**Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 2, 1990**

УДК 531.01


Л. И. Седов

# НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О РЕЛЯТИВИСТСКИХ ПОНЯТИЯХ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ

Существующее положение в кинематике четырехмерных римановых пространств побуждает к изложению в явном виде нижеследующих замечаний и к обобщению локальной теоремы Кориолиса на случай деформируемых сред в рамках СТО И ОТО.

**1. Координаты, системы отсчета и мировые линии.** Основной метод в теоретических исследованиях связан с применением систем координат, состоящих в приписывании каждой точке четырехмерного пространства четырех чисел (арифметизации), наделяемых различными постулируемыми геометрическими и, вообще говоря, некоторыми другими общими формулируемыми свойствами, позволяющими использовать методы и операции, разработанные в математическом анализе.

Системы координат $x^i$ или $\xi^i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ в общем случае в данном фиксированном пространстве связаны с функциями вида

$$x^i = x^i(\xi^k) \quad \text{и} \quad \xi^k = \xi^k(x^i); k, i = 1, 2, 3, 4 \tag{1.1}$$

В данном множестве точек пространства можно рассматривать координатные линии и выделять одну из координат, например в системах $\xi^i$ и $x^k$, $\xi^4$ и $x^4$, как времениподобную и считать координаты $\xi^\alpha$ и $x^\alpha$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ как пространственноподобные равноправные переменные.

В приложениях для одного и того же множества точек одну из систем координат, например $x^i$, можно назвать системой наблюдателя, а другую, $\xi^k$, при переменных $\xi^\alpha = \text{const}$ и $\xi^4 = \tau$ рассматривать как сопутствующую лагранжеву, в которой постоянные числовые значения $\xi^\alpha = \text{const}$ дают названия точек, образующих мировые линии $L$, на которых последовательные положения выделенных таким путем индивидуальных точек определяются временной координатой $\xi^4 = \tau$.

Каждой точке с фиксированными значениями трех координат $\xi^\alpha$, согласно общей формуле (1.1), отвечают законы движения индивидуальных точек в виде семейства мировых линий $L$. Аналогично можно вводить семейства мировых линий в переменных Лагранжа $x^4$ и $x^\alpha = \text{const}$, для закона движения — в системе функций $\xi^i = \psi^i(x^\alpha, \tau)$. На семействе мировых линий для $L$, данных или искомых для рассматриваемого континуума для векторных элементов $d\mathbf{r}$ произвольных семейств мировых линий $L$ при $|d\mathbf{r}| = ds$ в римановых пространствах при наличии функций (1.1), инвариантная метрика вводится аксиоматически инвариантными формулами вида

$$ds^2 = \tilde{g}_{ij}dx^idx^j = g_{ij}d\xi^id\xi^j \tag{1.2}$$

Здесь $\tilde{g}_{ij}$ и $g_{ij}$ — компоненты метрического тензора, зависящие только от координат $x^i$ или $\xi^i$, которые можно задать в любой исходной системе координат, после чего на основании функций (1.1) они полностью определяются в любой другой системе координат и соответствуют риманову пространству.

**2. Понятия о скоростях.** Модельные физические характеристики подвижных точек в четырехмерных пространствах, как правило, вводятся для индивидуализированных точек с помощью лагранжевых координат. На таком пути возникают локальные и глобальные понятия о сопутствующих мировых линиях $L$, о собственном времени $\tau$ вдоль $L$, о длине дуги $s$ вдоль $L$, о величине четырехмерной скорости $\mathbf{u} = d\mathbf{s}/(d\tau)$, направленной по касательной к $L$.

В четырехмерных псевдоримановых пространствах в ОТО и СТО в качестве основной геометрической характеристики фигурирует размерная скалярная постоянная, обычно обозначаемая через $c$ (равная величине трехмерной скорости распространения света в пустоте). В специальной системе единиц измерения без ограничений можно принять, что $c = 1$. Если на мировой линии $L$ $ds > 0$, то дальше принято, что $d\tau > 0$, поэтому при $c = 1$ в сопутствующих координатах имеют место равенства $ds = d\tau$ и $|\mathbf{u}| = ds/d\tau = 1$. Если сопутствующая мировая линия $L$ нулевая, то на $L$ $ds = d\tau = 0$. Нулевые сопутствующие мировые линии отвечают, в частности, движению фотонов в пустоте с пространственной трехмерной скоростью $\mathbf{v} = \mathbf{c}$ в любой локальной или глобальной системах отсчета.

В общем случае соответствующий трехмерный вектор скорости определяется формулой $\mathbf{v} = d\mathbf{l}/d\tau$, где бесконечно малый вектор $d\mathbf{l}$ является «пространственной» составляющей вектора $d\mathbf{s}$, входящего в определение вектора четырехмерной скорости $\mathbf{u} = d\mathbf{s}/d\tau$ в точках мировой линии $L$ и направленной по касательной к $L$.

