточно малой окрестности точки $q_j=p_j=0$.

Асимптотические траектории консервативных систем исследованы [3—5] в связи с проблемой обращения теоремы Лагранжа об устойчивости положений равновесия. Некоторые результаты этих исследований распространены [6] на ненатуральные системы. Изучены асимптотические движения гамильтоновых систем с одной степенью свободы и 2π-периодическим по t гамильтонианом в случае нулевых характеристичных чисел [7, 8] и движения, асимптотические к устойчивым в линейном приближении положениям равновесия автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы [9]. Исследована задача о траекториях автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы, асимптотических к ее периодическим траекториям [10].

В данной работе рассматривается задача о существовании и некоторые вопросы аналитической структуры решений, асимптотических к положению равновесия $q_j = p_j = 0$ системы (I) для произвольного числа степеней свободы n. Предполагается, что характеристические показатели $\pm i\lambda_j$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) линеаризованной системы чисто мнимые и нет резонансов до второго порядка включительно, т. е. равенство

$$k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + \ldots + k_n\lambda_n = N. \qquad (2)$$

где N — целое число (если H не зависит от времени, то $N = 0$), невозможно при целых k_j, сумма модулей которых равна 1 или 2.

При подходящем выборе переменных q_j, p_j функцию Гамильтона в окрестности точки $q_j = p_j = 0$ можно представить рядом

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(q_j^2 + p_j^2) \qquad (3)$$

где многоточием обозначена совокупность одночленов выше второй степени относительно q_j, p_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) с 2π-периодическими по t коэффициентами.

Будем рассматривать однократные резонансы третьего или четвертого порядков, когда равенство (2) выполняется только для одного набора целых неотрицательных чисел k_j, сумма которых равна 3 или 4.

При резонансах третьего или четвертого порядков гамильтониан (3) при помощи близкой к тождественной, вещественной, 2π-периодической по t, аналитической по ξ_j, η_j замены переменных $q_j, p_j \to \xi_j, \eta_j$ можно [11] привести к виду

$$H = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j\rho_j + \sum_{i,j=1 (i\leqslant j)}^{n} c_{ij}\rho_i\rho_j + \rho_1^{k_1/2}\rho_2^{k_2/2}\ldots\rho_n^{k_n/2}(\sigma\sin\theta + \delta\cos\theta) + \ldots$$
$$(\theta = k_1\theta_1 + k_2\theta_2 + \ldots + k_n\theta_n - Nt)$$

где c_{ij}, σ, δ — постоянные, а многоточием обозначена совокупность членов выше четвертой степени относительно $\xi_j = \sqrt{2\rho_j}\sin\theta_j$, $\eta_j = \sqrt{2\rho_j}\cos\theta_j$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) с 2π-периодическими по t с коэффициентами.

Сделаем каноническую замену переменных $\theta_j, \rho_j \to \varphi_j, r_j$:

$$\theta_j = \varphi_j + \lambda_j t + \theta_j^*, \quad \rho_j = \alpha r_j$$
$$(k_1\theta_1^* + k_2\theta_2^* + \ldots + k_n\theta_n^* = \theta^*, \quad \sin\theta^* = -\delta(\sigma^2 + \delta^2)^{-1/2},$$
$$\cos\theta^* = \sigma(\sigma^2 + \delta^2)^{-1/2})$$

Здесь $\alpha = (\sigma^2 + \delta^2)^{-1}$ при резонансе третьего порядка и $\alpha = (\sigma^2 + \delta^2)^{-1/2}$ при резонансе четвертого порядка.

В новых переменных уравнения (1) запишутся в виде

$$\frac{d\varphi_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial r_j}, \quad \frac{dr_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad (4)$$

$$H = \sum_{i,j=1 (i\leqslant j)}^{n} a_{ij}r_ir_j + r_1^{k_1/2}r_2^{k_2/2}\ldots r_n^{k_n/2}\sin\varphi + H^* \qquad (5)$$
$$a_{ij} = \alpha c_{ij}, \quad \varphi = k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + \ldots + k_n\varphi_n$$

H^* — совокупность членов выше четвертой степени относительно $\sqrt{r_j}$ ($j = 1, 2, \ldots, n$).

