

УДК (531.36 + 532.5) : 534.1

© 1990 г.

М. Л. Пивоваров, Ф. Л. Черноусько

КОЛЕБАНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ТОРОИДАЛЬНОЙ ПОЛОСТЬЮ, ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Исследуется демпфирование плоских колебаний твердого тела с тороидальной полостью, заполненной жидкостью произвольной вязкости. Предполагается, что диаметр тора существенно больше диаметра трубки, образующей его. Получено интегродифференциальное уравнение, описывающее колебания твердого тела. В предположении, что момент инерции жидкости много меньше момента инерции твердого тела, получено аналитическое выражение для амплитуды колебаний твердого тела и найдены оптимальные параметры демпфера. В случае, когда вязкость жидкости велика, найденное решение сравнивается с известным асимптотическим решением, описывающим колебания твердого тела с полостью произвольной формы, заполненной вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса.

Задачи о движении тела с вязкой жидкостью, заключенной в тонких трубках, рассматривались в работах Громеки и Жуковского. В последние годы эти задачи стали актуальны в связи с использованием демпферов в виде трубок, заполненных вязкой жидкостью, для гашения колебаний космических аппаратов [1—9]. При этом наиболее употребительной формой полости является тороидальная.

1. Постановка задачи. Рассмотрим плоские колебания твердого тела, содержащего тороидальную полость, целиком заполненную вязкой несжимаемой жидкостью плотности ρ_* , вокруг оси, параллельной оси тора. Предположим для простоты, что центр тора совпадает с центром масс системы или с неподвижной точкой, если она есть. Будем предполагать, что $\varepsilon = a/R \ll 1$, где R — радиус тора, a — радиус трубки, образующей тор.

Введем цилиндрическую систему координат с началом в центре тора, осью z , направленной по оси тора, и координатными линиями r и φ в плоскости, перпендикулярной оси z . В случае малого ε компоненты вектора абсолютной скорости жидкости V удовлетворяют условиям: $V_r \ll V_\varphi$, $V_z \ll V_\varphi$. Поэтому отбросим члены, содержащие V_r , V_z в уравнении Навье — Стокса для V_φ . Тогда уравнения движения тела с жидкостью примут вид

$$A \frac{d^2\Phi}{dt^2} + M \sin \Phi = N(V_\varphi)$$

$$\frac{\partial V_\varphi}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial z^2} - \frac{V_\varphi}{r^2} \right), \quad V_\varphi|_S = \frac{d\Phi}{dt} r|_S \quad (1.1)$$

где A — главный центральный момент инерции твердого тела относительно оси z , Φ — угол поворота тела вокруг оси z , $M \sin \Phi$ — восстанавливающий момент, N — момент сил, действующих на тело со стороны жидкости, ν — кинематическая вязкость жидкости, S — поверхность тора.

Далее система (1.1) будет сведена к интегродифференциальному уравнению, описывающему колебания твердого тела.

2. Интегродифференциальное уравнение. Сделаем замену $r = x + R$ в последних двух соотношениях (1.1) и приведем систему (1.1) к безраз-

мерному виду при помощи замены

$$\tau = \omega t, \quad u = V_\varphi / (\omega R), \quad \xi = x/a, \quad \zeta = z/a, \quad \omega^2 = M/A$$

где ω — частота малых колебаний твердого тела. Получим

$$\Phi'' + \sin \Phi = N / (A\omega^2) \quad (2.1)$$

$$u'' = \frac{\nu}{\omega a^2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \xi} \right) \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - \left(\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \xi} \right)^2 u \right] \quad (2.2)$$

$$u|_{\xi^2 + \zeta^2 = 1} = \Phi' (1 + \varepsilon \xi)$$

где, как и выше, $\varepsilon = a/R$, точкой обозначена производная по τ .