**3. Универсальная каноническая форма метрики в координатах Лагранжа.** В общем случае для любого риманова пространства как в СТО, так и в ОТО на ненулевых линиях $L$ можно указать глобальное преобразование вида (1.1) с переходом от любых координат $x^i$ к координатам Лагранжа $\xi^1$, $\xi^2$, $\xi^3$, $\tau$, в которых любая метрическая форма приобретает канонический вид

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 + 2c g_{\alpha 4} d\xi^\alpha d\tau + g_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta. \tag{3.1}$$

Иначе говоря, можно превратить компоненту $g_{44}(\xi^\alpha, \tau)$ в величину $c^2$ или в единицу и таким путем ввести во всем пространстве переменную координату $\tau$ и ввести в каждой точке четырехмерного пространства только девять компонент метрики $g_{\alpha 4}(\xi^\alpha, \tau)$ и $g_{\alpha\beta}(\xi^\alpha, \tau)$, от выбора которых зависит метрика соответствующего псевдориманова пространства. Примером такого преобразования могут служить формулы

$$x^1 = \xi^1, \quad x^2 = \xi^2, \quad x^3 = \xi^3$$

$$x^4 = \int_{\xi_0^4}^{\xi^4} [\tilde{g}_{44}(\xi^\alpha, \xi^4)]^{1/2} d\xi^4 = \varphi(\xi^\alpha, \xi^4, \xi_0^4) \tag{3.2}$$

После преобразования (3.1) получится

$$g_{\alpha 4} = \tilde{g}_{\alpha 4} - \frac{\partial\varphi}{\partial\xi^\alpha}, \quad g_{\alpha\beta} = \tilde{g}_{\alpha\beta} + \frac{\partial\varphi}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi^\beta} -$$

$$-\frac{\tilde{g}_{\alpha 4}}{\sqrt{\tilde{g}_{44}}}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi^\beta} - \frac{\tilde{g}_{\beta 4}}{\sqrt{\tilde{g}_{44}}}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi^\alpha}$$

В канонической форме (3.1) значение переменной координаты $\tau = \xi^4$, определенной во всех точках пространства, связано с выбором семейства преобразований (1.1) как законов движения индивидуальных точек $\xi^\alpha = \text{const}$ в лагранжевой форме в виде (1.1) с лагранжевыми координатами $\xi^\alpha$, $\tau$. Таким путем для семейства мировых линий $L$ после выбора канонической формы метрики (3.1) устанавливается понятие о глобальном времени, отвечающем семейству $L$.

Легко видеть, что каноническая форма метрики в сопутствующих координатах Лагранжа $\xi^\alpha$, $\tau$ сохраняет свою форму при преобразованиях (1.1) вида

$$\tau' = \tau + \psi(\xi^\alpha) \text{ и } \xi'^\alpha = f^\alpha(\xi^\beta) \tag{3.3}$$

На линиях $L$ w $L'$ имеем $d\tau' = d\tau$ при $\xi^\alpha = \text{const}$ и соответственно $\xi'^\alpha = \text{const}$, верны равенства $g_{44}' = g_{44} = 1$, причем линии $L$ переходят в линии $L'$. Компоненты метрического тензора $g_{\alpha 4}$ и $g_{\alpha\beta}$ и тетрады базисов $э_i$ и $э_i'$ изменяются.

Таким образом, метрику псевдориманова пространства всегда можно привести глобально к виду (3.1), где через $\xi^\alpha$ и $\tau$ обозначены четыре координаты, которые по своему существу из-за псевдоримановости матрики неравноправны, вопреки бытующим в литературе заявлениям.

Для данного семейства произвольных мировых линий координата $\tau$ — это одна из четырех глобальных координат с алгебраическим смыслом, связанным непосредственно с видом метрики пространства.

Только для семейств $L$ координатных мировых линий, на которых $\xi^\alpha = \text{const}$ и, следовательно, $ds^2 = c^2 d\tau^2$, переменной координате $\tau$ можно приписать смысл собственного времени на таких вообще произвольных координатных мировых линиях с уравнениями $\xi^\alpha = \text{const}$ при $\alpha = 1, 2, 3$, которые, в частности, могут быть геодезическими.

В одном и том же фиксированном пространстве можно рассматривать метрику в форме (3.1) для разных семейств $L$ и соответственно для разных глобальных времен $\tau$.

Если два семейства $L_1$ и $L_2$ получаются друг из друга преобразованием координат (3.3), то в соответствующих точках верны равенства

$$d\tau_1 = d\tau_2$$

Если преобразование от семейства наблюдателя $L_2$ с глобальным временем $\tau_2$ к семейству $L_1$ с собственным глобальным временем $\tau_1$, то в точках $M$ пересечения $L_1$ и $L_2$ получится, что

$$d\tau_1 \neq d\tau_2$$

В общем случае для метрики в точках $M$ для неголономно определенных тетрад можно написать

$$\frac{ds_1^2}{c^2} = d\tau_1^2 - \left|\frac{d\mathbf{l}_1}{d\tau_1}\right|^2 d\tau_1^2 \text{ и } \frac{ds_2^2}{c^2} = d\tau_2^2 - \left|\frac{d\mathbf{l}_2}{d\tau_2}\right|^2 d\tau_2^2$$

$ds_1$ и $ds_2$ отвечают фиксированному пространству, но разным семействам $L$ и соответствующим $d\tau$.

Если $d\tau_1$ — приращение собственного времени на $L_1$, то $\mathbf{v}_1 = d\mathbf{l}_1/d\tau_1 = 0$, а на $L_2$ $c^{-1}d\mathbf{l}_2/d\tau_2 = \mathbf{v}_2/c \neq 0$. В размерном виде получим:

$$d\tau_1 = d\tau_2 \sqrt{1 - |\mathbf{v}_2|^2/c^2}$$

Здесь $d\tau_1$ — элемент собственного времени на мировой линии $L_1$, а $d\tau_2$ — соответствующий элемент времени для наблюдателя на линии $L_2$.

Если индексы 1 и 2 поменяются местами, то время $\tau_2$ наблюдателя можно посчитать собственным, а время $\tau_1'$ на $L_1$ временем наблюдателя на $L_1$.