Изменяя в случае необходимости нумерацию величин λ_j, можно считать, что резонансу третьего порядка отвечают следующие из соотношений (2):

$$1)\ 3\lambda_1 = N, \quad 2)\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = N, \quad 3)\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = N \qquad (6)$$

а резонансу четвертого порядка — соотношения:

$$4)\ 4\lambda_1 = N,\quad 5)\ \lambda_1 + 3\lambda_2 = N,\quad 6)\ 2(\lambda_1 + \lambda_2) = N$$

$$7)\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = N,\quad 8)\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = N \tag{7}$$

Рассмотрим сначала приближенную систему (4), отбросив в гамильтониане (5) члены выше третьей степени относительно $\sqrt{r_j}$ при резонансах (6) и выше четвертой степени при резонансах (7). Непосредственным интегрированием получим следующие результаты об асимптотических решениях приближенной системы.

1) $3\lambda_1 = N$. Существует три однопараметрических семейства решений типа a_+, в которых $\varphi_1 = i2\pi/3$ $(i = 0, 1, 2)$, а $r_1(t) = 4r_1(0)(2 + 3\sqrt{r_1(0)}\,t)^{-2}$; $\varphi_j = 0$, $r_j = 0$ $(j \geqslant 2)$, и три однопараметрических семейства решений типа a_-, в которых $\varphi_1 = (2l+1)\pi/3$ $(l = 0, 1, 2)$; $r_1(t) = 4r_1(0)(2 - 3\sqrt{r_1(0)}\,t)^{-2}$; $\varphi_j = 0$, $r_j = 0$ $(j \geqslant 2)$.

2) $\lambda_1 + 2\lambda_2 = N$. Существуют двухпараметрические семейства асимптотических решений, описываемых формулами:

$$\varphi_i(t) = \varphi_i(0) \quad (i = 1, 2); \quad r_1(t) = {}^1/_2 r_2(t) = r_1(0)(1 \pm \sqrt{r_1(0)}\,t)^{-2}$$

$$\varphi_j = 0, \quad r_j = 0 \quad (j \geqslant 3); \quad \varphi_1(0) = -2\varphi_2(0) + {}^1/_2(-1 \pm 1)\pi + 2k\pi$$

(k — целое число).

Здесь и далее верхний знак соответствует решениям типа a_+, а нижний — решениям типа a_-.

3) $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = N$. Существуют трехпараметрические семейства асимптотических решений a_+ и a_-:

$$\varphi_i(t) = \varphi_i(0) \quad (i = 1, 2, 3); \quad r_1(t) = r_2(t) = r_3(t) = 4r_1(0)(2 \pm \sqrt{r_1(0)}\,t)^{-2}$$

$$\varphi_j = 0; \quad r_j = 0 \quad (j \geqslant 4); \quad \varphi_1(0) = -\varphi_2(0) - \varphi_3(0) + {}^1/_2(-1 \pm 1)\pi + 2k\pi$$

(k — целое число).

4) $4\lambda_1 = N$. Если $|a_{11}| < 1$, то существует четыре однопараметрических семейства решений типа a_+, в которых $\varphi_1 = -\gamma/4 + i\pi/2$ $(i = 0, 1, 2, 3)$, $\gamma = \arcsin a_{11}$; $r_1(t) = r_1(0)(1 + 4\cos\gamma r_1(0)\,t)^{-1}$, $\varphi_j = (4\cos\gamma)^{-1} a_{1j} \ln(1 + 4\cos\gamma r_1(0)\,t)$, $r_j = 0$ $(j \geqslant 2)$, и четыре однопараметрических семейства решений типа a_-, в которых $\varphi_1 = \gamma/4 + \pi/4 + l\pi/2$ $(l = 0, 1, 2, 3)$, а $r_1(t) = r_1(0)(1 - 4\cos\gamma r_1(0)\,t)^{-1}$, $\varphi_j = -(4\cos\gamma)^{-1} a_{1j} \ln(1 - 4\cos\gamma r_1(0)\,t)^{-1}$, $r_j = 0$ $(j \geqslant 2)$.

