Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 2, 1990

УДК 531.36 + 532.5


В. А. Владимиров, В. В. Румянцев

# К ОБРАЩЕНИЮ ТЕОРЕМЫ ЛАГРАНЖА ДЛЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОЛОСТЬЮ, СОДЕРЖАЩЕЙ ВЯЗКУЮ ЖИДКОСТЬ

**Рассматривается линейная задача устойчивости состояния равновесия твердого тела с полостью, частично или целиком заполненной вязкой несжимаемой жидкостью, обладающей поверхностным натяжением. Прямым методом Ляпунова показано, что система неустойчива, если вторая вариация потенциальной энергии может принимать отрицательные значения. Для нарастающих возмущений получены априорные оценки решений снизу и сверху. Оценка снизу гарантирует экспоненциальное нарастание отклонений частиц тела и жидкости от состояния равновесия. Оценка сверху показывает, что решения не могут нарастать быстрее, чем экспоненциально. Показатели экспонент в обоих случаях вычисляются по параметрам состояния равновесия и начальным данным для полей возмущений.**

**1. Общее описание системы.** Изучаются движения твердого тела с полостью, содержащей жидкость. Вводятся неподвижная (инерциальная) система декартовых координат $O'x_1'x_2'x_3'$ и подвижная система $Ox_1x_2x_3$, жестко связанная с твердым телом с началом в некоторой точке $O$ тела. В координатах $Ox_1x_2x_3$ твердое тело и полость занимают фиксированные области $\tau_1$ и $\tau$. Граница $\partial\tau$ одновременно является внешней для полости ($\tau$) и внутренней для твердого тела ($\tau_1$). Плотность тела задается функцией $\rho = \rho(x_1, x_2, x_3)$. Область $\tau$ целиком заполнена двумя жидкостями. В любой момент времени жидкая поверхность $\Gamma$ делит область $\tau$ на две части $\tau^+$ и $\tau^-$, в которых находятся жидкости с коэффициентами вязкости $\eta^+$ и $\eta^-$ и плотностями $\rho^+$ и $\rho^-$. В $\tau^\pm$ величины $\rho^\pm$, $\eta^\pm$ постоянны, а на $\Gamma$ имеется скачок плотности $[\rho] \equiv \rho^+ - \rho^-$ и вязкости $[\eta] \equiv \eta^+ - \eta^-$.

Линия $\gamma$ пересечения поверхностей $\partial\tau$ и $\Gamma$ делит поверхность $\partial\tau$ на части $\partial\tau^+$ и $\partial\tau^-$. На поверхностях $\Gamma$, $\partial\tau^+$, $\partial\tau^-$ заданы постоянные коэффициенты поверхностного натяжения $\sigma$, $\sigma^+$, $\sigma^-$. Через $\nu$ и $\mathbf{n}$ обозначаются единичные нормали к поверхностям $\Gamma$ и $\partial\tau$, $\nu$ направлена из жидкости $\rho^+$ в $\rho^-$, $\mathbf{n}$ из $\tau$ в $\tau_1$.

Предполагается, что твердое тело стеснено некоторыми геометрическими стационарными связями или является свободным. Число его степеней свободы обозначим через $n$ ($n \leqslant 6$). Положение системы задается обобщенными координатами тела $q_\alpha$ ($\alpha = 1, \ldots, n$) и относительными координатами частиц жидкости $x_i$ ($i = 1, 2, 3$).

В качестве индексов используются буквы греческого и латинского алфавитов. Первые принимают значения от 1 до $n$ и соответствуют конечномерным степеням свободы. Вторые изменяются от 1 до 3 и обозначают компоненты векторов и тензоров. Всюду применяется правило суммирования по повторяющимся индексам (как латинским, так и греческим). Для функций принята сокращенная запись

$$\varphi(x_k, q_\alpha) \equiv \varphi(x_1, x_2, x_3, q_1, \ldots, q_n)$$

Положение какой-либо материальной частицы тела или жидкости относительно неподвижной $O'x_1'x_2'x_3'$ и подвижной $Ox_1x_2x_3$ систем координат задается векторами $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}$ соответственно. При этом

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{r}_0' = \mathbf{r}'(q_\alpha, x_i) \tag{1.1}$$

где $\mathbf{r}_0'$ — радиус-вектор точки $O$ в системе $O'x_1'x_2'x_3'$. Дифференцируя равенство (1.1) по времени, получаем

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{u} \tag{1.2}$$

где $\mathbf{v}_0$ — вектор скорости точки $O$ тела, $\boldsymbol{\omega}$ — вектор его мгновенной угловой скорости, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$ — скорости материальной частицы относительно систем координат $O'x_1'x_2'x_3'$ и $Ox_1x_2x_3$. Для точек твердого тела $\mathbf{u} \equiv 0$. Справедливы представления

$$\mathbf{r} = x_i\mathbf{j}_i, \quad \mathbf{u} = u_i\mathbf{j}_i, \quad \mathbf{v} = v_i\mathbf{j}_i \tag{1.3}$$

где $\mathbf{j}_i$ — единичные векторы направлений осей $Ox_i$.

При движении тела и жидкости бесконечно малые приращения $\mathbf{r}'$, $x_i$ и $q_\alpha$ связаны равенством

$$\Delta\mathbf{r}' = \frac{\partial\mathbf{r}'}{\partial x_i}\Delta x_i + \frac{\partial\mathbf{r}'}{\partial q_\alpha}\Delta q_\alpha \tag{1.4}$$

которому соответствует связь между скоростями

$$\mathbf{v} = \frac{\partial\mathbf{r}'}{\partial x_i}u_i + \frac{\partial\mathbf{r}'}{\partial q_\alpha}q_\alpha^{\boldsymbol{\cdot}}, \quad q_\alpha^{\boldsymbol{\cdot}} \equiv \frac{dq_\alpha}{dt} \tag{1.5}$$

Внешние по отношению к системе «тело плюс жидкость» силы приложены как к телу, так и к жидкости. Силы, действующие на тело, характеризуются потенциальной энергией $\Pi_1 = \Pi_1(q_\alpha)$ и диссипативной функцией $R_n(q_\alpha, q_\beta^{\boldsymbol{\cdot}})$, причем диссипация может быть как полной, так и частичной. На жидкость действует внешнее поле массовых сил с потенциалом $\Phi(\mathbf{r}')$. Подставляя (1.1) в потенциал действующих на жидкость внешних сил, получаем

$$\Phi(\mathbf{r}'(q_\alpha, x_i)) \equiv \Pi_2(q_\alpha, x_i) \tag{1.6}$$

Потенциальная энергия системы дается выражением

$$\Pi_n = \Pi_1 + \int_\tau \rho\Pi_2 d\tau + \Pi_2^* \tag{1.7}$$

$$\Pi_2^* \equiv \sigma|\Gamma| + \sigma^+|\partial\tau^+| + \sigma^-|\partial\tau^-|$$

где $|\Gamma|$, $|\partial\tau^\pm|$ — площади соответствующих поверхностей; потенциальная энергия сил поверхностного натяжения $\Pi_2^*$ не зависит от $q_\alpha$.