Если искать решение краевой задачи (2.2) в виде ряда по параметру ε , то для главного члена получим

$$u'' = \nu (\omega a^2)^{-1} (\partial^2 u / \partial \xi^2 + \partial^2 u / \partial \zeta^2), \quad u|_{\xi^2 + \zeta^2 = 1} = \Phi' \quad (2.3)$$

Будем искать решение задачи (2.3) при начальном условии $u|_{t=0} = 0$. Введем в плоскости ξ, ζ полярные координаты ρ, ϑ соотношениями $\xi = \rho \cos \vartheta, \zeta = \rho \sin \vartheta$. В силу симметрии задачи (2.3) при нулевых начальных условиях u зависит лишь от ρ и τ , и уравнения (2.3) примут вид

$$u'' = \nu_0 (\partial^2 u / \partial \rho^2 + \rho^{-1} \partial u / \partial \rho), \quad u|_{\rho=1} = u_S; \quad \nu_0 = \nu / (\omega a^2), \quad u_S = \Phi' \quad (2.4)$$

Следуя подходу Жуковского, найдем решение задачи (2.4) при $u_S = 1$, а затем воспользуемся интегралом Дюамеля [10, 11].

Применим к (2.4) преобразование Лапласа. Решение уравнения (2.4) в изображениях, ограниченное при $\rho = 0$ и удовлетворяющее граничному условию, имеет вид

$$u_*(\rho, p) = I_0(\rho \sqrt{p/\nu_0}) / I_0(\sqrt{p/\nu_0})$$

где I_0 — функция Бесселя мнимого аргумента нулевого порядка, p — параметр преобразования.

По формуле обращения имеем

$$u(\rho, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{1}{p} \exp(p\tau) u_*(\rho, p) dp \quad (2.5)$$

Особыми точками подынтегральной функции будут полюс в нуле и счетное число полюсов в точках p_k , являющихся корнями уравнения $I_0(\sqrt{p_k/\nu_0}) = 0$. Обозначим: c_0 — вычет подынтегральной функции в точке $p = 0$ и c_k — вычет в точке p_k . Учитывая, что $I_0(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow 0$ и переходя к функциям Бесселя действительного аргумента нулевого и первого порядка, получим

$$c_0 = 1, \quad c_k = -2 \exp(-\lambda_k^2 \nu_0 \tau) J_0(\rho \lambda_k) / [\lambda_k J_1(\lambda_k)] \quad (2.6)$$

где λ_k — нули функции J_0 . Из (2.5), (2.6) находим решение краевой задачи (2.4) при $u_S = 1$. При $u_S = \Phi'$ при помощи интеграла Дюамеля получим

$$u(\rho, \tau) = \int_0^\tau \frac{d^2 \Phi(\eta)}{d\eta^2} \left\{ 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \exp[-\lambda_k^2 \nu_0 (\tau - \eta)] \frac{J_0(\rho \lambda_k)}{\lambda_k J_1(\lambda_k)} \right\} d\eta \quad (2.7)$$

В рассматриваемом приближении сила вязкости, действующая со стороны жидкости на единицу площади стенки тора, равна (ρ_* — плотность жидкости) — $\rho_* \nu [\partial V_\varphi / \partial (a\rho)]|_{\rho=1}$, а момент сил, действующих на твердое тело со стороны жидкости, равен $N = -4\pi^2 R^3 \omega \rho_* \nu (\partial u / \partial \rho)|_{\rho=1}$.

Учитывая, что $J_0' = -J_1$, из (2.7), (2.1) находим

$$\Phi'' + \sin \Phi = -\alpha \int_0^\tau \frac{d^2 \Phi(\eta)}{d\eta^2} \Sigma(\tau - \eta) d\eta \quad (2.8)$$

$$\Sigma(\tau - \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp[-\lambda_k^2 \nu_0 (\tau - \eta)], \quad \alpha = \frac{8\pi^2 R^3 \rho_* \nu}{A\omega}, \quad \nu_0 = \frac{\nu}{\omega a^2}$$

3. Случай малой массы жидкости. Оценим величину g правой части уравнения (2.8):

$$\begin{aligned} |g| &\leq \alpha K \int_0^\tau \Sigma(\tau - \eta) d\eta = \alpha K \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2 \nu_0} [1 - \exp(-\lambda_k^2 \nu_0 \tau)] \leq \\ &\leq \frac{\alpha K}{\nu_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} = \mu K; \quad K = \max |\Phi''|, \quad \mu = \frac{B}{A} \end{aligned}$$

Здесь учтено, что [12]

$$\lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + \dots = 1/4, \quad \alpha/(4\nu_0) = B/A, \quad B = 2\pi^2 R^3 a^2 \rho_* \quad (3.1)$$

где B — момент инерции жидкости относительно оси тора.

