Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 1, 1990

УДК 593.3

В. Н. Паймушин

ВАРИАНТ УТОЧНЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ТОНКИХ УПРУГИХ ТРЕХСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК ИТЕРАЦИОННОГО ТИПА

Предлагается вариант уточненной нелинейной теории тонких упругих трехслойных оболочек квадратичного приближения, базирующейся на привлечении традиционных гипотез Кирхгофа — Лява к внешним слоям и уточненной модели к заполнителю. Для построения последней используется итерационная процедура, в рамках которой на первом этапе, в предположении, что заполнитель трансверсально-мягкий, путем последовательного интегрирования по поперечной координате соотношений трехмерной теории термоупругости устанавливаются выражения для компонент вектора перемещений, а с их помощью на втором этапе вычисляются поддающиеся уточнению компоненты тензоров деформаций и напряжений. Отмечается целесообразность использования построенного комплекса соотношений для исследования устойчивости трехслойных оболочек в уточненной постановке с целью выявления смешанных форм выпучивания внешних слоев и оболочки в целом.

Уточненная классификация форм потери устойчивости трехслойных пластин и оболочек [1], кроме описанных и хорошо изученных в литературе [2, 3] синфазных (кососимметричных) и антифазных (симметричных) форм, включает также и смешанную форму потери устойчивости внешних слоев. Уравнения, предложенные [1] для исследования смешанных форм потери устойчивости, использованные ([4] и др.) для решения конкретных задач и базирующиеся на статико-кинематической модели «ломанной» линии [3], являются предельно упрощенными. Они потребовали уточнения при постановке задач устойчивости прежде всего для таких трехслойных конструкций, у которых толщины внешних слоев ($2h_{(k)}$, $k=1,\ 2$) и заполнителя ($2h$) удовлетворяют условиям $h_{(k)}/h\sim\varepsilon$, где ε — некоторая малая величина, которой можно пренебречь по сравнению с единицей (трехслойные конструкции с весьма тонкими внешними слоями). В связи с этим предлагается вариант уточнения выведенных в [5] соотношений, который базируется на использовании итерационной процедуры уточнения напряженно-деформированного состояния в заполнителе. Учитываются также температурные воздействия в рамках соотношений несвязанной термоупругости.

1. Как и в [5], отнесем пространства, занимаемые заполнителем и внешними слоями, к параметризациям

$$\rho(\alpha^i, z)=\mathbf{r}(\alpha^i)+z\mathbf{m},\quad \rho_{(k)}(\alpha^i, z_{(k)})=\mathbf{r}_{(k)}+z_{(k)}\mathbf{m}$$

$$\mathbf{r}_{(k)}=\mathbf{r}-\delta_{(k)}(h+h_{(k)})\mathbf{m},\quad -h\leqslant z\leqslant h,\quad -h_{(k)}\leqslant z_{(k)}\leqslant h_{(k)}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки M на срединной поверхности заполнителя σ, отнесенной к системе криволинейных координат α^i и характеризующейся метрическими тензорами $a_{ij}=\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j$, $b_{ij}=-\mathbf{r}_i\mathbf{m}_j$; $\mathbf{m}$, $\mathbf{m}_j=\partial\mathbf{m}/\partial\alpha^j$ — вектор единичной нормали к σ и его производная по α^j; $2h$, $2h_{(k)}$ — толщины заполнителя и несущих слоев ($k=2$ — для верхнего слоя, $k=1$ — для нижнего слоя); $\delta_{(k)}$ — символ, принимающий целочисленные значения $\delta_{(1)}=1$ и $\delta_{(2)}=-1$; $\mathbf{r}_{(k)}$ — радиус-векторы точек на срединных поверхностях внешних слоев $\sigma_{(k)}$. Заполнитель и внешние слои считаем тонкими, предполагая выполненными приближенные равенства

$$\delta_i^j-h_{(k)}b_i^j\approx\delta_i^j,\quad \delta_i^j-hb_i^j\approx\delta_i^j$$

(δ_i^j — символы Кронекера), поэтому в дальнейшем базисные векторы $\mathbf{r}_i=\partial\mathbf{r}/\partial\alpha^i$ на σ и $\rho_i=\partial\rho/\partial\alpha^i$, $\rho_i^{(k)}=\partial\rho_{(k)}/\partial\alpha^i$ между собой отождествляем.