Кинетическая энергия системы представляется в виде

$$T_n = {}^1/_2\int_\Omega \rho\mathbf{v}^2 d\tau = T_1 + T_2 \quad \Omega = \tau_1 \cup \tau, \tag{1.8}$$

$$T_1 = T_1(q_\alpha, q_\beta^{\boldsymbol{\cdot}}), \quad T_2 = \int_\tau \rho T_0 d\tau, \qquad T^\circ = {}^1/_2\mathbf{v}^2 = T^\circ(q_\alpha, q_\beta^{\boldsymbol{\cdot}}, x_i, u_k)$$

где $T_1$ и $\rho T^\circ$ — кинетическая энергия тела и плотность кинетической энергии жидкости; индекс $n$ у $\Pi_n$ и $T_n$ соответствует значениям энергии в нелинейной задаче; под интегрированием по области $\Omega$ понимается сумма интегралов по областям $\tau_1$, $\tau^+$, $\tau^-$; коэффициент $\rho$ в (1.7), (1.8) для каждого из этих интегралов принимает значения соответствующих плотностей $\rho = \rho_1(x_i)$ в $\tau_1$, $\rho = \rho^\pm$ в $\tau^\pm$.

**2. Уравнения движения системы.** При отсутствии диссипативных эффектов уравнения движения рассматриваемой системы получены в [1, 2]. Учет вязкости жидкости и диссипативного характера действующих на тело внешних сил приводит к уравнениям

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_n}{\partial q_\alpha^{\cdot}} - \frac{\partial T_n}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial \Pi_n}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial R_n}{\partial q_\alpha^{\cdot}} \tag{2.1}$$

$$\rho\frac{dv_i}{dt} + e_{ikl}\omega_k v_l = -\frac{\partial \Pi_2}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \text{ в } \tau^\pm \tag{2.2}$$

$$\sigma_{ik} \equiv -p\delta_{ik} + \eta D_{ik}, \quad D_{ik} \equiv \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}, \quad \frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u_k\frac{\partial}{\partial x_k}$$

в которых $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\Pi_2$ берутся из (1.2), (1.6); $p$ — давление, $e_{ikl}$ — единичный абсолютно антисимметричный тензор. Тензор (псевдотензор) третьего ранга $e_{ikl}$ представляет собой совокупность величин, обладающих следующими свойствами: при перестановке любых двух индексов $e_{ikl}$ меняет знак; $e_{123} = 1$.

Граничные условия для жидкости имеют вид

$$dF/dt = 0, \quad [\sigma_{ik}]\,\nu_k = 2\sigma H\nu_i, \quad [u_i] = 0 \quad \text{на } \Gamma \tag{2.3}$$

$$2H \equiv R_1^{-1} + R_2^{-1}$$

$$\mathbf{u} = 0 \text{ на } \partial\tau; \quad \partial F/\partial t = 0 \text{ на } \gamma \tag{2.4}$$

где $F(x_1, x_2, x_3, t) = 0$ — уравнение поверхности $\Gamma$; $H$, $R_1$, $R_2$ — средняя кривизна поверхности $\Gamma$ и ее главные радиусы кривизны в данной точке. Величины $R_1$ и $R_2$ считаются положительными, если центр кривизны лежит с той же стороны от этой поверхности, что и жидкость $\rho^+$, и отрицательными в противном случае. Кривая $\gamma$ представляет собой линию пересечения поверхностей $\partial\tau$ и $\Gamma$.

Для вязкой капиллярной жидкости граничные условия на твердой поверхности $\partial\tau$ до сих пор однозначно не установлены и служат предметом дискуссий [3—8] [1]. Соотношение (2.4) отвечает простейшему из используемых вариантов граничных условий [7]. Более сложные способы их постановки будут обсуждаться в разд. 11.

На решениях задачи (2.1)—(2.4) выполняется энергетическое равенство

$$E_n^{\cdot} = -D_n - q_\alpha^{\cdot}\partial R_n/\partial q_\alpha^{\cdot}; \quad E_n = T_n + \Pi_n,$$

$$2D_n = \int_\tau \eta D_{ik}D_{ik}\,d\tau \tag{2.5}$$

Величины $T_n$ и $\Pi_n$ определены в (1.7), (1.8).

Считаем, что все величины в (2.1)—(2.5) и ниже приведены к безразмерной форме с помощью подходящим образом выбранных масштабов.

**3. Состояния равновесия и вторая вариация потенциальной энергии.** Стационарные точки функционала $\Pi_n$ (1.7) соответствуют состояниям равновесия (покоя) системы

$$q_\alpha = 0, \quad q_\beta^{\cdot} = 0$$

$$\mathbf{u} = 0, \quad p = p_0(x_k); \quad \nabla p_0 = -\rho\nabla\Phi \text{ в } \tau_0^\pm \tag{3.1}$$

$$[p_0] = -2\sigma H, \quad [\rho] \neq 0 \text{ на } \Gamma$$

где $\Gamma_0$ — равновесная поверхность скачка плотности, делящая область $\tau$ на части $\tau_0^\pm$. Соотношения (3.1) задают точные решения задачи (2.1)—(2.4).

Первая и вторая вариации потенциальной энергии $\Pi_n$ (1.7) определяются только геометрическими параметрами системы. Первая вариация

[1] См. также: *Воинов О. В.* Гидродинамическая теория смачивания. Препринт № 179. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1988. 31 с.

