

УДК 539.3

© 1990 г.

Л. Х. Талыблы

## ДЕФОРМАЦИЯ СКРЕПЛЕННОГО С КОРПУСОМ ВЯЗКОУПРУГОГО ЦИЛИНДРА ПРИ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОМ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Определяется напряженно-деформированное состояние полого длинного механически несжимаемого вязкоупругого цилиндра, скрепленного с упругой оболочкой. В отличие от известных работ [1, 2] рассматривается случай неизотермического динамического нагружения. Материал цилиндра считается физически нелинейной и физически линейной вязкоупругой средой, механические свойства которой существенно зависят от температуры. Температурное поле неоднородно и нестационарно. В процессе нагружения допускается изменение внутренней поверхности цилиндра во времени. Результаты решения позволяют находить безопасные условия работы рассматриваемой конструкции при определенных температурных, механических и геометрических данных. Приводятся некоторые характерные графики контактного напряжения в зависимости от времени в случае мгновенного подвода тепла на внутреннюю и внешнюю поверхности цилиндра.

**1. Постановка задачи.** Полный круговой толстостенный длинный цилиндр из вязкоупругого материала, механические свойства которого существенно зависят от температуры, скреплен по внешней поверхности с тонкостенной упругой оболочкой. Цилиндр нагружается внутренним  $p_a(t) = p_a' H(t) + p_a''(t)$  и внешним  $p_b(t) = p_b' H(t) + p_b''(t)$  давлениями и подвергается действию нестационарного неоднородного температурного поля  $T(r, t) = T_1(r) H(t) + T_2(r, t)$  ( $H(t)$  — единичная функция Хевисайда:  $H(t) = 0$  при  $t \leq 0$ ,  $H(t) = 1$  при  $t > 0$ ). Предполагается, что хотя бы одна из не зависящих от времени  $t$  величин  $p_a'$ ,  $p_b'$ ,  $T_1(r)$  отлична от нуля. Кроме того,  $p_a''(0) = p_b''(0) = 0$ ,  $T_2(r, 0) = 0$ . Считается, что в процессе нагружения внутренняя поверхность цилиндра может изменяться во времени:  $a_0 \leq a(t) < b$ , где  $a_0$  — внутренний радиус цилиндра при  $t = 0$  ( $a_0 = a(0)$ ),  $b$  — внешний радиус. Принимаются условия плоской деформации.

**2. Основные соотношения и решение задачи в случае нелинейно-вязкоупругого цилиндра.** В качестве соотношений между девиаторными величинами напряжений и деформаций для физически нелинейной вязкоупругой среды с существенно зависящими от температуры свойствами воспользуемся экспериментально обоснованными в [3] уравнениями

$$\frac{s_{ij}}{2G_0} = \Phi_1\left(\frac{\varepsilon_u}{v_T}\right) \mathcal{E}_{ij} - \int_0^t R(t-\tau) \Phi_2\left(\frac{\varepsilon_u}{v_T}\right) \mathcal{E}_{ij} d\tau \quad (2.1)$$

Здесь  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}$  — девиатор тензора напряжений,  $\mathcal{E}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}$  — девиатор тензора деформаций,  $\delta_{ij}$  — символы Кронекера,  $\sigma = \sigma_{ij} \delta_{ij} / 3$  — среднее напряжение,  $\varepsilon = \varepsilon_{ij} \delta_{ij} / 3$  — средняя деформация,  $\varepsilon_u = (\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij})^{1/2}$  — интенсивность деформаций. Константа  $G_0$  и функция  $R(t)$  есть мгновенный модуль сдвига и ядро релаксации при некоторой эталонной температуре  $T_s$ , которая фиксируется в представляющем интерес температурном диапазоне. Функция  $v_T = v_T(T)$  для каждого материала находится экспериментально в соответствии с ее определением [3].

Она обладает свойствами:  $v_T(T_s) = 1$ ;  $0 < v_T < 1$  при  $T > T_s$ ,  $v_T > 1$  при  $T < T_s$ . Уравнения (2.1) при эталонной температуре  $T_s$  переходят в уравнения нелинейной вязкоупругости, полученные [2] как следствие квазилинейной теории [4]. Они для рассматриваемой задачи примут вид

$$\frac{\sigma_\varphi - \sigma_r}{2G_0} = \varphi_1\left(\frac{\varepsilon_u}{v_T}\right)(\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r) - \int_0^t R(t - \tau) \varphi_2\left(\frac{\varepsilon_u}{v_T}\right)(\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r) d\tau \quad (2.2)$$

Материал цилиндра принимается механически несжимаемым

$$\theta = 3\alpha\Delta T \quad (\Delta T = T - T_0) \quad (2.3)$$

где  $\theta = 3\varepsilon$  — относительное изменение объема,  $\alpha = \alpha(T)$  — коэффициент линейного теплового расширения,  $T_0$  — начальная температура, при которой отсутствуют напряжения и деформации.

Будем рассматривать несвязанную задачу; предполагаем, что нагрев цилиндра за счет деформации пренебрежимо мал по сравнению с нагревом за счет теплопроводности. В этом случае к уравнениям (2.2), (2.3) добавляются уравнения движения, граничные и начальные условия и геометрические соотношения Коши (температурное поле считается известным из решения задачи теплопроводности):

$$\partial\sigma_z/\partial r - (\sigma_\varphi - \sigma_r)/r = \rho\partial^2 u/\partial t^2 \quad (2.4)$$

$$\sigma_r(a, t) = -p_a(t) \quad (2.5)$$

$$\sigma_r(b, t) = -q(t) = -p_b(t) - \frac{E_* h u(b, t)}{b^2(1 - \nu_*^2)} + \frac{E_* h \alpha_* \Delta T(b, t)}{b(1 - \nu_*)} - \rho_* h \frac{\partial^2 u(b, t)}{\partial t^2} \quad (2.6)$$

$$u|_{t=0} = \partial u/\partial t|_{t=0} = 0 \quad (2.7)$$

$$\varepsilon_r = \partial u/\partial r, \quad \varepsilon_\varphi = u/r, \quad \varepsilon_z = 0 \quad (2.8)$$

Здесь  $u$  — перемещение,  $\rho$  — плотность материала цилиндра,  $q$  — контактное давление,  $E_*$ ,  $\nu_*$ ,  $\rho_*$ ,  $\alpha_*$  — модуль упругости, коэффициент Пуассона, плотность, коэффициент линейного теплового расширения материала оболочки,  $h$  — толщина оболочки. Граничное условие (2.6) следует из соотношений для тонкостенной оболочки и условия непрерывности перемещений на границе  $r = b$  [2]. Как видно из (2.8), принято  $\varepsilon_z = 0$ . Отметим, что решение задачи не будет сопровождаться дополнительными трудностями, если принять  $\varepsilon_z$  зависящим только от времени, в частности  $\varepsilon_z = \alpha_* \Delta T(b, t)$ .