С другой стороны, из (2.8) находим $K \leq 1 + |g| \leq 1 + \mu K$, откуда $K \leq (1 - \mu)^{-1}$. Таким образом, $|g| \leq \mu (1 - \mu)^{-1}$.

Будем предполагать, что масса жидкости существенно меньше массы тела, тогда $\mu \ll 1$ и $g = O(\mu)$. Будем рассматривать малые колебания. Для анализа уравнения (2.8) воспользуемся методом осреднения.

В невозмущенной задаче ($\mu = 0$, $|\Phi| \ll 1$) имеем

$$\begin{aligned} \Phi &= a_* \sin \tau + b_* \cos \tau, \\ \Phi' &= a_* \cos \tau - b_* \sin \tau \end{aligned}$$

Выберем a_* , b_* в качестве новых переменных в задаче (2.8). После стандартных выкладок, опуская в правой части члены второго порядка малости по μ , получим

$$\frac{a_*'}{\alpha \cos \tau} = -\frac{b_*'}{\alpha \sin \tau} = \int_0^\tau [a_*(\eta) \sin \eta + b_*(\eta) \cos \eta] \Sigma(\tau - \eta) d\eta \quad (3.2)$$

Выполнив интегрирование в (3.2) и отбрасывая члены второго порядка малости по μ , получим

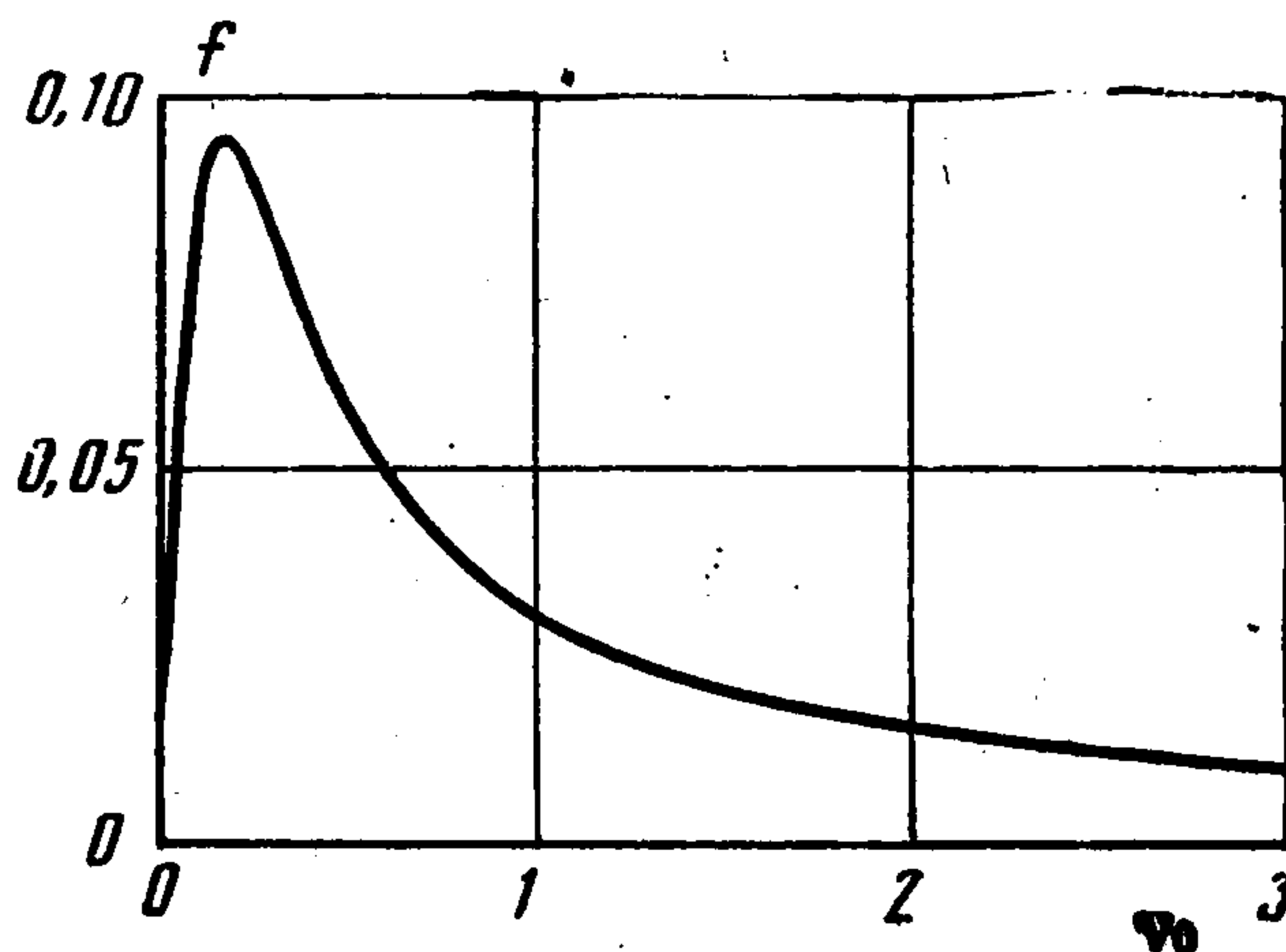
$$a_*' = \alpha \cos \tau \sum_{k=1}^{\infty} G_k(\tau), \quad b_*' = -\alpha \sin \tau \sum_{k=1}^{\infty} G_k(\tau) \quad (3.3)$$