$\delta\Pi_n$, взятая на состоянии покоя (3.1), равна нулю. Вычисления второй вариации приводят к выражению [2]

$$\delta^2\Pi_n = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Pi_n}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}\right)_0 \delta q_\alpha \delta q_\beta + \delta q_\alpha [\rho] \int\limits_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial \Pi_2}{\partial q_\alpha}\right)_0 \delta N dS +$$
$$+ \frac{[\rho]}{2} \int\limits_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial \Pi_2}{\partial \nu}\right)_0 (\delta N)^2 dS + \frac{\sigma}{2} \int\limits_{\Gamma_0} \{a (\delta N)^2 + \nabla (\delta N, \delta N)\} dS + \frac{\sigma}{2} \int\limits_{\gamma_0} \chi (\delta N)^2 dl \tag{3.2}$$

$$\delta N \equiv \delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}, \quad \partial \Pi_2 / \partial \nu \equiv (\mathbf{v} \nabla) \Pi_2$$
$$a \equiv R_1^{-2} + R_2^{-2}, \quad \chi \equiv (k \cos \theta - \bar{k}) / \sin \theta$$

в котором $\delta \mathbf{r}$ и $\delta q_\alpha$ — виртуальные приращения радиуса-вектора относительных координат жидких частиц и обобщенной координаты $q_\alpha$; нулевой индекс всюду отвечает значениям функций в положении равновесия; $\gamma_0$ — линия пересечения поверхностей $\Gamma_0$ и $\partial\tau$; $\theta$ — краевой угол; $k$ и $\bar{k}$ — кривизны нормальных сечений поверхностей $\Gamma_0$ и $\partial\tau$ вдоль направлений $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}_1$; в свою очередь векторы $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}_1$ нормальны к линии $\gamma$ и лежат в плоскостях, касательных к поверхностям $\Gamma_0$ (в направлении из $\Gamma_0$) и к $\partial\tau$ (в направлении из $\partial\tau_0^+$) соответственно; $\nabla (\delta N, \delta N)$ — первый дифференциальный параметр Бельтрами [9].

**4. Постановка линеаризованной задачи.** Приведем здесь краткий вывод линеаризованного на состоянии равновесия (3.1) варианта задачи (2.1)—(2.5).

Линейные возмущения полей скоростей $\mathbf{v}(x_i, t)$, $\mathbf{u}(x_i, t)$ связаны вытекающими из (1.3), (1.5) равенством

$$v_i = u_i + a_{i\alpha} q_\alpha^{\boldsymbol{\cdot}}, \quad a_{i\alpha} \equiv (\partial \mathbf{r}' / \partial q_\alpha)_0 \mathbf{j}_{i0} \tag{4.1}$$

Функции $\mathbf{v}(x_i, t)$ и $\mathbf{u}(x_i, t)$ определены при $x_i \in \tau_1$ и $x_i \in \tau_0^\pm$, причем $\mathbf{u} \equiv 0$ при $x_i \in \tau_1$. Выражение для первого (квадратичного) члена разложения кинетической энергии получается подстановкой (4.1) в определение (1.8):

$$T = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_0} \rho v_k v_k d\tau = \frac{1}{2} M_{\alpha\beta} q_\alpha^{\boldsymbol{\cdot}} q_\beta^{\boldsymbol{\cdot}} + \frac{1}{2} \int\limits_{\tau_0} \rho (u_k u_k + 2 a_{k\alpha} u_k q_\alpha^{\boldsymbol{\cdot}}) d\tau \tag{4.2}$$

$$M_{\alpha\beta} \equiv \int\limits_{\Omega_0} \rho a_{k\alpha} a_{k\beta} d\tau, \quad \Omega_0 = \tau_1 \cup \tau_0^+ \cup \tau_0^-$$

Для записи первого члена разложения потенциальной энергии (1.7) необходимо ввести в рассмотрение поля смещений, которые представляют собой линейные приращения координат материальной частицы, отсчитываемые от состояния ее равновесия. Сохраняя обозначения (1.4), записываем

$$\Delta \mathbf{r}' = \mathbf{r}' - \mathbf{X}' \equiv \xi, \quad \Delta x_i = x_i - X_i \equiv \zeta_i, \quad \Delta q_\alpha = q_\alpha$$

где $\mathbf{X}'$, $X_i$ — значения радиусов-векторов и координат материальных частиц в положении равновесия. Следствием (1.4) являются равенства

$$\xi_i = \zeta_i + a_{i\alpha} q_\alpha, \quad \xi_i = \xi \mathbf{j}_{i0} \tag{4.3}$$

для записи которых использованы (4.1) и (1.3). Поля смещений $\xi_i (x_k, t)$ и $\zeta_i (x_k, t)$ также определены при $x_i \in \tau_1$ и $x_i \in \tau_0^\pm$, причем $\zeta_i = 0$ при $x_i \in \tau_1$. Между полями (4.1) и (4.3) имеются связи

$$\xi_{it} \equiv \partial \xi_i (x_k, t) / \partial t = v_i (x_k, t), \quad \zeta_{it} = u_i (x_k, t) \tag{4.4}$$

простота вида которых обусловлена тем, что линеаризация проводится на состоянии покоя (3.1) ([10], § 13).

Первый член разложения потенциальной энергии $\Pi_n$ вблизи состояния покоя (3.1), как известно, совпадает с ее второй вариацией $\delta^2\Pi_n$ (3.2), в которой надо произвести замену $\delta q_\alpha \to q_\alpha$, $\delta x_i \to \zeta_i$, $\delta N \to N$:

$$\Pi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}\right)_0 q_\alpha q_\beta + [\rho] q_\alpha \int\limits_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial \Pi_2}{\partial q_\alpha}\right)_0 N dS +$$
$$+ \frac{[\rho]}{2}\int\limits_{\Gamma_0}\left(\frac{\partial \Pi_2}{\partial \nu}\right)_0 N^2 dS + \frac{\sigma}{2}\int\limits_{\Gamma_0}\{aN^2 + \nabla(N, N)\}\, dS + \int\limits_{\gamma_0} \chi N^2 dl, \quad N \equiv \zeta_i \nu_{0i} \tag{4.5}$$

причем в рассматриваемой модели (2.4), (2.5) интеграл по $\gamma_0$ в (4.5) равен нулю.