5) $\lambda_1 + 3\lambda_2 = N$. При выполнении неравенства $|a_{11} + 3a_{12} + 9a_{22}| < 3\sqrt{3}$ существуют двухпараметрические семейства асимптотических решений a_+ и a_-:

$$\varphi_i(t) = \pm(2\cos\gamma)^{-1}(\beta_i - \sin\gamma)\ln(1 \pm 3\sqrt{3}\cos\gamma\, r_1(0)\,t) + \varphi_i(0) \quad (i = 1, 2).$$

$$\gamma = \arcsin[(a_{11} + 3a_{12} + 9a_{22}) \mid (3\sqrt{3})], \quad \beta_1 = (2\sqrt{3} \mid 9)(2a_{11} + 3a_{12})$$

$$\beta_2 = (2\sqrt{3} \mid 9)(a_{12} + 6a_{22}); \quad r_1(t) = {}^1/_3 r_2(t) = r_1(0)(1 \pm 3\sqrt{3}\cos\gamma r_1(0)\,t)^{-1}$$

$$\varphi_j(t) = \pm(3\sqrt{3}\cos\gamma)^{-1}(a_{1j} + 3a_{2j})\ln(1 \pm 3\sqrt{3}\cos\gamma r_1(0)\,t), \quad r_j = 0 \quad (j \geqslant 3)$$

$$\varphi_1(0) = -3\varphi_2(0) \mp \gamma + {}^1/_2(-1 \pm 1)\pi + 2k\pi \ (k \text{ — целое число}).$$

6) $2(\lambda_1 + \lambda_2) = N$. Если $|a_{11} + a_{12} + a_{22}| < 1$, то существуют двух-

параметрические семейства асимптотических решений a_+ и a_-:

$$\varphi_i(t) = \pm (2\cos\gamma)^{-1} (\beta_i - \sin\gamma) \ln (1 \pm 2\cos\gamma r_1(0)t) + \varphi_i(0) \quad (i = 1, 2)$$
$$\gamma = \arcsin (a_{11} + a_{12} + a_{22}), \quad \beta_1 = 2a_{11} + a_{12}, \quad \beta_2 = a_{12} + 2a_{22}$$
$$r_1(t) = r_2(t) = r_1(0)(1 \pm 2\cos\gamma r_1(0)t)^{-1}$$
$$\varphi_j(t) = \pm (2\cos\gamma)^{-1} (a_{1j} + a_{2j}) \ln (1 \pm 2\cos\gamma r_1(0)t), \quad r_j = 0 \quad (j \geqslant 3)$$
$$\varphi_1(0) = -\varphi_2(0) \mp {}^1/_2\gamma + {}^1/_4(-1 \pm 1)\pi + k\pi \quad (k \text{ — целое число}).$$

7) $\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = N$. При выполнении неравенства $|a_{11} + a_{12} + 2a_{13} + a_{22} + 2a_{23} + 4a_{33}| < 2$ существуют трехпараметрические семейства асимптотических решений a_+ и a_-:

$$\varphi_i(t) = \pm (2\cos\gamma)^{-1} (\beta_i - \sin\gamma) \ln (1 \pm 2\cos\gamma r_1(0)t) + \varphi_i(0) \quad (i = 1, 2, 3)$$
$$\gamma = \arcsin [{}^1/_2 (a_{11} + a_{12} + 2a_{13} + a_{22} + 2a_{23} + 4a_{33})], \quad \beta_1 = 2a_{11} + a_{12} + 2a_{13}$$
$$\beta_2 = a_{12} + 2a_{22} + 2a_{23}, \quad \beta_3 = a_{13} + a_{23} + 4a_{33}$$
$$r_1(t) = r_2(t) = {}^1/_2 r_3(t) = r_1(0)(1 \pm 2\cos\gamma r_1(0)t)^{-1}$$
$$\varphi_j(t) = \pm (2\cos\gamma)^{-1} (a_{1j} + a_{2j} + 2a_{3j}) \ln (1 \pm 2\cos\gamma r_1(0)t), \quad r_j = 0 \quad (j \geqslant 4)$$
$$\varphi_1(0) = -\varphi_2(0) - 2\varphi_3(0) \pm \gamma + {}^1/_2(-1 \pm 1)\pi + 2k\pi \quad (k \text{ — целое число}).$$