Из условия несжимаемости (2.3) при учете соотношений (2.8) следует

$$\dot{u} = c(t)/r + rI(r, t) \quad \left( I(r, t) = \frac{3}{r^2} \int_{a(t)}^r \alpha r \Delta T(r, t) dr \right) \quad (2.9)$$

где  $c(t)$  — подлежащая определению неизвестная функция. Отсюда

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= c(t)/r^2 - I(r, t) + 3\alpha\Delta T(r, t), \quad \varepsilon_\varphi = c(t)/r^2 + I(r, t) \\ \varepsilon_u &= (2/\sqrt{3}) [(c(t)/r^2 + I(r, t))^2 + 3(\alpha\Delta T(r, t))^2 - 3\alpha\Delta T(r, t)(c(t)/r^2 + \\ &\quad + I(r, t))]^{1/2} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Из соотношения (2.2), учитывая (2.9), (2.10), получим выражение для  $\sigma_\varphi - \sigma_r$ , используя которое, а также (2.5), (2.9), интегрируем уравнение (2.4). Находим

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -p_a(t) + \left( \frac{d^2 c(t)}{dt^2} - 3\alpha\Delta T(a(t), t) \right) \rho \ln \frac{r}{a(t)} + \rho \int_{a(t)}^r r^{-1} J(r, t) dr + \\ &\quad + \Psi_1(r, t, c(t)) - \int_0^t R(t - \tau) \Psi_2(r, \tau, c(\tau)) d\tau \end{aligned} \quad (2.11)$$

где

$$J(r, t) = 3 \int_{a(t)}^r \alpha r \frac{\partial^2 \Delta T}{\partial t^2} dr, \quad \bar{\Delta T}(a(t), t) = \Delta T(a(t), t) \left( \frac{da(t)}{dt} \right)^2 + \\ + \Delta T(a(t), t) a(t) \frac{d^2 a(t)}{dt^2} + 2a(t) \frac{da(t)}{dt} \frac{\partial (\Delta T(a(t), t))}{\partial t}$$

$$\Psi_i(r, t, c(t)) = 2G_0 \int_{a(t)}^r \left[ \frac{2c(t)}{r^3} + \frac{2I(r, t) - 3\alpha \Delta T(r, t)}{r} \right] \Psi_i \left( \frac{\varepsilon_u(r, t, c(t))}{v_T(r, t)} \right) dr \quad (i=1, 2)$$

Удовлетворив граничному условию (2.6) с учетом равенства (2.9), приходим к соотношению

$$\frac{d^2 c(t)}{dt^2} + k(t) c(t) = f(t) - \frac{1}{\rho_0} \left[ \Psi_1(b, t, c(t)) - \int_0^t R(t - \tau) \Psi_2(b, \tau, c(\tau)) d\tau \right] \quad (2.12)$$

$$k(t) = \frac{E_* h}{b^3 \rho_0 (1 - v_*^2)}, \quad \rho_0 = \rho \ln \frac{b}{a(t)} + \frac{\rho_* h}{b}$$

$$f(t) = 3\alpha \bar{\Delta T}(a(t), t) + \frac{1}{\rho_0} \left[ p_a(t) - p_b(t) + \frac{E_* h \alpha_* \Delta T(b, t)}{b(1 - v_*)} - \right. \\ \left. - \rho \int_{a(t)}^b r^{-1} J(r, t) dr - \frac{E_* h I(b, t)}{b(1 - v_*^2)} - \frac{\rho_* h J(b, t)}{b} \right]$$

При учете равенства (2.9) условия (2.7) удовлетворяются, если

$$c(t) |_{t=0} = (dc(t)/dt) |_{t=0} = 0 \quad (2.13)$$

Очевидно, что при  $\xi \leq t$  справедливо соотношение (2.12). Заменим  $t$  на  $\xi$  в (2.12), умножим правую и левую части этого равенства на  $t - \xi$  и проинтегрируем по  $\xi$  от 0 до  $t$ , используя условия (2.13). Получим

$$c(t) = f_1(t) + \int_0^t F(t, \tau, c(\tau)) d\tau \quad (2.14)$$

$$f_1(t) = \int_0^t f(\xi) (t - \xi) d\xi, \quad F(t, \tau, c(\tau)) = \sum_{i=1}^3 F_i(t, \tau, c(\tau))$$

$$F_1(t, \tau, c(\tau)) = -(t - \tau) k(\tau) c(\tau), \quad F_2(t, \tau, c(\tau)) = \\ = -(t - \tau) \Psi_1(b, \tau, c(\tau)) / \rho_0$$

$$F_3(t, \tau, c(\tau)) = \frac{1}{\rho_0} \int_{\tau}^t R(\xi - \tau) (t - \xi) \Psi_2(b, \tau, c(\tau)) d\xi$$

Уравнение (2.14) является нелинейным интегральным уравнением Вольтерры второго рода. При  $T(r, t) = T_0 = T_s = \text{const}$  и  $\varphi_1 = \varphi_2$  оно совпадает с уравнением, полученным [5] при решении соответствующей задачи изотермического нагружения.

Для решения уравнения (2.14) воспользуемся методом последовательных приближений. За нулевое приближение примем решение уравнения при отсутствии интегрального слагаемого:  $c_0(t) = f_1(t)$ , где  $f_1(t)$  — известная функция, определенная выше. Любое последующее приближение будет определяться формулой

$$c_k(t) = f_1(t) + \int_0^t F(t, \tau, c_{k-1}(\tau)) d\tau \quad (k \geq 1) \quad (2.15)$$

Следовательно, процесс построения приближений сводится к вычислению квадратур.