Линеаризованные на (4.1) уравнения движения (2.1), (2.2) имеют вид

$$M_{\alpha\beta} q_\beta^{\cdot\cdot} + \int\limits_{\tau_0} \rho a_{k\alpha} \zeta_{ktt} d\tau = -\frac{\partial R}{\partial q_\alpha^{\cdot}} -$$
$$-\left(\frac{\partial^2 \Pi_n}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}\right)_0 q_\beta - [\rho]\int\limits_{\Gamma_0}\left(\frac{\partial \Pi_2}{\partial q_\alpha}\right)_0 \zeta_k \nu_{0k} dS \tag{4.6}$$

$$\xi_{itt} = \zeta_{itt} + a_{i\alpha} q_\alpha^{\cdot\cdot} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_k} = 0 \text{ в } \tau_0 \pm \tag{4.7}$$

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \eta D_{ik}, \quad 2R \equiv c_{\alpha\beta} q_\alpha^{\cdot} q_\beta^{\cdot} \tag{4.8}$$

где $p = p(x_k, t)$ — поле возмущений давления, $R$ — диссипативная функция линейного приближения, представляющая собой первый член разложения полной диссипативной функции $R_n(q_\alpha, q_\beta^{\cdot})$ (2.1), $c_{\alpha\beta}$ — постоянные. Уравнение (4.6) получено подстановкой (4.2), (4.5), (4.8) в (2.1).

Линеаризация условий (2.3) дает

$$[\sigma_{ik}]\nu_k + \sigma(aN - \Delta N)\nu_i = [\rho]\left\{\zeta_k\left(\frac{\partial \Pi_2}{\partial x_k}\right)_0 + q_\alpha\left(\frac{\partial \Pi_2}{\partial q_\alpha}\right)\right\}; \quad [\zeta] = 0 \text{ на } \Gamma_0 \tag{4.9}$$

где $\Delta$ — второй дифференциальный параметр Бельтрами ([9] с. 190), содержащая его часть выражения (4.9) получается с помощью формулы для вариации кривизны ([9], с. 276).

На $\partial\tau$ справедливы условия прилипания

$$\zeta = 0 \text{ на } \partial\tau \tag{4.10}$$

Начальные данные для (4.6)—(4.10) записываются в виде

$$\zeta(x_k, 0) = \zeta^\circ(x_k), \quad \zeta_t(x_k, 0) = \mathbf{u}^\circ(x_k)$$
$$q_\alpha(0) = q_\alpha^\circ, \quad q_\alpha^{\cdot}(0) = q_\alpha^{\cdot\circ} \tag{4.11}$$

где функции $\zeta^\circ$, $\mathbf{u}^\circ$ подчинены очевидным кинематическим ограничениям $q_\alpha^\circ$ и $q_\alpha^{\cdot\circ}$ — произвольные постоянные. По (4.11), (4.1), (4.3) могут быть вычислены начальные значения

$$\xi(x_k, 0) = \xi^\circ(x_k), \quad \mathbf{v}(x_k, 0) = \mathbf{v}^\circ(x_k) \tag{4.12}$$

На решениях задачи (4.6)—(4.12) выполняется энергетическое равенство

$$E^{\cdot} = -2R - D; \quad E = T + \Pi, \quad 2D \equiv \int\limits_{\tau_0} \eta D_{ik} D_{ik} d\tau \tag{4.13}$$

причем $T$, $\Pi$, $R$ определены в (4.2), (4.5), (4.8).

Цель дальнейшего изложения — доказательство утверждений о росте возмущений (неустойчивости) состояния равновесия (3.1) при отсутствии в нем минимума функционала потенциальной энергии $\Pi$ (4.5). Принимается, что рассматриваемые состояния равновесия таковы, что существует множество $Q$ смещений $\{\zeta(x_k), q_\alpha\}$, таких, что (4.5) дает

$$\Pi < 0 \quad \text{при } \{\zeta(x_k), q_\alpha\} \in Q \tag{4.14}$$

для $\{\zeta(x_k), q_\alpha\} \notin Q$ неравенство (4.14) может смениться на противоположное, т. е. состояние (3.1) для функционала П является бесконечномерным аналогом «седловой» точки.

**5. Основные функционалы и обобщенный вириал.** Для применения прямого метода Ляпунова вводятся в рассмотрение функционалы $M$, $W$, $G$, $X$ и функция $\varphi$

$$M \equiv \int\limits_{\Omega_0} \rho\xi_i\xi_i d\tau, \quad \frac{M^\cdot}{2} = W \equiv \int\limits_{\Omega_0} \rho\xi_i v_i d\tau,$$

$$2G \equiv \int\limits_{\tau_0} \eta G_{ik} G_{ik} d\tau, \quad G_{ik} = \frac{\partial\xi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial\xi_k}{\partial x_i},$$

$$X \equiv M^\cdot + 2A, \quad 2A \equiv G + \varphi, \quad \varphi = c_{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta, \quad \tau_0 = \tau_0^+ \cup \tau_0^-, \quad \Omega_0 = \tau_1 \cup \tau_0 \tag{5.1}$$

где связь $M^\cdot = 2W$ справедлива в силу (4.4), величины $G$ и $\varphi$ по определению неотрицательные, $c_{\alpha\beta}$ определены в (4.8). Согласно [11], функционал $W$ представляется в виде

$$W = \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} q_\alpha + \int\limits_{\tau_0} \rho v_i \zeta_i d\tau \tag{5.2}$$

Дифференцирование функционала $X$ по времени и последующие преобразования с использованием (5.1), (5.2), (4.2), (4.5)—(4.10) дают

$$X^\cdot = 4(T - \Pi) = 8T - 4E \tag{5.3}$$

При отсутствии диссипативных эффектов равенства, подобные (5.3), именуются вириальными [10]. Поэтому (5.3) может быть названо обобщенным вириальным равенством.