Для фиксированного пространства и соответствующей фиксированной общей ситуации в зависимости от разных равноправных точек зрения имеем справедливые в теории и в опытах инвариантные неравенства: либо $d\tau_1 < d\tau_2$, либо $d\tau_2 < d\tau_1'$ на фиксированных мировых линиях $L_1$ и $L_2$, причем эти неравенства сохраняются независимо от направления трехмерных скоростей $\mathbf{v}_1$ или $\mathbf{v}_2$.

Нередко некоторые времениподобные координаты в общей формуле для метрики (1.2) обозначаются буквой $t$ и трактуются как время; такое толкование возможно, когда после преобразования координат метрика (1.2) приводится к виду (3.1) и можно отождествить $t$ и $\tau$. Как известно, например, в одном и том же пространстве, но в разных координатах в метрике поля Шварцшильда или в метрике поля Леметра одного и того же пространства Римана имеем

$$ds^2 = (1 - r_g/r)\, c^2dt^2 - (1 - r_g/r)^{-1}dr^2 - r^2d\Omega = c^2d\tau^2 - (r_g/r)\, dR^2 - r^2d\Omega$$

где

$$r = [{}^3/_2\,(R - c\tau)]^{2/3} r_g^{1/3},\quad d\Omega = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$$

Очевидно, что обе метрики отвечают одной и той же системе геодезических. В этом случае для некоторых геодезических планетных орбит можно зафиксировать $r = \mathrm{const}$; в этом случае, в частности, будем иметь

$$\tau = kt,\ k = (1 - r_g/r)^{1/2} = \mathrm{const}$$

С другой стороны, кроме планетных орбит имеются геодезические, проходящие мимо горизонта черной дыры или пересекающие черную дыру. Каждую из этих геодезических можно рассматривать как мировую линию малой частицы в метрике Шварцшильда или Леметра с соответствующей координатой $\tau$. Переменную $t$ нельзя рассматривать как время, изменяющееся по геодезическим, пересекающим горизонт черной дыры. Простой анализ позволяет установить, что в метрике Леметра собственное время $\tau$ на геодезических, пересекающих горизонт черной дыры, значение времени $\tau_1 - \tau_0$ конечно, где $\tau_0$ — отметка времени в некоторой точке на геодезической, а $\tau_1$ — в точке пересечения взятой геодезической с горизонтом черной дыры.

Предложенное рассуждение углубляет суть понятия времени и вместе с этим акцентирует неправильные высказывания некоторых авторов о времени падения частиц на черную дыру, бытующие в монографиях и учебниках [1].

**4. Тетрады базисных векторов.** После введения в каждой точке пространства координат и векторов базисов так, чтобы для любого бесконечно малого вектора $d\mathbf{r}$ с контравариантными компонентами $dx^i$, $dy^i$ или $d\xi^i$ можно было получить в любой системе координат инвариантные равенства

$$d\mathbf{r} = dx^i\mathbf{э}_i' = dy^i\mathbf{э}_i'' = d\xi^i\mathbf{э}_i \tag{4.1}$$

при суммировании по индексу $i = 1, 2, 3, 4$. При этом в сопутствующей метрике (3.1) вдоль $L$ при $d\xi^\alpha = 0$ имеем

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{s} = cd\tau\mathbf{э}_4 \tag{4.2}$$

[1] Полезно еще отметить, что огибающие системы геодезических мировых линий нельзя рассматривать как геодезические мировые линии индивидуально определенных точек.

и, следовательно, вдоль $L$ из (3.1) верны равенства $d\mathbf{r} = d\mathbf{s}$, а при $c = 1$ имеем $|d\mathbf{r}| = |d\mathbf{s}| = d\tau$.

Из формул (4.1), (1.1) и (3.1) следует, что $g_{ij}(x^k) = \mathfrak{э}_i'\mathfrak{э}_j'$, $g_{ij}''(y^k) = \mathfrak{э}_i''\mathfrak{э}_j''$ и на $L$ из (3.1) $g_{44} = 1$ при $c = 1$. Кроме этого, из формул тензорного преобразования векторов базиса следуют формулы преобразования для компонент $g_{ij}$ метрического тензора в фиксированном пространстве Римана. Задание в каждой точке риманова пространства базисных тетрад в разных глобальных системах координат определяет собой локальную метрику. В фиксированном пространстве Римана поле базисных векторов вообще не может быть произвольным, так как, например, с помощью компонент метрического тензора можно образовать дифференциальные инварианты в римановых пространствах, независимые от выбора систем координат. Однако в общих римановых пространствах можно вводить и любые характеристики на мировых линиях $L$ на основании специальных систем неголономных локальных базисных тетрад в точках риманова пространства.

Ниже будет показано, что определение разными наблюдателями векторов ускорений на мировых линиях $L$ связано с введением разными наблюдателями вдоль $L$ разных неголономных тетрад.

5. **Возможные спецификации произвольных систем неголономных тетрад.** Пусть в любом пространстве и произвольном базисе $\mathfrak{э}_i$ в каждой точке определен вектор $\mathbf{A}$ в голономной или неголономной системе базисов $\mathfrak{э}_i$ и пусть в данной системе в точках пространства производятся линейные преобразования координат от $x^i$ к $y^k$: прямое с коэффициентами $\mathscr{L} = \| a_{\cdot i}^{k\cdot} \|$ и обратное $\mathscr{L}^{-1} = \| b_{\cdot j}^{i\cdot} \|$ от $y^k$ к $x_i$, когда $a^{k\cdot}_{\cdot i} b^{i\cdot}_{\cdot j} = \delta_j^k$, причем коэффициенты $a_{\cdot i}^{k\cdot}$ могут быть произвольными функциями $\xi^\alpha$, $\tau$ и, возможно, еще и любых других переменных. Так как $\mathbf{A}$ — вектор и $\mathfrak{э}_i$ — векторы, то можно написать

$$\mathbf{A} = A^i\mathfrak{э}_i = A^i a_l^k b_i^l \mathfrak{э}_k = A'^k \mathfrak{э}_k'$$