3. Доказательство сходимости последовательных приближений. Последовательность приближений  $c_k(t)$ , определяемая формулами (2.15), равномерно сходится на отрезке  $0 \leq t \leq t_*$ , если выполняются следующие достаточные условия [6]:

$$[F] \leq A(t, \tau)[z], \quad ([F] = |F(t, \tau, z_1) - F(t, \tau, z_2)|, \quad [z] = |z_1 - z_2|)$$

$$\int_0^{t_*} dt \int_0^t A^2(t, \tau) d\tau \leq A_0^2(t_*), \quad \left| \int_0^t F(t, \tau, f_1(\tau)) d\tau \right| \leq n(t) \quad (3.1)$$

$$\int_0^t n^2(\tau) d\tau \leq N^2(t_*)$$

Покажем, что если выполняются очевидные условия

$$0 < \varphi_i(\varepsilon_u) \leq d_i', \quad |d\varphi_i(\varepsilon_u)/d\varepsilon_u| \leq d_i'', \quad (d_i', d_i'' = \text{const}, \quad i = 1, 2) \quad (3.2)$$

то функции  $F$  и  $f_1$ , входящие в интегральное уравнение (2.14), удовлетворяют условиям сходимости (3.1).

Проверим выполнение первого условия (3.1). Имеем

$$[F] \leq \sum_{i=1}^3 [F_i] \quad (3.3)$$

Оценим каждое из слагаемых в правой части (3.3)

$$[F_1] = (t - \tau) k(\tau)[z_1] \equiv A_1(t, \tau)[z], \quad A_1(t, \tau) = E_* (t - \tau) h / [b^3 \rho (1 - v_*^2)] \quad (3.4)$$

$$[F_2] = \frac{(t - \tau) [\Psi_1]}{\rho_0} \leq \frac{2G_0(t - \tau)[z]}{\rho_0} \left| \int_{a(\tau)}^b \left[ \frac{d\varphi_1(\varepsilon_u/v_T)}{d(\varepsilon_u/v_T)} \frac{\partial \varepsilon_u(r, \tau, z)}{\partial z} \frac{1}{v_T(r, \tau)} \times \right. \right.$$

$$\left. \times \left( \frac{2z}{r^3} + r^{-1} (2I(r, \tau) - 3\alpha \Delta T(r, \tau)) \right) + \frac{2}{r^3} \varphi_1 \left( \frac{\varepsilon_u(r, \tau, z)}{v_T(r, \tau)} \right) \right] dr \right| \quad (3.5)$$

При учете равенств (2.10) и неравенства  $|\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r| / \varepsilon_u \leq 3/\sqrt{2}$  получим

$$\left| \frac{\partial \varepsilon_u(r, \tau, z)}{\partial z} \right| = \frac{2}{3} \frac{1}{r^2} \frac{|\varepsilon_\varphi(r, \tau, z) - \varepsilon_r(r, \tau, z)|}{\varepsilon_u(r, \tau, z)} \leq \frac{\sqrt{2}}{r^2} \quad (3.6)$$

Кроме того

$$|z| \leq lr + r^2 |I(r, t)| \quad (3.7)$$

(использовано соотношение (2.9) и неравенство  $|u(r, t)| \leq l$ ).

Из неравенства (3.5) при учете (3.2), (3.6) и (3.7) получим

$$[F_2] \leq A_2(t, \tau)[z], \quad A_2(t, \tau) = (t - \tau) \zeta_1(\tau) \quad (3.8)$$

$$\zeta_1(\tau) = \frac{2G_0}{\rho_0} \int_{a(\tau)}^b r^{-3} \left[ \frac{\sqrt{2} d_1''}{v_T(r, \tau)} \left( \frac{2l}{r} + 4|I(r, \tau)| + 3|\alpha \Delta T(r, \tau)| \right) + 2d_1' \right] dr$$

Аналогичным образом оценим

$$[F_3] \leq A_3(t, \tau)[z], \quad A_3(t, \tau) = \int_{\tau}^t R(\xi - \tau) [(t - \xi) \zeta_2(\xi) d\xi] \quad (3.9)$$

где  $\zeta_2(\xi)$  соответствует  $\zeta_1(\xi)$  при замене  $d_1'$  на  $d_2'$  и  $d_1''$  на  $d_2''$ .

Используя оценки (3.4), (3.8), (3.9), убеждаемся, что первое условие (3.1) выполняется, причем

$$A(t, \tau) = \sum_{i=1}^3 A_i(t, \tau) \quad (3.10)$$

Проверим теперь выполнение второго условия (3.1). Предварительно оценим каждое из слагаемых в правой части (3.10).

Поскольку  $\rho > 0$  и  $a(t) < b$ , имеем

$$A_1(t, \tau) \leq (t - \tau) E_* / [b^2 \rho_* (1 - v_*^2)] \quad (3.11)$$

При выполнении неравенств

$$|\alpha| \leq \alpha_1 = \text{const}, \quad |\Delta T(r, t)| \leq L_0 = \text{const}, \quad r^2 - a^2(t) \leq r^2, \quad v_T \geq 1 \quad (3.12)$$

(выполнение последнего неравенства всегда можно добиться за счет выбора температуры  $T$ , при определении функции  $v_T$  [3]) из (3.8) получим

$$A_2(t, \tau) \leq m_1(t - \tau), \quad m_1 = \frac{2G_0}{\rho_* h} \left( \frac{2\sqrt{2}ld''}{3} \frac{b^3 - a_0^3}{a_0^3 b^2} + \frac{9\sqrt{2}\alpha_1 d'' L_0 + 2d'}{2} \frac{b^2 - a_0^2}{a_0^2 b} \right) \quad (3.13)$$

$$d' = \max \{d_1', d_2'\}, \quad d'' = \max \{d_1'', d_2''\}$$

При учете неравенств

$$R(t) > 0, \quad \int_0^\infty R(t) dt < 1$$

аналогичным образом оцениваем  $A_3(t, \tau)$  из (3.9).

$$A_3(t, \tau) \leq m_1 \int_\tau^t (t - \xi) R(\xi - \tau) d\xi \leq m_1(t - \tau) \quad (3.14)$$

Принимая во внимание оценки (3.11), (3.13), (3.14) в (3.10), имеем

$$A(t, \tau) \leq (t - \tau)[2m_1 + E_* / [b^2 \rho_* (1 - \nu_*^2)]] \quad (3.15)$$

Используя неравенство (3.15), убеждаемся, что второе условие (3.1) выполняется. Проверим теперь выполнение третьего и четвертого условий (3.1). Запишем

$$\left| \int_0^t F(t, \tau, f_1(\tau)) d\tau \right| \leq \sum_{i=1}^3 \int_0^t |F_i(t, \tau, f_1(\tau))| d\tau \quad (3.16)$$