**6. Линейная оценка нарастания возмущений.** В условиях (4.14) простейшая оценка роста решения, свидетельствующая о неустойчивости, получается интегрированием (5.3) с $E(0) < 0$. Убывание $E(t)$ со временем (4.13) влечет $E(t) < E(0) < 0$. После этого из (5.3) следует

$$X(t) > X(0) + 4 \mid E(0) \mid t$$

Отсюда после привлечения неравенства $X \leqslant X_1 \equiv M + 2T + 2A$ вытекает требуемая оценка

$$X_1(t) > X(0) + 4 \mid E(0) \mid t \tag{6.1}$$

в которой всегда можно выбрать $X(0) = M^\cdot(0) + 2A(0) > 0$.

В силу положительности функционала $X_1$ неравенство (6.1) гарантирует линейный рост возмущений в среднеквадратичном. При этом растут либо скорости $v_i$, $q_\alpha^\cdot$, либо смещения $\xi_i$, $q_\alpha$, либо тензор деформаций жидкости $G_{ik}$, либо различные суммы этих величин. Определение неустойчивости тем самым включает в себя не только рост отклонений частиц жидкости от положения равновесия, но и нарастание производных этих отклонений по всему объему жидкости. Ниже излагается оценка нарастания возмущений, содержащая только смещения и скорости.

**7. Основное неравенство.** Умножаем равенство (5.3) на неопределенный постоянный множитель $\lambda$ и складываем с энергетическим соотношением (4.13). Полученное равенство после простых преобразований приводится к виду

$$\frac{d}{dt}(T_\lambda + \Pi_\lambda) = -2\lambda(T_\lambda - \Pi_\lambda) - D_\lambda - R_\lambda \tag{7.1}$$

$$2T_\lambda \equiv 2T - \lambda M^{\cdot} + \lambda^2 M = \int\limits_{\Omega_0} \rho(\xi_t - \lambda\xi)^2 d\tau, 2\Pi_\lambda \equiv 2\Pi + 2A\lambda + \lambda^2 M$$

$$D_\lambda \equiv D - \lambda G^{\cdot} + \lambda^2 G = \frac{1}{2}\int\limits_{\tau_0} \eta(D_{ik} - \lambda G_{ik})^2 d\tau$$

$$R_\lambda \equiv 2R - \lambda\varphi^{\cdot} + \lambda^2\varphi = c_{\alpha\beta}(q_\alpha^{\cdot} - \lambda q_\alpha)(q_\beta^{\cdot} - \lambda q_\beta)$$

Накладываем ограничение $\lambda > 0$. Тогда в силу неотрицательности $D_\lambda$, $R_\lambda$ и $T_\lambda$ из (7.1) следует неравенство

$$E_\lambda^{\cdot} \leqslant 2\lambda E_\lambda; \quad E_\lambda \equiv T_\lambda + \Pi_\lambda \tag{7.2}$$

интегрирование которого дает

$$E_\lambda(t) \leqslant E_\lambda(0)\exp(2\lambda t) \tag{7.3}$$

Подчеркнем, что неравенство (7.3) справедливо для любых решений задачи (4.6)—(4.12) и для любых положительных значений параметра $\lambda$. Также пока не накладывалось никаких ограничений на знак функционала потенциальной энергии $\Pi$.

Монотонность изменения величины $E_\lambda$ позволяет использовать ее в качестве функционала Ляпунова.

**8. Оценка снизу роста возмущений.** Пусть теперь справедливо неравенство (4.14). Начальные данные (4.11), (4.12) выбираем из множества $Q$ (4.14) так, что $\Pi(0) < 0$. Покажем, что в этом случае всегда можно выбрать $E_\lambda(0) < 0$, после чего из (7.3) вытекает экспоненциальный рост возмущений.

Согласно (7.1), имеем

$$E_\lambda(0) = E(0) + \lambda B(0) + \lambda^2 M(0), \quad 2B \equiv 2A - M^{\cdot} \tag{8.1}$$

Выбираем начальные данные для скоростей так, что $T(0) < |\Pi(0)|$, т. е. $E(0) < 0$. Тогда $E_\lambda(0)$ (8.1) является полиномом второй степени от $\lambda$ с положительным коэффициентом $M(0)$ при $\lambda^2$ и отрицательным свободным членом $E(0)$. Поэтому условия $\lambda > 0$, $E_\lambda(0) < 0$ эквивалентны заданию интервала допустимых значений $\lambda$:

$$0 < \lambda < \Lambda_1 \equiv -{}^1/_2 B/M + \sqrt{({}^1/_2 B/M)^2 - E/M} \tag{8.2}$$

Очевидно, $\Lambda_1 > 0$ для любых начальных данных с $E(0) < 0$. При этом величина $\Lambda_1$ дает оценку снизу величины инкремента. Действительно, при $\lambda = \Lambda_1 - \delta$ (с любым числом $\delta$ из интервала $0 < \delta < \Lambda_1$) неравенство (7.3) записывается в виде

$$E_{\Lambda_1-\delta}(t) \leqslant E_{\Lambda_1-\delta}(0)\exp[2(\Lambda_1 - \delta)t] \tag{8.3}$$

где $E_{\Lambda_1-\delta}(0) < 0$. Из неотрицательности $T_\lambda$ и определения $\Pi_\lambda$ (7.1) вытекает соотношение

$$E_\lambda(t) \equiv T_\lambda(t) + \Pi_\lambda(t) > \Pi(t)$$

которое вместе с (8.3) дает неравенство

$$\Pi(t) < E_{\Lambda_1-\delta}(0)\exp[2(\Lambda_1 - \delta)t] \tag{8.4}$$

Последнее означает неограниченное убывание потенциальной энергии $\Pi$ в область отрицательных ее значений. Недостатком (8.4) является то, что определение $\Pi$ (4.5) содержит не только отклонения $q_\alpha$, $N$, но и производные отклонения $\nabla(N, N)$. В то же время видно, что после отбрасывания в П члена с $\nabla (N, N)$ неравенство (8.4) лишь усилится. Беря модули отрицательных величин и меняя знак неравенства, из (8.4) получаем

$$I(t) > |I_1(t)| > |E_{\Lambda_1-\delta}(0)| \exp[2(\Lambda_1 - \delta)t] \qquad (8.5)$$

$$2I_1 \equiv \left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}\right)_0 q_\alpha q_\beta + 2[\rho] q_\alpha \int\limits_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial \Pi_2}{\partial q_\alpha}\right)_0 N dS + \int\limits_{\Gamma_0} \left\{[\rho]\left(\frac{\partial \Pi_2}{\partial \nu}\right)_0 + \sigma a\right\} N^2 dS,$$

$$I \equiv C\left(q_\alpha q_\alpha + \int\limits_{\Gamma_0} N^2 dS\right), \quad C = \mathrm{const} > 0$$

Из (8.5) заключаем, что состояние покоя (3.1) системы «тело плюс жидкость» при отсутствии минимума потенциальной энергии (4.14) неустойчиво по линейному приближению в среднеквадратическом по отклонениям $q_\alpha$, $N$. При этом растущие возмущения оцениваются снизу экспонентой с инкрементом $\Lambda_1 - \delta$ (8.2), зависящим только от начальных данных.