$$G_k = \{b_*(\tau) \sin \tau - a_*(\tau) \cos \tau + \lambda_k^2 \nu_0 [a_*(\tau) \sin \tau + b_*(\tau) \cos \tau] + [a_*(0) - \lambda_k^2 \nu_0 b_*(0)] \exp(-\lambda_k^2 \nu_0 \tau)\} (1 + \lambda_k^4 \nu_0^2)^{-1}$$

Осредняя правые части равенств (3.3) по τ от 0 до ∞ , находим

$$a_*' = 1/2 \alpha (-a_* \Sigma_1 + b_* \Sigma_2), \quad b_*' = 1/2 \alpha (-a_* \Sigma_2 - b_* \Sigma_1) \quad (3.4)$$

$$\Sigma_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \lambda_k^4 \nu_0^2}, \quad \Sigma_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^2 \nu_0}{1 + \lambda_k^4 \nu_0^2}$$



Интегрируя уравнения (3.4) и учитывая равенство (2.8) для α , получим выражение для амплитуды колебаний

$$F = (a_*^2 + b_*^2)^{1/2} = F_0 \exp\left(-2 \frac{B}{A} f \omega t\right), \quad f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_0}{1 + \lambda_k^4 v_0^2}, \quad v_0 = \frac{v}{\omega a^2} \quad (3.5)$$

Демпфер будет оптимальным, если величина f максимальна. На фигуре представлена зависимость $f(v_0)$. Оптимальное значение безразмерной вязкости v_0 равно 0,158.

4. Случай сильно вязкой жидкости. Рассмотрим случай сильно вязкой жидкости ($v_0 \gg 1$). Из (3.5) находим

$$f = \frac{1}{32v_0} + O\left(\frac{1}{v_0^3}\right), \quad F = F_0 \exp\left(-\frac{\omega^2 a^2 B}{16vA} t\right) \quad (4.1)$$

(учтено, что [12] $\lambda_1^{-4} + \lambda_2^{-4} + \dots = 1/32$).

С другой стороны, как следует из [13], в случае сильно вязкой жидкости малые колебания рассматриваемой системы описываются уравнением

$$J \partial^2 \Phi / \partial t^2 + M \Phi = -\rho_* P (vJ)^{-1} M \partial \Phi / \partial t \quad (4.2)$$

где $J = A + B$ — момент инерции тела с жидкостью, P — компонента некоторого тензора, зависящего только от формы полости. Для тора эта компонента равна

$$P = -2\pi \int_D r^2 W(r, z) dr dz, \quad D: \{(r - R)^2 + z^2 \leq a^2\} \quad (4.3)$$

Здесь W — решение краевой задачи (Γ — граница круга D)

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = r, \quad W|_{\Gamma} = 0 \quad (4.4)$$

Далее получим приближенное выражение компоненты P для тора при $\varepsilon = a/R \ll 1$ и сравним решение уравнения (4.2) с (4.1).