В связи с этим очевидно, что в каждой точке пространства для невырожденных преобразований можно полагать, что с помощью линейных алгебраических преобразований всегда можно установить, что неголономные базисы представляют собой ортонормированные базисы $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}^i$ при $\mathbf{e}_i\mathbf{e}^i = 1$ и $\mathbf{e}^i\mathbf{e}_j = 0$ при $i \neq j$. Очевидно, такое же положение имеет место, когда первоначальные компоненты вектора базисов контравариантны, а компоненты вектора $\mathbf{A}$ ковариантны.

Вместе с этим также ясно, что если вектор $\mathbf{A}$ и базисы $\mathfrak{э}_i$ кроме координат $\xi^\alpha$ зависят еще от скалярных переменных $\mu$, то производные $\partial\mathbf{A}/\partial\mu$ представляют собой векторы и производные $\partial\mathfrak{э}_i/\partial\mu$ также являются векторами.

Собственное глобальное время $\tau$ в метрике (3.1) для семейства мировых линий $L$ в рамках метрики (3.1) и преобразований (1.1) образует скалярное поле для $\tau$, а три компоненты $g_{\alpha 4}(\xi^\alpha, \tau)$ — векторное поле, которое характеризуют риманово пространство и семейства линий $L$. Эти обстоятельства вместе со следующей ниже теорией ускорений послужат важной механической интерпретацией свойств римановых пространств с помощью канонической формы метрики (3.1) в переменных Лагранжа.

В ортонормированных базисах, изменяющихся в пространстве и на точках мировых линий $L$, удобно обнаруживать инвариантные свойства и характеристики наблюдателей и яснее выявить сущность инерциальных наблюдателей, которые могут вводиться в точках $L$ аксиоматически локальными условиями $\mathfrak{э}_i = \text{const}$ или $\mathbf{e}_i = \text{const}$, или соответственно $\mathfrak{э}^i = \text{const}$, справедливых одновременно.

Из этих локально возможных определений следует, что отвечающие им локальные инерциальные тетрады в искривленных пространствах Римана не могут быть голономными, так как тензор кривизны Римана может быть отличен от нуля. В последнем случае невозможно ввести глобальные инерциальные координаты, подобные декартовым. Глобальные инерциальные координаты можно ввести только в евклидовых пространствах и в пространствах Минковского.

**6. Определение соответствующих векторов четырехмерной скорости и ускорения.** В метрике (3.1) на сопутствующих линиях $L$ для векторов $\mathbf{u}$ выполняются формулы в компонентах

$$u^4 = 1,\ u^\alpha = 0 \text{ и } u_4 = 1,\ u_\alpha = g_{\alpha 4}\ (\xi^\alpha, \tau) \tag{6.1}$$

и в базисах $\mathfrak{э}^k$ на рассматриваемых $L$

$$\mathbf{u} = \mathfrak{э}_4 = \mathfrak{э}^4 + g_{\alpha 4}(\xi^\alpha, \tau)\, \mathfrak{э}^\alpha \tag{6.2}$$

Формула (6.2) справедлива в разных четырехмерных пространствах Римана, в которых определяемое поле четырехмерных скоростей $\mathbf{u}$ при $\mathbf{u} = \mathfrak{э}_4$ и соответствующие мировые линии $L$ могут образовывать различные семейства с наложенной метрикой вида (3.1) в координатах Лагранжа $\xi^\alpha$, $\tau$.

В такой постановке вопроса для частной производной по собственному глобальному сопутствующему времени

$$\partial \mathbf{u}/\partial \tau = \mathbf{a}_{\text{rel}} \tag{6.3}$$

получим векторы относительного ускорения на мировых линиях $L$.

Так как вектор $\mathbf{u} = \mathfrak{э}_4$ единичный и направлен по касательным на $L$, то вектор ускорения $\mathbf{a}_{\text{rel}}$ всегда перпендикулярен к единичному базису $\mathfrak{э}_4 = \mathbf{u}$.

Согласно формуле (6.2) векторы относительного ускорения можно выразить через вообще переменные компоненты метрики $g_{k4}\ (\xi^\alpha, \tau)$ и контравариантные векторы базиса $\mathfrak{э}^k\ (\xi^\alpha, \tau)$, которые рассматриваются в точках заданных или искомых мировых линий $L$.

В соотношениях (6.2) перечисленные функции и мировые линии связаны между собой, однако в каждом фиксированном римановом пространстве могут вводиться различным образом. В зависимости от $\mathfrak{э}_k$ и $\mathfrak{э}^k$ в соответствии с этим можно рассматривать для разных семейств мировых линий $L$ различные собственные глобальные переменные времена $\tau$ и ускорения $\mathbf{a}_{\text{rel}}$.

Очевидно, что приведение метрики к виду (3.1) применяется для добытия именно собственного глобального времени $\tau$, которое фигурирует в определении скоростей и ускорений в специальной и общей теории относительности.

Вместе с этим значение компоненты вектора $g_{\alpha 4}$ в метрике (3.1) очень важны и выявляет физический смысл подозреваемых компонент четырехмерного вектора $\mathbf{u}\,(\tau)$ с ковариантными компонентами $g_{\alpha 4}\ (\xi^\alpha, \tau) = u_\alpha$ на задаваемых вообще переменных вдоль мировых линий $L$ и контравариантных базисах в тетрадах $\mathfrak{э}^i$ в фиксированных псевдоримановых пространствах.