Рассмотрим теперь класс решений (4.6)—(4.12), для которых начальное поле скоростей $\mathbf{v}$ и смещений $\xi$ в каждой точке связаны соотношением

$$\mathbf{v}(x_k, 0) = \xi_t(x_k, 0) = \lambda\xi(x_k, 0) \qquad (8.6)$$

Из (7.1), (8.6) следует $T_\lambda(0) = 0$, $E_\lambda(0) = \Pi_\lambda(0)$. Условия $\lambda > 0$, $E_\lambda(0) < 0$ при этом эквивалентны заданию $\lambda$ из интервала

$$0 < \lambda < \Lambda \qquad (8.7)$$

$$\Lambda \equiv -\frac{A}{M} + \sqrt{\left(\frac{A}{M}\right)^2 - \frac{2\Pi}{M}} = \frac{-2\Pi}{A + \sqrt{A^2 - 2\Pi M}}$$

где положительность $\Lambda$ гарантируется сделанным выбором $\Pi(0) < 0$. Беря $\lambda = \Lambda - \delta$ с любым числом $\delta$ из интервала $0 < \delta < \Lambda$, записываем (7.3) в виде

$$E_{\Lambda-\delta}(t) \leqslant \Pi_{\Lambda-\delta}(0) \exp[2(\Lambda - \delta)t]$$

откуда, вместо (8.5), вытекает оценка

$$I(t) > |I_1(t)| \geqslant |\Pi_{\Lambda-\delta}(0)| \exp[2(\Lambda - \delta)t] \qquad (8.8)$$

Ниже будет показано, что оценка снизу роста возмущений с инкрементом (8.7) (8.8) является в некотором смысле максимально достижимой.

**9. Оценка сверху роста возмущений.** Из основного неравенства (7.3) вытекает также оценка сверху растущих возмущений. Идея ее получения состоит в нахождении значения $\lambda$ такого, что функционал (7.1) — положительно определенная величина на любых полях смещений $\{\zeta, q_\alpha\}$. При этом функционал $E_\lambda$ также будет положительно определенным и, как следствие, (7.3) даст оценку сверху возмущений.

Задача определения знака величины $\Pi_\lambda$ рассматривалась в разд. 8. Условия $\lambda > 0$, $\Pi_\lambda > 0$ при $\Pi < 0$ эквивалентны неравенству $\lambda > \Lambda$. Определим величину $\Lambda^+$ равенством

$$\Lambda^+ = \sup\nolimits_Q \Lambda \qquad (9.1)$$

Тогда при $\lambda > \Lambda^+$ для любых смещений $\{\zeta, q_\alpha\} \in Q$ имеется $\Pi_\lambda > 0$. Таким образом, положительную определенность функционалов $\Pi_\lambda$ и $E_\lambda$ на всевозможных смещениях $\{\zeta, q_\alpha\}$ обеспечивает $\lambda = \Lambda^+ + \varepsilon$ с любым числом $\varepsilon > 0$.

Используя положительную определенность $E_{\Lambda^++\varepsilon}$ из (7.3) получаем искомую оценку

$$E_{\Lambda^++\varepsilon}(t) \leqslant E_{\Lambda^++\varepsilon}(0) \exp[2(\Lambda^+ + \varepsilon)t]$$

которая при помощи неравенства $\Pi_{\Lambda^+} \geqslant 0$ приводится к более наглядному виду

$$2T_{\Lambda^++\varepsilon}(t) + (2\varepsilon\Lambda^+ + \varepsilon^2) M(t) + \varepsilon(G + \varphi) \leqslant 2E_{\Lambda^++\varepsilon}(0) \exp[2(\Lambda^+ + \varepsilon)t] \qquad (9.2)$$

Видно, что среднеквадратический рост возмущений ограничен сверху экспонентой с инкрементом $\Lambda^+ + \varepsilon$.

**10. Свойства функционала $\Lambda$.** Для существования конечного значения $\Lambda^+$ (9.1) необходимо, чтобы определенная на множестве $Q$ (4.14) величина $\Lambda$ (8.7) была ограничена сверху. Для простоты здесь рассмотрим случай фиксированного сосуда ($q_\alpha \equiv 0$)

при наличии свободной поверхности ($\rho^- \equiv 0$). Требуемая оценка получается при помощи соотношений

$$\|\xi\|_{L_2(\Gamma_0)} \leqslant C_1 \|\xi\|_{H^1(\tau_0^+)}, \quad \|\xi\|_{H^1(\tau_0^+)} \leqslant C_2 G \tag{10.1}$$

$$\|\xi\|^2_{H^1(\tau)} \leqslant \int\limits_{\tau} \left(\xi_i \xi_i + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}\right) d\tau, \quad \|\xi\|^2_{L_2(\Gamma)} \equiv \int\limits_{\Gamma} \xi_i \xi_i d\tau$$

справедливых для любых полей $\xi(x_k) \in H^1(\tau_0^+)$, $C_1$, $C_2$ — постоянные. Неравенства (10.1) получены, например, в [12], с. 138 и [13], с. 45. Второе из них — разновидность неравенства Корна; важно, что для его справедливости достаточно выполнения неравенства $\xi = 0$ только на части границы области $\tau_0^+$. Для величины $\Lambda$ (8.7) при помощи (10.1) (4.5) получаем

$$\Lambda = \frac{-2\Pi}{G + \sqrt{G^2 - 2\Pi M}} \leqslant \frac{A_1}{G} \int\limits_{\Gamma_0} |\xi|^2 dS \leqslant A_1 C_1 \|\xi\|_{H^1(\tau_0^+)}/G \leqslant A_1 C_1 C_2,$$

$$A_1 \equiv \sigma\rho^+ |\min\nolimits_{\Gamma_0} a| \tag{10.2}$$

Оценка (10.2) для $\Lambda$ и $\Lambda^+$ вместе с неравенством (9.2) означают ограниченность скорости нарастания любых возмущений из рассматриваемого класса и, следовательно, непрерывную зависимость решения от начальных данных. Для сравнения отметим, что идеальная жидкость в отсутствие поверхностного натяжения таким свойством не обладает, для нее существуют растущие сколь угодно быстро коротковолновые возмущения (неустойчивость Рэлея — Тейлора [14]). Оценка (10.2) принадлежит С. Я. Белову.