8) $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = N$. Если $|a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{22} + a_{23} + a_{24} + a_{33} + a_{34} + a_{44}| < 1$, то существуют четырехпараметрические семейства асимптотических решений a_+ и a_-:

$$\varphi_i(t) = \pm (2\cos\gamma)^{-1} (2\beta_i - \sin\gamma) \ln (1 \pm \cos\gamma r_1(0)t) + \varphi_i(0) \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$
$$\gamma = \arcsin (a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{22} + a_{23} + a_{24} + a_{33} + a_{34} + a_{44})$$
$$\beta_1 = 2a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14}, \quad \beta_2 = a_{12} + 2a_{22} + a_{23} + a_{24}$$
$$\beta_3 = a_{13} + a_{23} + 2a_{33} + a_{34}, \quad \beta_4 = a_{14} + a_{24} + a_{34} + 2a_{44}$$
$$r_1(t) = r_2(t) = r_3(t) = r_4(t) = r_1(0)(1 \pm \cos\gamma r_1(0)t)^{-1}$$
$$\varphi_j(t) = \pm (\cos\gamma)^{-1} (a_{1j} + a_{2j} + a_{3j} + a_{4j}) \ln (1 \pm \cos\gamma r_1(0)t), \quad r_j = 0 \quad (j \geqslant 5)$$
$$\varphi_1(0) = -\varphi_2(0) - \varphi_3(0) - \varphi_4(0) \mp \gamma + {}^1/_2(-1 \pm 1)\pi + 2k\pi \quad (k \text{ — целое число})$$

Выписанные формулы дают приближенное представление асимптотических решений полной (а не приближенной) системы уравнений (4) в достаточно малой окрестности начала координат. Опираясь на структуру приближенных решений и на известные результаты о представлении решений дифференциальных уравнений в окрестности особой точки [12], можно показать существование асимптотических решений полной системы и получить их аналитическое представление при больших $|t|$.

Для примера рассмотрим резонансы 3) и 7), ограничиваясь решениями типа a_+. Другие асимптотические решения при резонансах (6), (7) рассматриваются аналогично.

При резонансе 3) сделаем в системе (4) замену переменных $r_k, \varphi_k, t \to x_k, y_k, \tau$ по формулам:

$$r_i = \tau^2(4 + x_i), \quad \varphi_i = c_i + y_i \quad (i = 1, 2, 3)$$
$$r_j = \tau^2 x_j, \quad \varphi_j = y_j \quad (j \geqslant 4), \quad \tau = t^{-1} \tag{8}$$

$(c_i$ — const, $c_1 = -c_2 - c_3 + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

В новых переменных система (4) станет такой:

$$\tau dx_i/d\tau = -2x_i + x_1 + x_2 + x_3 + X_i$$

$$
\begin{gathered}
\tau dx_j/d\tau = -2x_j + X_j \\
\tau dy_i/d\tau = -y_1 - y_2 - y_3 - 4\sigma_i\tau + Y_i \\
\tau dy_j/d\tau = -4\sigma_j\tau + Y_j \ \ (i = 1, 2, 3;\ j \geqslant 4) \\
\sigma_1 = 2a_{11} + a_{12} + a_{13}, \quad \sigma_2 = a_{12} + 2a_{22} + a_{23} \\
\sigma_3 = a_{13} + a_{23} + 2a_{33}, \quad \sigma_j = a_{1j} + a_{2j} + a_{3j}
\end{gathered} \tag{9}
$$

где функции $X_k = X_k(\tau, x, y)$, $Y_k = Y_k(\tau, x, y)$ представимы рядами вида

$$\sum_{m+m_1+\ldots+m_{2n}\geqslant 2} f_k^{(m, m_1, \ldots, m_{2n})}(\tau)\,\tau^m x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n} y_1^{m_{n+1}}\ldots y_n^{m_{2n}}$$

которые сходятся в достаточно малой окрестности точки $x_k = y_k = 0$, если $|\tau| < \tau_1$, где τ_1 — постоянная; функции $f_k^{(m, m_1, \ldots, m_{2n})}(\tau)$ вещественны, непрерывны и ограничены.

Отбросив в правых частях системы (9) функции X_k, Y_k и введя новую независимую переменную $\eta = -\ln\tau$, получим вспомогательную систему линейных дифференциальных уравнений, имеющую два положительных характеристичных числа, равных единице. В соответствии с известным алгоритмом [12] можно утверждать, что система (9) имеет однопараметрическое семейство решений, представимых рядами вида

$$\sum_{m+m_1\geqslant 1} k^{(m, m_1)}(\tau)\tau^{m+m_1}c^{m_1} \tag{10}$$

которые сходятся при $|\tau| < \tau_0$, $|c| < c_0$; τ_0 — достаточно малая величина, c — постоянный параметр; функции $k^{(m, m_1)}(\tau)$ обладают свойством $\lim k^{(m, m_1)}(\tau)\tau^\beta = 0$ при $\tau \to 0$ ($\beta = \mathrm{const} > 0$).