В сопутствующих координатах в силу равенств (6.1) и (6.2) возможно в каждой точке мировой линии $L$ надо пользоваться локально как огибающей выбранными базисами $\mathfrak{э}_4 = \mathbf{u}$ и переменными $g_{k4}(\xi^\alpha, \tau) = u_k(\xi^\alpha, \tau)$ с различными тетрадными применяемыми базисами $\mathfrak{э}^k$ при соблюдении равенства (6.2).

Дифференцируя по $\tau$ равенства (6.2) вдоль $L$ в согласии с описанной выше в предыдущем пункте в голономном базисе $\hat{\mathfrak{э}}^i$ и в неголономном ортонормированном базисе $\mathbf{e}^i$ можно написать

$$\frac{\partial \mathfrak{э}_4}{\partial \tau} = \hat{g}_{k4}\frac{\partial \hat{\mathfrak{э}}^k}{\partial \tau} + \frac{\partial \hat{g}_{k4}}{\partial \tau}\hat{\mathfrak{э}}^k = g_{k4}\frac{\partial \mathbf{e}^k}{\partial \tau} + \frac{\partial g_{k4}}{\partial \tau}\mathbf{e}^k \tag{6.4}$$

Легко видеть, что в метрике вида (3.1) в каждой точке рассматриваемой мировой линии $L$ верны следующие инвариантные соотношения:

1) $\hat{g}_{44} = g_{44} = 1$ причем по построению $\mathfrak{э}_4 = \mathbf{e}^4 = \mathfrak{э}^4 + g_{\alpha 4}\mathfrak{э}^\alpha$, при неравенстве $\partial \mathfrak{э}_4/\partial \tau \neq \partial\, \mathbf{e}^4/\partial \tau$;

2) из фиксирования риманова пространства следует, что

$$\partial \hat{\mathfrak{э}}^k/\partial \tau = -\hat{\Gamma}^k_{4l}\hat{\mathfrak{э}}^l \quad \text{и} \quad \partial \mathbf{e}^k/\partial \tau = -\Gamma^k_{4l}\mathbf{e}^l$$

поэтому получим, что

3) $\hat{g}_{k4}\partial \hat{\mathfrak{э}}^k/\partial \tau = g_{k4}\partial \mathbf{e}^k/\partial \tau = 0$.

В силу равенства (6.4) следует формула для ускорения

$$\partial \hat{g}_{\alpha 4}/\partial \tau \hat{\mathfrak{э}}^\alpha = \partial g_{\alpha 4}/\partial \tau \mathbf{e}^\alpha$$

Перпендикулярность ускорения к вектору $\mathfrak{э}_4$ выполняется, так как $\mathfrak{э}_4 = \mathbf{e}^4$, а векторы $\mathbf{e}^\alpha$ перпендикулярны к $\mathbf{e}^4$ в силу ортонормированности.

Таким образом в сопутствующей лагранжевой системе в соответствии с определением собственной системы координат на любой линии $L$, отвечающей уравнениям $\xi^\alpha = \text{const}$, для относительного ускорения верна формула

$$\mathbf{a}_{\text{rel}} = \partial \hat{g}_{\alpha 4}/\partial \tau \mathfrak{э}^\alpha \text{ при } \mathfrak{э}^\alpha \text{ — вообще переменных} \tag{6.5}$$

Подчеркнем, что в общем случае на $L$ в сопутствующей системе имеем

$$ds^2 = c^2 d\tau^2, \quad \mathbf{u} = \mathfrak{э}_4 \text{ и } g_{k4} = \mathfrak{э}_k \mathfrak{э}_4 \tag{6.6}$$

которые могут, вообще говоря, задаваться заранее [2].

В связи с равенством (6.5) ясно, что ускорение $\mathbf{a}_{\text{rel}}$ на $L$ определяется заданием значений компонент $g_{\alpha 4}$, которые определяются заданием базисных тетрад $\mathfrak{э}_k$ и $\mathfrak{э}^k$ в точках мировых линий $L$.

Из формулы (6.5) следует, что ускорение $\mathbf{a}_{\text{rel}}$ зависит существенным образом от векторов базисов в тетрадах наблюдателя $\mathfrak{э}^k$ или $\mathfrak{э}_k$, которые могут быть вдоль $L$ переменными и которые выражаются через компоненты $g_{k4}$ голономным или неголономным образом.

Если все базисы $\mathfrak{э}_k$ и $\mathfrak{э}^k$ постоянны и, следовательно, независимы от времени $\tau$, то компоненты $g_{\alpha 4}$ тоже постоянны и поэтому соответствующее ускорение будет равно нулю. В этом случае соответственные линии $L$ из (6.5) и (6.8) геодезические [2].

$$\mathbf{a}_{\text{rel}} = \mathbf{a}_{\text{abs}} = 0 \tag{6.7}$$

Если компоненты $g_{44} = 1$ в метрике (3.1), то $g_{\alpha 4}$ отличные от нуля и опре-

---

[2] Очевидно, что любые семейства $L$ в соответственно наложенной метрике при $g_{\alpha 4}(\xi^\alpha)$ можно рассматривать как семейство геодезических, для этого достаточно взять базисы $\mathfrak{э}^k$ и компоненты $g_{k4}$ вдоль $L$ постоянными.

деленные, вообще говоря, неголономно компоненты $g_{\alpha 4}$ вообще переменны только за счет $э_4(\tau)$ при постоянных базисах $э_\alpha$.