и оценим каждое слагаемое в правой части. Предварительно оценим функцию  $f_1(t)$ . Воспользуемся выражениями для  $\bar{\Delta}T(a(t), t)$  и  $f(t)$ , приведенными выше, неравенствами (3.12) и неравенствами

$$|da(t)/dt| \leq a_1, \quad |d^2a(t)/dt^2| \leq a_2, \quad |\partial T(r, t)/\partial t| \leq L_1$$

$$|\partial^2 T(r, t)/\partial t^2| \leq L_2, \quad |P_a(t) - p_b(t)| \leq p_0(a_1, a_2, L_1, L_2, p_0 = \text{const})$$

которые справедливы при любых  $0 \leq t \leq t_*$ ,  $a(t) \leq r \leq b$ :

$$|f_1(t)| \leq m_2 t^2 / 2, \quad m_2 = 3\alpha_1 (bL_0 a_2 + 2ba_1 L_1 + L_0 a_1^2) + \frac{b}{\rho_* h} \left( p_0 + \frac{E_* h \alpha_* L_0}{b(1 - \nu_*^2)} + \frac{3}{4} \alpha_1 L_2 \rho b^2 + \frac{3\alpha_1 E_* h L_0}{2b(1 - \nu_*^2)} + \frac{3}{2} \alpha_1 \rho_* h b L_2 \right)$$

При этом имеют место следующие оценки:

$$|F_1(t, \tau, f_1(\tau))| \leq m_3 \tau^2 (t - \tau), \quad |F_i(t, \tau, f_1(\tau))| \leq (t - \tau)(m_4 \tau^2 + m_5) \quad (i = 1, 2) \quad (3.17)$$

$$m_3 = \frac{E_* m_2}{2\rho_* b^2 (1 - \nu_*^2)}, \quad m_4 = \frac{G_0 b d' m_2 (b^2 - a_0^2)}{\rho_* h a_0^2 b^2}, \quad m_5 = \frac{12G_0 b d' \alpha_1 L_1 \ln b/a_0}{\rho_* h}$$

С использованием оценок (3.17), вычислив интегралы в правой части неравенства (3.16), можно показать, что третье и четвертое условия (3.1) также выполняются.

Следовательно, все условия (3.1) удовлетворяются и поэтому функция  $c(t)$  при помощи последовательных приближений (2.15) может быть вычислена с любой степенью точности. После определения функции  $c(t)$  перемещение  $u(r, t)$ , деформации  $\epsilon_r(r, t)$ ,  $\epsilon_\varphi(r, t)$ , напряжение  $\sigma_r(r, t)$  находятся соответственно по формулам (2.9) — (2.11). Напряжение  $\sigma_\varphi$  определяется из соотношения (2.2), напряжение  $\sigma_z$  — через  $\sigma_r$  и  $\sigma_\varphi$  соотношением теории плоской деформации несжимаемого материала:  $\sigma_z = (\sigma_r + \sigma_\varphi)/2$ .

**4. Другой способ построения приближений.** Этот способ основан на использовании решения соответствующей задачи линейной теории термовязкоупругости. Необходимость в этом вызвана тем, что скорость сходимости процессов в различных случаях может быть разной, что небезразлично.

Представим функцию  $\varphi_i(\epsilon_u/\nu_T)$  в виде:  $\varphi_i(\epsilon_u/\nu_T) = 1 - \eta_i(\epsilon_u/\nu_T)$  ( $i = 1, 2$ ). Примем  $a(t) \equiv a_0 = \text{const}$  (в этом случае имеются эффективные методы решения задач теории линейной вязкоупругости [1, 2]). При

этом  $\rho_0 = \text{const}$ ,  $k = \text{const}$ . Введем обозначения

$$k_1 = \frac{2G_0}{\rho_0} \frac{b^2 - a_0^2}{a_0^2 b^2}, \quad f_2(t) = f(t) - \frac{2G_0}{\rho_0} \left[ \int_{a_0}^b r^{-1} (2I(r, t) - 3\alpha \Delta T(r, t)) dr - \int_0^t R(t - \tau) \int_{a_0}^b r^{-1} (2I(r, \tau) - 3\alpha \Delta T(r, \tau)) dr d\tau \right].$$

$$\chi_i(t, c(t)) = \frac{2G_0}{\rho_0} \int_{a_0}^b \left[ \frac{2c(t)}{r^3} + \frac{2I(r, t) - 3\alpha \Delta T(r, t)}{r} \right] \eta_i \left( \frac{\varepsilon_u(r, t, c(t))}{v_T(r, t)} \right) dr \quad (i = 1, 2)$$

Аналог уравнения (2.12) будет

$$\frac{d^2 c(t)}{dt^2} + (k_1 + k) c(t) - k_1 \int_0^t R(t - \tau) c(\tau) d\tau =$$

$$= f_2(t) + \chi_1(t, c(t)) - \int_0^t R(t - \tau) \chi_2(\tau, c(\tau)) d\tau \quad (4.1)$$

Это уравнение также решается методом последовательных приближений. За нулевое приближение принимается решение при  $\eta_1^{(0)} = \eta_2^{(0)} = 0$ , из которого следует  $\chi_1^{(0)} = \chi_2^{(0)} = 0$ . Этот случай соответствует решению задачи термовязкоупругости для среды, свойства которой не зависят от температуры. Определив при  $\chi_1^{(0)} = \chi_2^{(0)} = 0$  из (4.1) и (2.13) функцию  $c^{(0)}(t)$ , по формуле (2.10) находим  $\varepsilon_u^{(0)}(r, t, c^{(0)}(t))$ . При этом становятся известными  $\eta_i^{(1)}(\varepsilon_u^{(0)}/v_T)$  и по ним  $\chi_i^{(1)}(t, c^{(0)}(t))$  ( $i = 1, 2$ ). Учитывая  $\chi_i^{(1)}$  в (4.1), для определения  $c^{(1)}(t)$  получаем уравнение, аналогичное уравнению при нулевом приближении. Таким образом продолжая процедуру, для определения  $c(t)$  имеем в каждом последующем приближении задачу (4.1), (2.13), где правая часть уравнения (4.1) будет определяться предшествующим приближением.

Доказательство сходимости последовательных приближений в этом случае проводится подобно предыдущему, поскольку уравнение (4.1) преобразуется к виду (2.14) так же, как и в указанном случае. При этом на функции  $\eta_i(\varepsilon_u/v_T)$  следует распространять условия, аналогичные (3.2).