Другое интересное свойство величин $\Lambda_1$, $\Lambda$ (8.2), (8.7) наглядно проявляется при наличии среди обобщенных координат $q_\alpha$ ($\alpha = 1, \ldots\ldots, n$) хотя бы одной циклической $q_{\alpha'}$. По определению, потенциальная энергия $\Pi$ (4.5) системы не зависит от этой координаты. В то же время $\Lambda$ (8.7) зависит от нее через величины $2A \equiv G + \varphi$, $\varphi = c_{\alpha\beta} \underline{q}_\alpha q_\beta$. Поэтому сдвиг начала отсчета циклической координаты $q_{\alpha'} \to q_{\alpha'} + c$, вообще говоря, приводит к изменению величины $\Lambda$. Указанное свойство полученных оценок вытекает из соответствующей неинвариантности обобщенного вириального соотношения (5.3). Сказанное означает, что для каждой реализации начальных данных (4.11) имеет смысл нахождение наибольших значений $\Lambda_1$, $\Lambda$, которые соответствуют $q_{\alpha'} = 0$.

Существенно сложнее обстоит дело с учетом всегда существующих «аналогов» циклических координат для жидкости. Из (4.5) видно, что значения $\Pi$ не изменяются при всех преобразованиях функций $\zeta(x_k, t)$, оставляющих неизменным поле нормальных смещений $N(x_k)$ на поверхности $\Gamma_0$. Например, в (8.7) $\Pi$ не изменяется, а $G$ изменяется при преобразовании $\zeta \to \zeta'$

$$\zeta'(x_k, t) = \zeta(x_k, t) + \zeta_0(x_k)$$

с любым полем $\zeta_0(x_k)$, удовлетворяющим соотношениям

$$\operatorname{div} \zeta_0 = 0 \text{ в } \tau_0^{\pm}; \ \zeta_0 = 0 \text{ на } \partial\tau,$$

$$N \equiv \nu_0 \cdot \zeta_0 = 0 \text{ на } \Gamma_0$$

Фактически данное преобразование сводится к переопределению положений равновесия жидких частиц. Поэтому здесь также для каждой реализации начальных данных (4.11) имеет смысл нахождение наибольших значений $\Lambda_1$, $\Lambda$, соответствующих заданному начальному искривлению границы $N(x_k)$. Именно эти максимальные значения дадут наилучшую оценку роста снизу для данного возмущения. В соответствии с представлением для (8.7) вариационная задача сводится к нахождению минимума $G$ при заданном $N(x_k)$ на $\Gamma$ и нормировочном условии $M \equiv 1$.

**11. Модели с подвижной линией контакта трех сред.** Вернемся к общей постановке задачи разд. 2—4. Фиксированность линии $\gamma$ (2.5) противоречит экспериментальным наблюдениям [4—8]. Однако возможность ее перемещений вместе с условиями прилипания жидкости приводит к противоречию (бесконечность диссипации $D_n$ (2.6) [3]). Преодолению этого противоречия посвящено значительное количество работ [5—8], однако устоявшейся модели (пригодной для всего интервала скоростей) до настоящего времени нет.

Ниже для получения оценок развития неустойчивости используются три модели с подвижной линией $\gamma$, в каждой из которых принимается требование постоянства динамического краевого угла $\theta$ (условие Дюпре—Юнга):

$$\cos\theta = (\sigma^- - \sigma^+)/\sigma \tag{11.1}$$

В первой модели принимается условие проскальзывания Навье [5, 6], согласно которому скорость движения жидкости у поверхности $\partial\tau$ пропорциональна касательному напряжению $\mu_i \equiv \sigma_{ik}n_k - \sigma_{km}n_k n_m n_i$:

$$\mu = -\varkappa \mathbf{u}, \ \varkappa = \mathrm{const} > 0; \ \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 0 \text{ на } \partial\tau \tag{11.2}$$

Двумя другими модификациями граничных условий являются модели с заданным интервалом проскальзывания [5, 6], согласно которым твердая поверхность $\partial\tau$ делится на две части: в полосе $\partial\tau_\gamma$ ($\beta$) (шириной 2 $\beta$ со средней линией $\gamma$, $\beta = \mathrm{const}$) задается условие проскальзывания Навье или отсутствие касательных напряжений, в то время как на остальной части $\partial\tau_1 \equiv \partial\tau \setminus \partial\tau_\gamma$ ($\beta$) ставится условие прилипания

$$\mathbf{u} = 0 \text{ на } \partial\tau; \ \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 0, \ \mu = -\varkappa\mathbf{u} \text{ на } \partial\tau_\gamma \tag{11.3}$$

$$\mathbf{u} = 0 \text{ на } \partial\tau_1; \ \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 0, \ \mu = 0 \text{ на } \partial\tau_\gamma \tag{11.4}$$

причем в (11.2), (11.3) $\varkappa = \varkappa^\pm$ для жидкостей с плотностями $\rho^\pm$. Условия (11.4) — частный случай (11.3) при $\varkappa = 0$, однако именно модель (11.4) существенно развита в [15].

Таким образом, соотношения (2.1) — (2.3), (11.1), дополненные одним из условий (11.2)—(11.4) дают еще три возможные постановки точной задачи. На решениях любой из этих задач энергетическое равенство (2.6) заменяется на соотношение

$$E_n^{\cdot} = -D_n - D_n' - q_\alpha^{\cdot}\partial R_n/\partial q_\alpha^{\cdot}, \quad D_n' \equiv \int\limits_{\partial\tau_\gamma} \varkappa u_i u_i dS$$

в котором $D_n'$ — диссипация энергии за счет поверхностного трения. В модели (11.2) $\partial\tau_\gamma = \partial\tau$, а в моделях (11.4) или (2.4), (2.5) имеем $D_n' = 0$.