В этих случаях на мировой линии $L$ соответствующее ускорение называется абсолютным. Для абсолютных ускорений на мировой линии можно написать

$$\mathbf{a}_{\mathrm{rel}} = \mathbf{a}_{\mathrm{abs}} = \frac{\partial g_{\alpha 4}(\xi^\alpha, \tau)}{\partial \tau} э^\alpha \text{ при } э^\alpha = \mathrm{const} \tag{6.8}$$

В общем случае можно принять, что базисы $э_\alpha$, $э^\alpha$ или $\mathbf{e}^\alpha$ и $\mathbf{e}_\alpha$ образуют неголономную ортонормированную систему тетрад на $L$, позволяющую интерпретировать ортонормированную систему тетрадных векторов $\mathbf{e}_\alpha$ и их производные по $\tau$ как характеристики тетрад наблюдателя, обусловленные его ускорением и трехмерными тензорами скоростей деформации и вращения.

Если в локальных тетрадах по определению базисы $э_\alpha$ и соответственно $э^\alpha$ по времени $\tau$ постоянны, то такие модельные тетрады часто вводятся, а соответствующие наблюдатели с постоянными тетрадными базисами называются инерциальными. Для инерциальных тетрад в сопутствующих координатах из (6.2) вектор ускорения точек на линии $L$ определяется формулой (6.8), так же как у инерциального наблюдателя. В каждой точке пространства инерциальные тетрады можно вводить аксиоматически неоднозначным способом с точностью до преобразования Лоренца в СТО и ОТО, которые не влияют на значения величины вектора ускорения.

Ускорения в относительных инерциальных системах отсчета, определенные с точностью до преобразования Лоренца в теории относительности и с точностью до преобразования Галилея в ньютоновской механике, имеют особо важное физическое значение.

Формулы (6.5) и (6.8) отвечают сопутствующей системе отсчета с метрикой в форме (3.1) для локальных вообще неголономно определенных подвижных тетрад, взятых в пространстве Римана.

В данном пространстве пересчет характеристик движений от сопутствующей системы к любой другой заданной системе отсчета, в общем случае, представляет собой задачу теории инерциальной навигации [3].

В связи с этим стоит подчеркнуть, что для заданной индивидуальной точки тетрады $э^k$ и мировые линии $L$ в теории сплошных сред в рамках ньютоновской, а также и в релятивистской механике, могут быть произвольными. Однако, имея в виду уравнения сплошности, следует отметить, что в фиксированном пространстве Римана при учете возможных преобразований компонент метрического тензора объемное распределение тетрад $э^i$ и семейства мировых линий $L$ не могут быть произвольными в силу дифференциальных уравнений сплошности, подобных уравнениям Сен-Венана для ньютоновской механики и тождеств Бьянки в ОТО.

Выше установлена связь между $\mathbf{a}_{\mathrm{rel}}$ и производными по $\tau$ от наблюдателя $\partial g_{\alpha 4}(\xi, \tau)$. В приложениях можно прямо и непосредственно задавать или искать $\mathbf{a}_{\mathrm{rel}}$, исходя из дополнительных динамических или кинематических соображений или через производные $\partial g^{*}_{\alpha 4}/\partial \tau$, для задания которых можно опираться на эквивалентные им механические соображения о данных базисов тетрад наблюдателей.

---

[3] *Седов Л. И., Цыпкин А. Г.* Основы макроскопических теорий гравитации и электромагнетизма. М.: Физматгиз, 1989. 272 с. (см. с. 92—97).

**Последовательность базисов $э^k(\tau)$ и $e^k(\tau)$ на $L$, определяющая систему наблюдателя, можно задавать непрерывно произвольно, она может относиться к разным римановым пространствам.**

Очевидно, что если на мировых линиях $L$ компоненты $g_{\alpha 4} = 0$ или зависят только от $\xi^\alpha$, т. е. $g_{\alpha 4}(\xi^\alpha)$, то согласно (6.5) получается, что $a_{abs} = 0$, и, следовательно, семейство соответствующих мировых линий $L$ составлено из геодезических, а если $g_{\alpha 4} = 0$, то глобальная метрика (3.1) в конечных объемах пространства имеет синхронный вид

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 + g_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \tag{6.9}$$

Для синхронной метрики семейство сопутствующих линий состоит из геодезических, так как на всех мировых линиях абсолютные ускорения равны нулю из-за равенств $g_{\alpha 4} = 0$. Тем не менее, глобальное семейство мировых линий $L$ в этом случае, вообще говоря, нельзя назвать инерциальным семейством, подобным инерциальному семейству глобальных координатных линий $\xi^\alpha = \text{const}$ в декартовых системах в евклидовых пространствах и в пространстве Минковского, так как в общем случае в римановых пространствах во втором члене формулы (6.9) трехмерную матрицу с компонентами $g_{\alpha\beta}(\xi^\alpha, \tau)$, в частности, нельзя привести глобальным преобразованием координат к диагональному виду сразу во всех точках семейства геодезических мировых линий $L$.

Вопросы, касающиеся конструкции глобальных синхронных систем отсчета в римановых пространствах, будут опубликованы в отдельной работе.