**5. Решение в случае линейного вязкоупругого цилиндра.** Предположим, что материал цилиндра обладает свойствами физической линейности. В этом случае [3]

$$\varphi_i(\varepsilon_u/v_T) = \omega_i(T) \quad (i = 1, 2) \quad (5.1)$$

Функции  $\omega_1(T)$  и  $\omega_2(T)$  характеризуют влияние температуры на механические свойства материалов при мгновенном нагружении и на реономные свойства и определяются для каждого материала экспериментально [3, 7]. Они обладают свойствами:  $\omega_i(T_s) = 1$ ;  $0 < \omega_i(T) < 1$  при  $T > T_s$ ,  $\omega_i(T) > 1$  при  $T < T_s$  ( $i = 1, 2$ ).

В рассматриваемом случае соотношения (2.3)–(2.8) остаются в таком же виде, в каком они использовались выше. Решим задачу (2.2), (5.1), (2.3)–(2.8) при  $a(t) = a_0 = \text{const}$ ,  $T(r, t) = T_1(r) H(t)$  ( $T_1(r) \neq 0$ ,  $T_2(r, t) = 0$ ), причем будем предполагать, что температурное поле  $T$  отсчитывается от начальной температуры  $T_0$ . При этом  $\rho_0 = \text{const}$ ,  $k = \text{const}$ ,  $I(r, t) = I_1(r) H(t)$ , где  $I_1(r) = 3r^{-2} \int_0^r \alpha r T_1(r) dr$ . Отметим, что

перемещение  $u$  и деформации  $\varepsilon_r, \varepsilon_\varphi$  и в данном случае определяются формулами (2.9), (2.10), в которых следует принять  $a(t) = a_0, \Delta T = T = T_1(r)H(t)$ . Соотношения (2.11) и (2.12) в рассматриваемом случае преобразуются соответственно к виду

$$\sigma_r = -p_a(t) + \rho \frac{d^2c(t)}{dt^2} \ln \frac{r}{a_0} + w_1(r)c(t) - w_2(r) \int_0^t R(t-\tau)c(\tau) d\tau + g_1(r)H(t) - g_2(r) \int_0^t R(\xi) d\xi \quad (5.2)$$

$$\rho_0 \frac{d^2c(t)}{dt^2} + k_2c(t) = \psi(t) + w_2(b) \int_0^t R(t-\tau)c(\tau) d\tau \quad (5.3)$$

$$w_i(r) = 4G_0 \int_{a_0}^r r^{-3} \omega_i(T) dr, \quad g_i(r) = 2G_0 \int_{a_0}^r \mu(r) \omega_i(T) dr \quad (i = 1, 2)$$

$$\mu(r) = r^{-1}(2I_1(r) - 3\alpha T_1(r)), \quad k_2 = k\rho_0 + w_1(b), \quad \psi(t) = p_a(t) - p_b(t) + k_3H(t) + g_2(b) \int_0^t R(\xi) d\xi, \quad k_3 = k\rho_0(\alpha_* T_1(b)(1 + \nu_*) - b^2 I_1(b)) - g_1(b)$$

Как видим, задача состоит в определении функции  $c(t)$ , которая является решением уравнения (5.3) при начальных условиях (2.13). Прежде чем определить  $c(t)$  из уравнения (5.3), рассмотрим имеющий самостоятельное значение случай, когда материал цилиндра является линейно упругим. При этом в (5.3) положим  $R(t) = 0$ , после чего с использованием (2.13) определим  $c(t)$ .

$$c(t) = \frac{\psi_0}{k_2} \left( 1 - \cos \sqrt{\frac{k_2}{\rho_0}} t \right), \quad \psi_0 = p_a' - p_b' + k_3 \quad (5.4)$$

принято, что  $p_a''(t) \equiv 0, p_b''(t) \equiv 0$ .

При учете (5.4), находим из (5.2)

$$\sigma_r = -p_a' + \frac{\rho}{\rho_0} \psi_0 \ln \left( \frac{r}{a_0} \right) \cos \sqrt{\frac{k_2}{\rho_0}} t + w_1(r) \frac{\psi_0}{k_2} \left( 1 - \cos \sqrt{\frac{k_2}{\rho_0}} t \right) + g_1(r) \quad (5.5)$$

Заметим, что в формуле (5.5) через функции  $\omega_1(T)$  учитывается зависимость механических свойств материала упругого цилиндра от температуры.

Теперь рассмотрим вопрос об определении функции  $c(t)$  в случае линейного вязкоупругого материала цилиндра. Учитывая условия (2.13), применим преобразование Лапласа к уравнению (5.3), откуда определим

$$\bar{c}(p) = \bar{\psi}(p) / [\rho_0 p^2 + k_2 - w_2(b) \bar{R}(p)] \quad (5.6)$$

При некоторых ограничениях на  $\bar{R}(p)$  построение оригинала выражения типа (5.6) приведено в [2]. Без ограничения на  $\bar{R}(p)$  функция  $c(t)$  может быть найдена приближенно по известному методу Шепери [8]