Линеаризованные варианты перечисленных трех моделей включают соотношения (4.6)—(4.9), к которым добавляется линеаризованное условие Дюпре—Юнга (11.1) [4]

$$\partial N/\partial e + \chi N = 0 \text{ на } \gamma_0 \tag{11.5}$$

причем $\gamma_0$, $\chi$, $e$ введены в (3.2).

Условия (11.2) — (11.4) при линеаризации сохраняют свой вид и вместе с (4.6) — (4.9), (11.5) дают три новые постановки. На решениях любой из этих задач (4.13) заменяется на

$$E^{\cdot} = -D - D' - 2R, \quad D' \equiv \int\limits_{\partial\tau_{\gamma0}} \varkappa u_i u_i dS \tag{11.6}$$

Обозначения совпадают с (4.13), однако в П (4.5) не равен нулю последний член (интеграл по $\gamma_0$).

Обобщенное вириальное соотношение (6.3) в рассматриваемых моделях сохраняет свой вид, только в функционале $X$ добавляется новое слагаемое

$$X = M^{\cdot} + G + \varphi + V, \quad V \equiv \int\limits_{\partial\tau_{\gamma0}} \varkappa\zeta_i\zeta_i dS \tag{11.7}$$

Вследствие (11.6), (11.7) также появляются новые слагаемые в равенстве (7.1) и определении $\Pi_\lambda$

$$d/dt(T_\lambda + \Pi_\lambda) = -2\lambda\,(T_\lambda - \Pi_\lambda^*) - D_\lambda - R_\lambda - D_\lambda'$$

$$D_\lambda' \equiv D' - \lambda V^{\cdot} + \lambda^2 V = \int\limits_{\partial\tau_{\gamma0}} \varkappa\,(\zeta_t - \lambda\zeta)\,dS$$

$$2\Pi_\lambda^* \equiv 2\Pi + 2\lambda A + \lambda^2 M, \ 2A \equiv G + \varphi + V$$

При этом в силу неотрицательности $D_\lambda'$ основные неравенства (7.2), (7.3) не изменяются.

В оценках (8.2), (8.3), (8.5), (8.8), (9.2) в соответствии с (11.8) изменяется только определение величины $A$ и в $I$ (8.6) добавляется интеграл по $\gamma_0$:

$$I \equiv C\left(q_\alpha q_\alpha + \int\limits_{\Gamma_0} N^2 dS + \int\limits_{\gamma_0} N^2 dl\right)$$

Таким образом, при отказе от условий прилипания жидкости на твердой границе $\partial\tau$ основные результаты разд. 8, 9 остаются справедливыми.

*Замечания.* 1°. Основные неравенства (8.5), (8.8), (9.2) имеют характер априорных оценок, поскольку соответствующие теоремы существования решений не рассматривались.

2°. Оценка для инкрементов (8.8) при отсутствии диссипации (идеальная жидкость) совпадает с полученной ранее другим способом [11].

3°. Принятое в разд. 11 условие постоянства динамического краевого угла является одной из используемых моделей [3—8]. Анализ этой проблемы не относится к целям настоящей статьи. В то же время общность приведенного рассмотрения позволяет надеяться, что гидродинамический аналог обращения теоремы Лангранжа будет иметь место и для других граничных условий на $\partial\tau$, допускающих линеаризацию и согласующихся с требованием невозрастания энергии.

4°. Один из общих качественных выводов, вытекающих из вида оценок (8.5), (8.8) состоит в том, что наличие возмущения с отрицательной потенциальной энергией (4.14) приводит к развитию неустойчивости при сколь угодно больших (но конечных) значениях диссипативных коэффициентов $\eta^{\pm}$, $\varkappa^{\pm}$, $c_{\alpha\beta}$. Другими словами, нарастание диссипативных факторов не может привести к стабилизации системы.

Авторы благодарят В. В. Пухначева и С. Я. Белова за обсуждения работы.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 439 с.
2. *Румянцев В. В.* К теории движения твердых тел с полостями, наполненными жидкостью // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 1. С. 51—66.
3. *Пухначев В. В., Солонников В. А.* К вопросу о динамическом краевом угле // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 6. С. 961—971.
4. *Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д. и др.* Гидромеханика невесомости. М.: Наука, 1976. 504 с.
5. *Дэвис С.* Задачи с линиями контакта в механике жидкости // Успехи прикладной механики. М.: Мир, 1986. С. 85—101.
6. *Де Жен П. Ж.* Смачивание: статика и динамика // Успехи физ. наук. 1987. Т. 151. Вып. 4. С. 619—681.
7. *Dussan V. E. B.* Hydrodynamic stability and instability of fluid systems with interfaces // Arch. Rat. Mech. and Anal. 1975. V. 57. № 4. P. 363—379.
8. *Dussan V. E. B., Davis S. H.* Stability in systems with moving contact lines // J. Fluid Mech. 1986. V. 173. P. 115—130.
9. *Бляшке В.* Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Энштейна. М.— Л.: ОНТИ Глав. ред. общетехн. лит. и номогр., 1935. 330 с.
10. *Чандрасекхар С.* Эллипсоидальные фигуры равновесия. М.: Мир, 1973. 288 с.
11. *Владимиров В. А., Румянцев В. В.* К обращению теоремы Лангранжа для твердого тела с полостью, содержащей идеальную жидкость // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 4. С. 608—612.
12. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976. 391 с.
13. *Мосолов П. П., Мясников В. П.* Механика жесткопластических сред. М.: Наука, 1981. 208 с.
14. *Chandrasekhar S.* Hydrodinamic and hydromagnetic stability, Oxford: Claredon Press, 1961, 652 p.
15. *Байоки К., Пухначев В. В.* Задача с односторонними ограничениями для уравнений Навье — Стокса и проблема динамического краевого угла // ПМТФ. 1990. № 2. С. 15—21.


Москва, Новосибирск

Поступила в редакцию
16.V.1989