**7. Обобщение формулы Кориолиса на релятивистские модели пространства и времени в локальных теориях движений с ускорениями, с деформацией и вращениями.** В локальном трехмерном пространстве $\Sigma$, в точках на мировой линии $L$ рассмотрим в некоторой точке $M$ три бесконечно малых пространственных вектора, связанных равенством

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}_2 \tag{7.1}$$

и пусть $d\tau$ — элемент глобального собственного времени на мировой линии $L$ в точке $M$, причем приращения $d\mathbf{r}$, $d\mathbf{r}_1$, $d\mathbf{r}_2$ взяты в трехмерном пространстве. В данной постановке локальная величина $d\tau$ вполне аналогична элементу абсолютного времени в ньютоновской механике, но является собственным временем в рамках сопутствующей метрики (3.1). После деления равенства (7.1) на $d\tau$ из (7.1) можно ввести аналогично ньютоновской механике трехмерные скорости с соответствующими названиями согласно равенству

$$\mathbf{v}_{abs} = \mathbf{v}_{tr} + \mathbf{v}_{rel} \tag{7.2}$$

Если ввести вместо общего одного и того же времени с элементом $d\tau$ соответственно собственные времена $d\tau_{abs}$, $d\tau_{tr}$, $d\tau_{rel}$, то равенство (7.2) не будет выполняться. Далее в понятиях об абсолютных, переносных и относительных скоростях будем подразумевать векторы скорости, фигурирующие в равенстве (7.2). При наличии равенства (7.2) можно рассмотреть его следствие, когда ускорения для $d\mathbf{r}_{abs}$ и $d\mathbf{r}_{tr}$ определены по отношению к одной и той же системе отсчета, например инерциальной системе отсчета, а ускорение для $d\mathbf{r}_{rel}$ определяется относительно системы наблюдателя, вмороженной в переносную систему отсчета (например, в жидкую среду).

Таким образом, абсолютное движение и переносное движение точек можно определять относительно локальных инерциальных тетрад, а относительные ускорения — по отношению к вмороженным тетрадам наблюдателя, движущегося вместе с вмороженными тетрадами систем отсчета, с учетом ускорений деформацией и вращения тетрад в переносном движении. В классической ньютоновской механике подразумевается, что вмороженная переносная система отсчета связана с твердым телом, и в этом случае устанавливается формула Кориолиса.

Аналогичная формула для деформируемых систем отсчета в переносном движении в ньютоновской и релятивистской теории в усложненном виде получается аналогичным способом; соответствующий вывод может быть распространен на СТО и ОТО [4].

Ниже воспроизведем необходимые выводы, исходя из формулы (7.2)

$$\mathbf{a}_{\mathrm{abs}} = \frac{\partial \mathbf{v}(\xi^\alpha, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial v^\alpha_{\mathrm{abs}}}{\partial \tau}\,\mathbf{э}_\alpha + v^\beta_{\mathrm{abs}} \nabla_\beta v^\alpha_{\mathrm{abs}}\,\mathbf{э}_\alpha$$

Эта формула сохраняет свой вид и в случае, когда рассматриваются ускорения относительно неинерциального наблюдателя, если вместо базисов $\mathbf{э}_\alpha$ взять базисы, отвечающие тетраде наблюдателя.

Рассмотрим теперь различные ускорения для подвижной точки $M$, представляющие собой производные по времени $\tau$ от введенных векторов скорости.

Ниже следует вывод обобщенной формулы Кориолиса с учетом произвольности свойств переносного движения как в рамках ньютоновской механики, так и в СТО и ОТО.

На основе введенных определений скоростей в равенстве (7.1) рассмотрим системы отсчета в локальном трехмерном объеме $\Sigma$ на мировой линии $L$ в близких точках $M$ и $M'$ на $L$, отвечающих моментам времени $\tau$ и $\tau + d\tau$ в пределах при $d\tau \to 0$.

Введем соответствующие координатные базисы.

1°. Основная локальная система наблюдателя (по смыслу — инерциальная) с координатами $x^\alpha$ и базисами $\mathbf{э}_\alpha = \mathrm{const}$ и со скоростью $\mathbf{v}_{\mathrm{abs}} = \partial \mathbf{r}/\partial \tau$, где $\tau$ — собственное время на $L$.

2°. Переносная подвижная система, вращающаяся и деформирующаяся с координатами $y^\alpha$ и базисами $\hat{\mathbf{э}}_\alpha$, переменными относительно $\mathbf{э}_\alpha$, со скоростью $\mathbf{v}_{\mathrm{tr}} = \partial \mathbf{r}_1/\partial \tau$ в системе координат $x^\alpha$, причем вектор скорости имеет компоненты $v_{\mathrm{tr}}{}^\alpha$ в базисах $\mathbf{э}_\alpha$ и $\hat{v}_{\mathrm{tr}}{}^\alpha$ в базисах $\hat{\mathbf{э}}^\alpha$.

3°. Относительное движение со скоростью $\mathbf{v}_{\mathrm{rel}} = \partial \mathbf{r}_2/\partial \tau = \hat{v}^\alpha \hat{\mathbf{э}}_\alpha$, компоненты которой можно рассматривать как в тетраде $\hat{\mathbf{э}}_\alpha$ с компонентами $\hat{v}^\alpha$ в $\hat{\mathbf{э}}_\alpha$, так и в тетраде $\mathbf{э}_\alpha$ с компонентами $\mathbf{v}^\alpha_{\mathrm{rel}}$. При вычислении ускорений результаты можно представить в любых базисах и считать их совпадающими в рассматриваемый момент времени. Однако для каждого ускорения потребуется учесть различия в производных от векторов базиса по времени $\tau$. Для абсолютного ускорения в базисе $\mathbf{э}_\alpha$ запишем

$$\mathbf{a}_{\mathrm{abs}} = \frac{d^2 \mathbf{r}(x^\alpha, \tau)}{\partial \tau^2} = \frac{d v^\alpha_{\mathrm{abs}} \mathbf{э}_\alpha}{d\tau} = \left(\frac{\partial v^\alpha_{\mathrm{abs}}}{\partial \tau} + v^\beta_{\mathrm{abs}} \nabla_\beta v^\alpha_{\mathrm{abs}}\right) \mathbf{э}_\alpha \tag{7.3}$$

---

[4] Более подробные выводы в криволинейных координатах опубликованы в работе *Седов Л. И.* О сложении движений относительно деформируемых систем отсчета // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 1. С. 175—177.