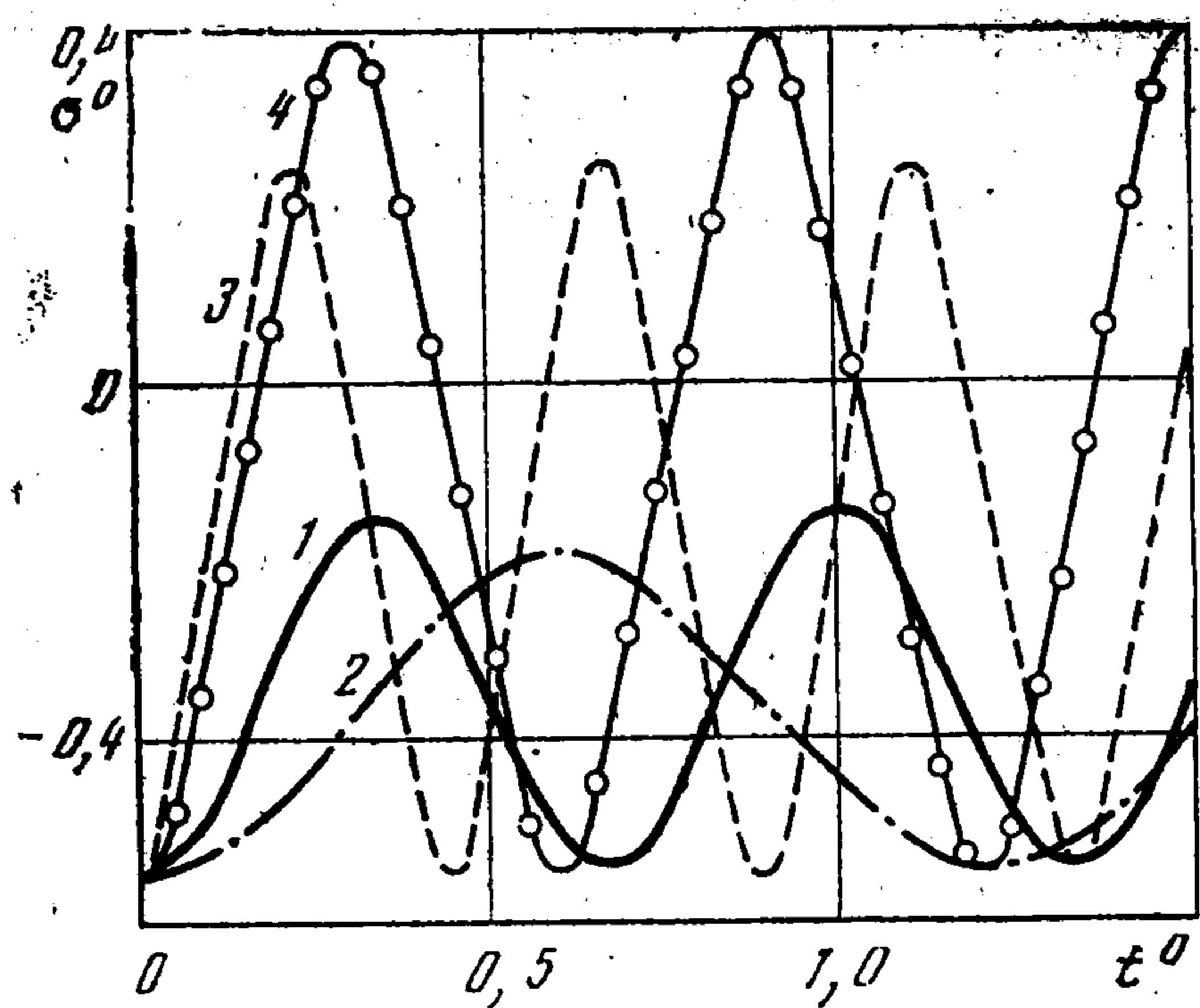
$$c(t) = [p\bar{c}(p)]_{p=(1/2)t^{-1}} = 4t^2 \psi(t) / (\rho_0 + 4k_2 t^2 - 8w_2(b) t^3 R(t)) \quad (5.7)$$

Учитывая (5.7) в (5.2), получаем приближенное аналитическое выражение для напряжения  $\sigma_r$ .

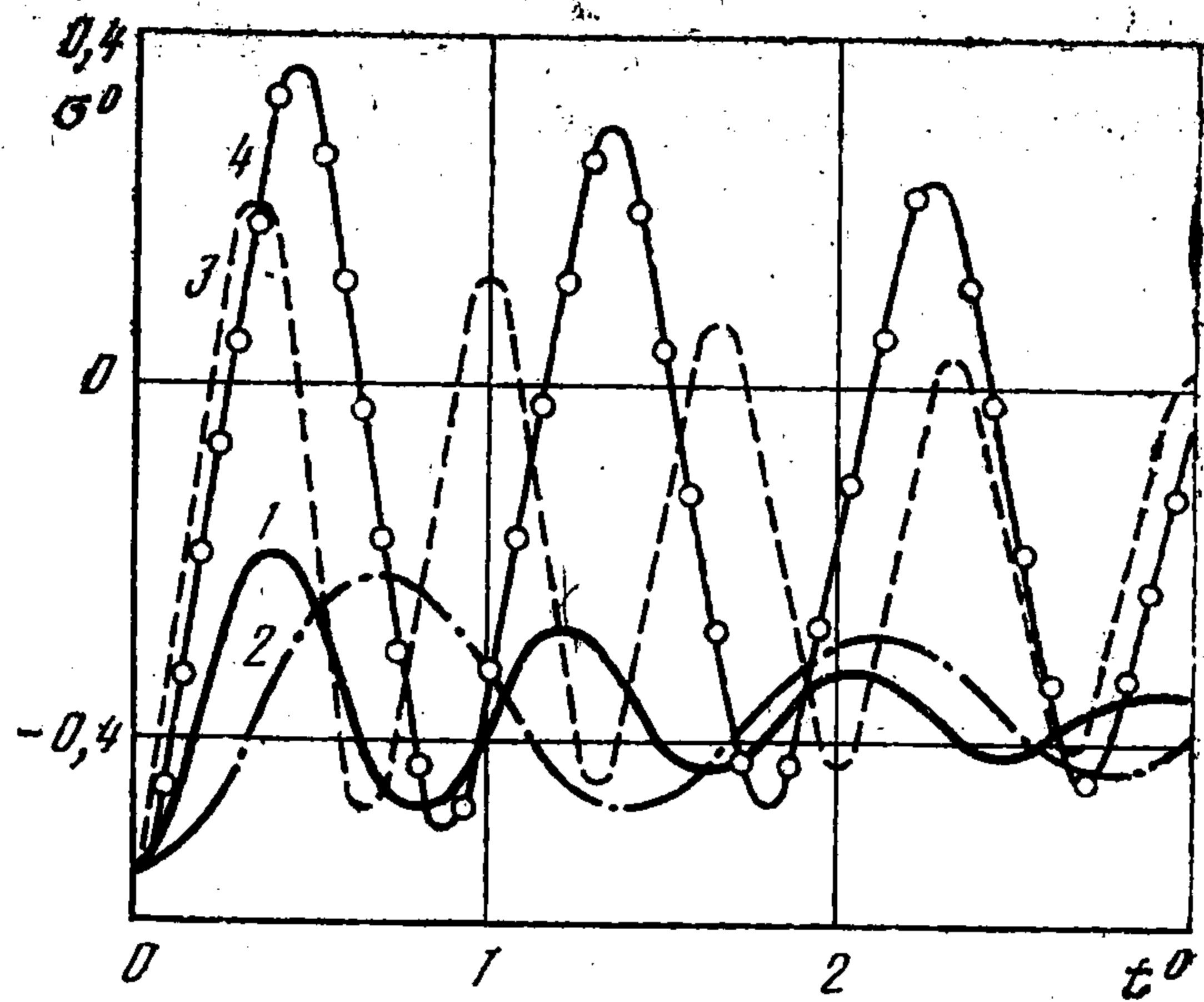
Для качественного анализа решения предположим, что ядро представляется в виде экспоненциальной функции:  $R(t) = \Lambda \exp(-\lambda t)$  ( $\Lambda > 0, \lambda > 0$ ). В этом случае (5.6) преобразуется к виду