Сделаем в (4.4) замену

$$r = x + R \quad (4.5)$$

и перейдем к безразмерному виду заменой

$$W = a^3 \Omega, \quad x = a\xi, \quad z = a\zeta \quad (4.6)$$

Получим

$$\Delta \Omega + \left(\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon\xi}\right) \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} - \left(\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon\xi}\right)^2 \Omega = \frac{1}{\varepsilon} + \xi \quad (4.7)$$

$$\Omega|_{\Gamma} = 0, \quad \Gamma: \{\xi^2 + \zeta^2 = 1\}$$

Будем искать решение краевой задачи (4.7) в виде ряда по малому параметру ε

$$\Omega(\xi, \zeta) = \varepsilon^{-1} \Omega_{-1}(\xi, \zeta) + \Omega_0(\xi, \zeta) + \varepsilon \Omega_1(\xi, \zeta) + \varepsilon^2 \Omega_2(\xi, \zeta) + \dots \quad (4.8)$$

$$\Omega_k|_{\Gamma} = 0, \quad k = -1, 0, 1, 2, \dots \quad (4.9)$$

Подставляя ряд (4.8) в уравнение (4.7), раскладывая коэффициенты этого уравнения в ряды по ε и приравнивая коэффициенты при одинаковых по ε степенях, получим

$$\Delta \Omega_{-1} = 1 \quad (4.10)$$

$$\Delta \Omega_0 = -\partial \Omega_{-1} / \partial \xi + \xi \quad (4.11)$$

$$\Delta \Omega_1 = \xi (\partial \Omega_{-1} / \partial \xi) - \partial \Omega_0 / \partial \xi + \Omega_{-1} \quad (4.12)$$

$$\Delta \Omega_2 = -\xi^2 (\partial \Omega_{-1} / \partial \xi) + \xi (\partial \Omega_0 / \partial \xi) - \partial \Omega_1 / \partial \xi - 2\xi \Omega_{-1} + \Omega_0 \quad (4.13)$$

с граничным условием (4.9).

Краевая задача (4.10), (4.9) описывает течение Пуазейля. Подставляя ее решение $\Omega_{-1} = (\rho^2 - 1)/4$, $\rho^2 = \xi^2 + \zeta^2$ в (4.11), получим

$$\Delta\Omega_0 = \xi/2 \quad (4.14)$$

Решение этой и следующих краевых задач с условиями (4.9) можно искать в виде линейной комбинации функций

$$(\rho^2 - 1)^n \xi^m, \quad n = 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Опуская выкладки, приведем окончательные результаты. Решение задачи (4.14), (4.9) имеет вид

$$\Omega_0 = (\rho^2 - 1) \xi/16 \quad (4.15)$$

Подставляя (4.15) в (4.12) и решая соответствующую краевую задачу, получим

$$\Omega_1 = -(\rho^2 - 1)/64 + (\rho^2 - 1)^2/128 + (\rho^2 - 1) \xi^2/32 \quad (4.16)$$

Наконец, подставляя (4.16) в (4.13), находим

$$\Omega_2 = \frac{17}{1024} (\rho^2 - 1) \xi - \frac{7}{256} (\rho^2 - 1) \xi^3 - \frac{13}{1024} (\rho^2 - 1)^2 \xi$$

Сделаем в интеграле (4.3) замены (4.5), (4.6) и перейдем к полярным координатам $\xi = \rho \cos \vartheta$, $\zeta = \rho \sin \vartheta$. Используя ряд (4.8), получим

$$P = -2\pi a^5 R^2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 + \varepsilon \rho \cos \vartheta)^2 \Omega \rho d\rho d\vartheta = \pi^2 a^5 R^2 \left[\frac{1}{4\varepsilon} + \frac{3\varepsilon}{64} + O(\varepsilon^3) \right] \quad (4.17)$$

Отметим, что для тора с произвольным отношением $\varepsilon = a/R$ было получено [2] представление компонент тензора, характеризующего влияние сильно вязкой жидкости на движение тела [13]. Это представление дано в виде бесконечного ряда несобственных интегралов от специальных функций с коэффициентами, являющимися корнями некоторых трансцендентных уравнений. Получен также [2] первый член асимптотики тензора при малом ε , который для компоненты P совпадает с первым слагаемым в (4.17).