Из соотношений

$$v_{\rm rel}^{\alpha}=\frac{\partial y^{\alpha}}{\partial\tau},\quad \mathbf{a}_{\rm rel}=\frac{d\hat{v}_{\rm rel}^{\alpha}}{d\tau}\,\hat{\mathbf{э}}_{\alpha}+\hat{v}_{\rm rel}^{\alpha}\frac{d\hat{\mathbf{э}}_{\alpha}}{d\tau}=$$

$$=\left(\frac{\partial\hat{\mathbf{v}}_{\rm rel}}{\partial\tau}+\hat{v}_{\rm rel}^{\beta}\nabla_{\beta}\hat{v}_{\rm rel}^{\alpha}\right)\hat{\mathbf{э}}_{\alpha}+\hat{v}_{\rm rel}^{\alpha}\frac{\partial\mathbf{v}_{\rm tr}}{\partial y^{\alpha}} \tag{7.4}$$

следует равенство

$$\mathbf{a}_{\rm rel}=a_{\rm rel}^{\alpha}\hat{\mathbf{э}}_{\alpha}+\hat{v}_{\rm rel}^{\alpha}\hat{\nabla}_{\alpha}\hat{v}_{\rm tr}^{\beta}\hat{\mathbf{э}}_{\beta}$$

которое можно переписать после преобразования второго члена в базисах $\mathbf{э}_{\beta}$ в виде

$$\mathbf{a}_{\rm rel}\big|_{\mathbf{э}_{\alpha}=\rm const}=\mathbf{a}_{\rm rel}\big|_{\hat{\mathbf{э}}_{\alpha}=\rm const}+v^{\alpha}\left(\nabla_{\alpha}v_{\rm tr\,\beta}\right)\mathbf{э}^{\beta} \tag{7.5}$$

Далее, можно написать с учетом (7.4)

$$\mathbf{a}_{\rm tr}\big|_{\mathbf{э}_{\alpha}=\rm const}=\mathbf{a}_{\rm tr}\big|_{\hat{\mathbf{э}}_{\alpha}=\rm const}+\frac{\partial\mathbf{v}_{\rm tr}}{\partial y^{\alpha}}\frac{\partial y^{\alpha}}{\partial\tau}\bigg|_{\hat{\mathbf{э}}_{\alpha}=\rm const}+v_{\rm rel}^{\alpha}\left(\nabla_{\alpha}v_{\rm tr\,\beta}\right)\mathbf{э}^{\beta}. \tag{7.6}$$

Дифференцируя равенство (7.2) по $\tau$ с точки зрения наблюдателя с базисом $\mathbf{э}_{\alpha}$ (считая их инерциальными), найдем

$$\mathbf{a}_{\rm abs}=\mathbf{a}_{\rm tr}\big|_{\hat{\mathbf{э}}_{\alpha}=\rm const}+\mathbf{a}_{\rm rel}\big|_{\hat{\mathbf{э}}_{\alpha}=\rm const}+2v_{\rm rel}^{\alpha}\nabla_{\alpha}v_{\rm tr\,\beta}\mathbf{э}^{\beta} \tag{7.7}$$

Формула (7.7) представляет собой обобщение известной формулы Кориолиса, которая устанавливается в ньютоновской механике и выводится в декартовых системах координат с ортонормированными базисами $\mathbf{э}_{\alpha}$ и $\hat{\mathbf{э}}_{\alpha}$.

Формула (7.7) справедлива в СТО и ОТО в любых криволинейных координатах.

Если воспользоваться равенством

$$\nabla_{\alpha}v_{\rm tr\,\beta}={}^1\!/_2\left(\nabla_{\alpha}v_{\beta}+\nabla_{\beta}v_{\alpha}\right)+{}^1\!/_2\left(\nabla_{\alpha}v_{\beta}-\nabla_{\beta}v_{\alpha}\right)=e_{\alpha\beta}+\omega_{\alpha\beta}$$

где $e_{\alpha\beta}$ — компоненты скоростей деформации, а $\omega_{\alpha\beta}$ — компоненты тензора вращения в переносном движении в объеме $\Sigma$, то обобщенную формулу Кориолиса (7.7) можно переписать в виде

$$\mathbf{a}_{\rm abs}=\mathbf{a}_{\rm tr}+\mathbf{a}_{\rm rel}+2v_{\rm rel}^{\alpha}\left(e_{\alpha\beta}+\omega_{\alpha\beta}\right)\mathbf{э}^{\beta} \tag{7.8}$$

где каждый член представлен в осязаемой форме.

Формула (7.8) сохраняет свой вид и в случае, когда рассматриваются все ускорения относительно неинерциального наблюдателя с базисом $\mathbf{э}_{\alpha}$.

Предыдущий вывод при наличии простейших представлений о тензорном анализе почти без всяких выкладок дает более общий результат в более общей ситуации с наглядной демонстрацией причины возникновения и природы «добавочного» ускорения в формуле (7.8).

Разделение движений подвижной точки $M$ на абсолютное и относительное связано с введением систем отсчета переносного движения; такие системы могут вводиться вместе с глобальным временем голономным образом, а также локально для каждого положения движущейся точки $M$ и, вообще говоря, неголономным способом.