$$\bar{c}(p) = (\lambda + p) \bar{\psi}(p) / P_3(p) \quad (5.8)$$

$$P_3(p) = \rho_0 p^3 + \lambda \rho_0 p^2 + k_2 p + k_2 \lambda - \Lambda w_2(b)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Пусть  $p_1, p_2, p_3$  — корни полинома  $P_3(p)$ . Тогда (5.8) представляется в виде суммы простых дробей

$$\bar{c}(p) = \frac{\bar{\psi}(p)}{\rho_0} \sum_{i=1}^3 \frac{A_i}{p - p_i}$$

$$A_1 = (p_1 + \lambda)(p_2 - p_3)/M, \quad A_2 = (p_2 + \lambda)(p_3 - p_1)/M, \quad A_3 = (p_3 + \lambda)(p_1 - p_2)/M$$

$$M = p_1 p_2 (p_1 - p_2) + p_1 p_3 (p_3 - p_1) + p_2 p_3 (p_2 - p_3)$$

При этом оригинал  $c(t)$  будет иметь вид

$$c(t) = \sum_{i=1}^3 \frac{A_i}{\rho_0} \int_0^t \exp[p_i(t - \tau)] \psi(\tau) d\tau \quad (5.9)$$

Определив функцию  $c(t)$  по формуле (5.9), перемещение  $u$ , деформации  $\varepsilon_r, \varepsilon_\varphi$  находим по формулам (2.9) и (2.10) при  $a(t) = a_0$ ,  $\Delta T(r, t) = T_1(r) H(t)$ , напряжения  $\sigma_r$  по формуле (5.2). После чего определяются напряжения  $\sigma_\varphi$  и  $\sigma_z$ :

$$\sigma_\varphi = \sigma_z + r \partial \sigma_r / \partial r - \rho r \partial^2 u / \partial t^2, \quad \sigma_z = (\sigma_r + \sigma_\varphi) / 2.$$

В случае экспоненциального ядра полученное решение будет точным.

## 6. Влияние поля температуры на изменение контактного напряжения.

В рассматриваемой задаче представляет интерес изменение во времени контактного напряжения  $\sigma_r(b, t)$ . Поведение  $\sigma_r(b, t)$  при изотермическом нагружении системы цилиндр — оболочка давлениями  $p_b(t) \equiv 0$ ,  $p_a(t) = p_a' H(t)$  и  $p_a(t) \equiv 0$ ,  $p_b(t) = p_b' H(t)$ , когда свойства цилиндра описываются простейшими уравнениями для стандартного линейно вязкоупругого тела, изучено в [9]. В отличие от [9] здесь рассмотрим влияние поля температуры на величину  $\sigma_r(b, t)$  на основе полученных выше решений. Примем  $p_a(t) \equiv 0$ ,  $p_b(t) \equiv 0$ . Предположим, что внутрь цилиндра подводится тепло, которое мгновенно создает на его внутренней поверхности температуру  $T_a$ , сохраняющуюся впоследствии постоянной, а на внешней поверхности держится мгновенно созданная постоянная температура  $T_b$ . При этом температурное поле цилиндра представляется в виде:

$$T(r, t) = [T_a + (T_b - T_a) \ln(r/a_0) / \ln(b/a_0)] H(t)$$

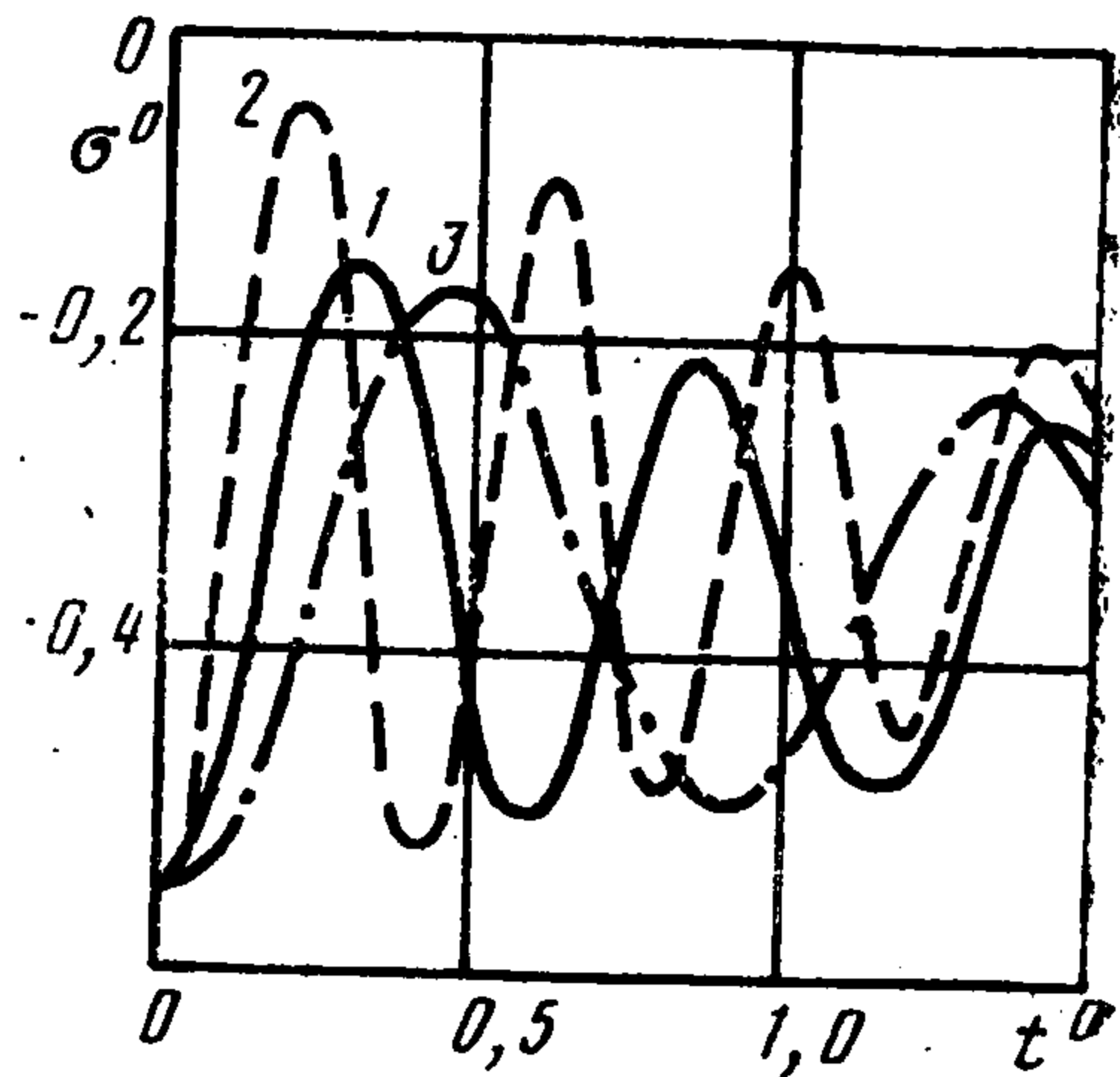
Принимаем  $\alpha = \text{const}$ ,  $T_s = T_a$ ,  $\omega_1 = (T_s/T)^\nu$ . Числовые значения параметров зададим следующие:  $\rho_*/\rho = 0,2$ ;  $h/b = 10^{-2}$ ;  $b/a_0 = 3$ ;  $\nu_* = 0,3$ ;  $\alpha_*/\alpha = 10^{-1}$ ;  $T_a/T_b = 10$ .