В переменных r_k, φ_k этим решениям отвечает трехпараметрическое семейство асимптотических решений типа a_+ (параметрами служат величины c_2, c_3, c). При достаточно больших t

$$r_i = \frac{4}{t^2} + \frac{\psi_i}{t^3}, \quad r_j = \frac{\chi_j}{t^3}, \quad y_k = \frac{g_k}{t} \quad (i = 1, 2, 3;\ j \geqslant 4;\ k = 1, 2, \ldots)$$

где ψ_i, χ_j, g_k — равномерно ограниченные при достаточно больших t функции t, c_2, c_3, c.

В случае резонанса 7) в системе (4) надо сделать замену переменных r_k, φ_k, $t \to x_k$, y_k, τ по формулам

$$r_i = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{2\cos\gamma} + x_i\right), \quad r_3 = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{\cos\gamma} + x_3\right), \quad r_j = \frac{1}{t}x_j$$

$$\varphi_l = \frac{\beta_l - \sin\gamma}{2\cos\gamma}\ln t + c_l + y_l, \quad \varphi_j = \frac{a_{1j} + a_{2j} + 2a_{3j}}{2\cos\gamma}\ln t + y_j$$

$\tau = t^{-1/4}$ $(i = 1, 2;\ l = 1, 2, 3;\ j \geqslant 4)$

$$(c_l - \mathrm{const},\ c_1 = -c_2 - 2c_3 - \gamma + 2k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Записав систему (4) в новых переменных и получив затем из нее (аналогично случаю резонанса 3)) вспомогательную систему линейных дифференциальных уравнений, найдем, что последняя имеет два положительных характеристичных числа: 1 и 4. Следовательно [12], существует однопараметрическое семейство решений $x_k(\tau)$, $y_k(\tau)$, представимое сходящимися рядами, аналогичными рядам (10) (τ^{m+m_1} заменяется на τ^{m+4m_1}). В переменных r_k, φ_k этим решениям соответствует трехпараметрическое семейство асимптотических решений типа a_+ (параметрами служат величины c_2, c_3, c).

Отметим, что при резонансе 7) (как и при других резонансах (7) четвертого порядка) порядок убывания величин x_k, y_k при больших t будет не меньше, чем $t^{-1/4}$ (в отличие от резонансов третьего порядка (6), когда x_k, y_k при больших t имеют порядок, не меньший t^{-1}).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения // Собр. соч. М.— Л.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. С. 7—263.
2. *Пуанкаре А.* Избр. тр. Т. 1. Новые методы небесной механики. М.: Наука, 1971. 771 с.
3. *Козлов В. В.* Асимптотические решения уравнений классической механики // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 573—577.
4. *Козлов В. В., Паламодов В. П.* Об асимптотических решениях уравнений классической механики // Докл. АН СССР. 1982. Т. 263. № 2. С. 285—289.
5. *Козлов В. В.* Асимптотические движения и проблема обращения теоремы Лагранжа — Дирихле // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 6. С. 928—937.
6. *Фурта С. Д.* Об асимптотических решениях уравнений движения механических систем // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 6. С. 938—944.
7. *Мерман Г. А.* Асимптотические решения канонической системы с одной степенью свободы в случае нулевых характеристических показателей // Бюл. Ин-та теорет. астрон. 1964. Т. 9. № 6. С. 394—424.
8. *Маркеев А. П., Щербина Г. А.* О движениях спутника, асимптотических к его эксцентриситетным колебаниям // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 4. С. 3—10.
9. *Маркеев А. П., Щербина Г. А.* О движениях, асимптотических к треугольным точкам либрации круговой ограниченной задачи трех тел // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 3. С. 355—362.
10. *Маркеев А. П.* Асимптотические траектории и устойчивость периодических движений автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 3. С. 363—371.
11. *Маркеев А. П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.

Зубов В. И. Устойчивость движения. М.: Высш. шк., 1973. 271 с.

Москва

Поступила в редакцию 12.IV.1989