Уравнение (4.2) описывает затухающие колебания с амплитудой

$$F = F_0 \exp\left(-\frac{\rho_* MP}{2\nu J^2} t\right) \quad (4.18)$$

Подставляя в (4.18) главный член разложения (4.17), учитывая выражение (3.1) для момента инерции жидкости B и малость величины B/A , приходим к (4.1).

5. Пример. Рассмотрим демпфирование колебаний небольшого спутника, стабилизированного по магнитному полю Земли. Пусть $A = 5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, а характерная частота колебаний относительно силовой линии $\omega = 0,026 \text{ с}^{-1}$ (период равен 4 мин). Предположим, что радиус трубки тора a и кинематическая вязкость ν жидкости выбраны оптимальным образом, т. е. в (3.5) $\nu_0 = \nu/(\omega a^2) = 0,158$. Тогда эффективность демпфера будет максимальной при максимальном реализуемом моменте инерции жидкости B . Величина B ограничена допустимой массой жидкости и размерами тора, который удастся разместить на аппарате. Чтобы уменьшить объем демпфера, выгодно использовать жидкость максимально возможной плотности.

Пусть допустимый радиус тора $R = 0,1 \text{ м}$, а в качестве демпфирующей жидкости выбрана ртуть: $\nu = 0,11 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$. Тогда оптимальная величина ν_0 достигается при диаметре трубки $2a = 1 \text{ см}$. Момент инерции жидкости B составит $0,0067 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ (при массе жидкости $0,67 \text{ кг}$). Подставляя найденные величины в (3.5), получим, что декремент затухания колебаний составит $1,5 \cdot 10^5 \text{ с}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bhuta P. G., Koval L. R.* A viscouse ring damper for a freely precessing satellite // Intern. J. Mech. Sci. 1966. V. 8. № 5. P. 383—395.
2. *Смирнова Е. П.* Движение жидкости большой вязкости во вращающемся торе // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 1. С. 177—182.
3. *Кузнецов Л. И., Неровная В. С.* Плоское движение спутника с тороидальной полостью, заполненной вязкой несжимаемой жидкостью // Прикладная механика. Изд. Ленингр. ун-та, 1975. Вып. 2. С. 55—61.
4. *Боевкин В. И., Гуревич Ю. Г., Павлов Ю. И. и др.* Ориентация искусственных спутников в гравитационных и магнитных полях. М.: Наука, 1976. 304 С.
5. *Смирнова Е. П.* Устойчивость свободного вращения волчка, содержащего тороидальную полость с жидкостью малой вязкости // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 5. С. 20—26.
6. *Булавацкий В. К.* Малые пространственные колебания спутника с жидкостью // Прикладная механика. Изд. Ленингр. ун-та, 1977. Вып. 3. С. 146—153.
7. *Булавацкий В. К.* Плоское движение около центра масс спутника с тороидальной полостью, заполненной вязкой несжимаемой жидкостью // Прикладная механика. Изд. Ленингр. ун-та. 1977, Вып. 3. С. 153—156.
8. *Сарычев В. А.* Итоги науки и техники. Исследование космического пространства. Т. 11. Вопросы ориентации искусственных спутников. М.: ВИНТИ, 1978. 224 С.
9. *Alfriend K. T., Spencer T.M.* Comparison of filled and partly filled nutation dampers // J. Astronaut. Sci. 1983. V. 31. № 2. P. 189—202.
10. *Слезкин Н. А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гостехиздат, 1955. 520 С.
11. *Румянцев Б. Н.* О движении твердого тела, содержащего полости, заполненные вязкой жидкостью // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 6. С. 1127—1132.
12. *Кузьмин Р. О.* Бесселевы функции. М.: ОНТИ. Глав. ред. общетехн. лит-ры, 1935. 244 С.
13. *Черноузько Ф. Л.* Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М.: ВЦ АН СССР, 1968. 230 С.

Москва

Поступила в редакцию
17.V.1989