С использованием этих данных на основании формулы (5.5) (материал цилиндра линейно упругий) построены графики зависимости  $\sigma^\circ = \sigma_r(b, t)/(E_* \alpha_* T_b)$  от  $t^\circ = (\pi a_0)^{-1} t \sqrt{G_0/\rho}$ , которые представлены на фиг. 1. Кривые 1, 2 построены при  $E_*/G_0 = 10^3$  и  $\gamma = 2$ ,  $\gamma = 0$  соответственно, кривые 3, 4 — при  $E_*/G_0 = 10^4$  и  $\gamma = 2$ ,  $\gamma = 0$  соответственно ( $\gamma = 0$  соответствует случаю, когда свойства материала цилиндра не зависят от температуры). На фиг. 2 аналогичные графики приведены в случае, когда материал цилиндра линейно вязкоупругий. При их построении использована формула (5.2), где для функции  $c(t)$  принималась формула (5.9). В этом случае кроме вышеприведенных значений параметров были приняты:  $\omega_2/\omega_1 = 1$  [3, 7] и  $\lambda/\Lambda = 2$ ,  $\sqrt{G_0}/(a_0 \lambda \sqrt{\rho}) = 1$ .

Как видим, при  $E_*/G_0 = 10^3$  и значениях  $\gamma = 0$ ,  $\gamma = 2$  контактное напряжение  $\sigma_r(b, t)$  сжимающее. Однако, когда модуль упругости оболочки в  $10^4$  и более раз больше модуля сдвига цилиндра, при тех же значениях  $\gamma$  напряжение  $\sigma_r(b, t)$  может стать и растягивающим (растягивающие напряжения опасны, поскольку они могут привести к отслоению оболочки от цилиндра). Кроме того, на фиг. 1 и 2 при  $\gamma = 0$  замечается резкое увеличение амплитуд напряжений по отношению к случаю  $\gamma = 2$  при изменении значений  $E_*/G_0$  от  $10^3$  до  $10^4$ . На фиг. 2 наблюдается явление, характерное для вязкоупругих материалов: затухание амплитуд напряжений с течением времени. Из физических соображений следует, что они стремятся к квазистатическим решениям. Отметим, что скорость затухания амплитуд напряжений в случае независимости свойств вязкоупругого материала от температуры меньше, чем при наличии такой зависимости.

На фиг. 3 представлены графики контактного напряжения в случае нелинейного вязкоупругого материала цилиндра, построенные в соответствии с методикой, рассмотренной в п. 4. Функции  $\varphi_1 = \varphi_2 \equiv \varphi$  и  $\nu_T$  были аппроксимированы в виде:  $\varphi(\varepsilon_u) = B\varepsilon_u^\beta$ ,  $\nu_T = (T_s/T)^\delta$ . Принималось:  $B = 1$ ,  $\delta\beta = -\gamma$ . Кривые 1—3 соответствуют следующим значениям  $(\beta; \delta)$ :  $(-0,2; 10)$ ,  $(-0,4; 5)$ ,  $(-0,2; 5)$ . Приведены результаты третьего приближения (результаты нулевого приближения соответствуют случаю  $\gamma = 0$  ( $\beta = 0$ ) на фиг. 2): Как видим, при увеличении степени нелинейности материала (при сохранении неизменными значений  $\delta\beta$ ) амплитуды напряжений увеличиваются при временах, близких к нулю. Вместе с тем увеличивается скорость их затухания. При значениях параметров, приведенных на фиг. 3, контактные напряжения не становятся растягивающими и поэтому не представляют опасности для системы цилиндр — оболочка.

Наконец, отметим, что на величину  $\sigma_r(b, t)$  существенно влияют все параметры, числовые значения которых задавались выше. Представленные методики решения позволяют в каждом конкретном случае произвести аналогичный расчет. Могут быть рассчитаны также  $\sigma_\varphi$ ,  $\sigma_z$ ,  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_\varphi$  и  $u$  в любой другой точке системы цилиндр — оболочка.



Фиг. 3

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильющин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
2. *Москвитин В. В.* Сопротивление вязкоупругих материалов применительно к зарядам ракетных двигателей на твердом топливе. М.: Наука, 1972. 327 с.
3. *Талыблы Л. Х.* К нелинейной теории температурных напряжений в вязкоупругих телах. // Механика композит. материалов. 1983. № 4. С. 587—593.
4. *Ильющин А. А., Огибалов П. М.* Квазилинейная теория вязкоупругости и метод малого параметра. // Механика полимеров. 1966. № 2. С. 170—189.
5. *Токарев О. Б.* Динамическое нагружение нелинейно вязкоупругого цилиндра с переменным внутренним радиусом. // Вестн. МГУ. Сер. Математика, механика. 1970. № 4. С. 100—106.
6. *Трикоми Ф.* Интегральные уравнения. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 299 с.
7. *Талыблы Л. Х.* Об одном способе учета влияния температуры на механические свойства физически линейных вязкоупругих сред // Материалы конф. по прикл. мат. и мех. Кировабад, 1984. Баку: «Элм», 1984. С. 88—91.
8. *Schaperly R. A.* An approximate method of stress analysis for large class of problems in viscoelasticity. Purdue Univ. School Aeronaut. and Eng. Sci. Rept. A and ES 62—12. 1963. 46 p.
9. *Ахенбах Дж. Д.* Динамическое поведение длинного скрепленного с корпусом вязкоупругого цилиндра // Ракетная техника и космонавтика. 1965. № 4. С. 124—129.

Баку

Поступила в редакцию  
12.VII.1988