Для описания механики деформирования внешних слоев примем традиционные в теории трехслойных оболочек [3] гипотезы Кирхгофа — Лява, в рамках которых при среднем изгибе оболочки вектор перемещений $\mathbf{U}^{(k)}$ k-го внешнего слоя и ковариантные компоненты его тензора тангенциальных деформаций выражаются равенствами [6] (∇_i — операторы ковариантного дифференцирования по метрике a_{ik})

$$\mathbf{U}^{(k)} = u_i^{(k)}\mathbf{r}^i + w^{(k)}\mathbf{m} - z_{(k)}\omega_i^{(k)}\mathbf{r}^i \tag{1.1}$$

$$\overset{z}{\varepsilon}{}_{ij}^{(k)} = \varepsilon_{ij}^{(k)} + z_{(k)}\varkappa_{ij}^{(k)}, \quad 2\varepsilon_{ij}^{(k)} = e_{ij}^{(k)} + e_{ji}^{(k)} + \omega_i^{(k)}\omega_j^{(k)}$$
$$2\varkappa_{ij}^{(k)} = -\nabla_i\omega_j^{(k)} - \nabla_j\omega_i^{(k)}, \quad e_{ij}^{(k)} = \nabla_i u_j^{(k)} - b_{ij}w^{(k)} \tag{1.2}$$
$$\omega_i^{(k)} = \nabla_i w^{(k)} + b_i^{\,j} u_j^{(k)}$$

С целью установления закона изменения по координате z компонент вектора перемещений заполнителя $\mathbf{U} = U_i\mathbf{r}^i + U_3\mathbf{m}$ для его тангенциальных компонент σ^{ij} тензора напряжений примем допущения

$$\sigma^{11} = \sigma^{12} = \sigma^{22} = 0 \tag{1.3}$$

считая на данном этапе заполнитель трансверсально-мягким.

При использовании этих равенств последовательное интегрирование уравнений равновесия, записанных для заполнителя с точностью до $\delta_i^{\,j} - zb_i^{\,j} \approx \delta_i^{\,j}$ и при пренебрежении в нем объемными силами, приводит к формулам [5]

$$\sigma^{33} = q_{(1)}{}^3 - (z+h)\,\nabla_i q^i, \quad q_{(2)}{}^3 = q_{(1)}{}^3 - 2h\nabla_i q^i \tag{1.4}$$

где $q^i = \sigma^{i3}(\alpha^j)$ — не зависящие от z поперечные касательные напряжения, а $\overset{3}{q}_{(k)} = \sigma^{33}(\alpha^i,\ z = -\delta_{(k)}h)$ — значения напряжений поперечного обжатия в точках поверхностей $z = -\delta_{(k)}h$.

В рамках той же степени точности, заданной приближенными равенствами (1.3) и $\delta_i^{\,j} - zb_i^{\,j} \approx \delta_i^{\,j}$, уравнение состояния для σ^{33}, отвечающее соотношениям несвязанной задачи термоупругости, при учете первой формулы из (1.4) будет иметь вид

$$\sigma^{33} = E_3\,(\partial U_3/\partial z - \alpha_3 T) = \overset{3}{q}_{(1)} - (z+h)\,\nabla_i q^i \tag{1.5}$$

не только при малом, но и среднем изгибе оболочки. Здесь E_3, α_3 — модуль упругости и коэффициент теплового расширения заполнителя в направлении z, T — приращение температуры.

Интегрирование этого уравнения и последующее удовлетворение кинематическим условиям сопряжения внешних слоев с заполнителем по прогибам

$$U_3\,|_{z=-h} = w^{(1)}, \quad U_3\,|_{z=h} = w^{(2)}$$

приводит к формулам

$$\overset{3}{q}_{(k)} = \varphi_3\,(w^{(2)} - w^{(1)}) + \delta_{(k)}h\nabla_i q^i - \varphi_3\beta_3 \tag{1.6}$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{w^{(2)} - w^{(1)}}{2h} - \frac{z}{E_3}\nabla_i q^i - \frac{\beta_3}{2h} = \alpha_3 T \tag{1.7}$$

$$U_3 = \frac{w^{(1)} + w^{(2)}}{2} + \frac{z}{2h}(w^{(2)} - w^{(1)}) - \frac{z^2 - h^2}{2E_3}\nabla_i q^i - \frac{z+h}{2h}\beta_3 + \lambda_3,$$
$$\beta_3 = \int\limits_{-h}^{h} \alpha_3 T\,dz, \quad \varphi_3 = \frac{E_3}{2h}, \quad \lambda_3 = \int\limits_{-h}^{z} \alpha_3 T\,dz \tag{1.8}$$

где ε_{33} — деформация поперечного обжатия заполнителя.

Для установления закона изменения по z тангенциальных компонент перемещений в заполнителе обратимся к уравнениям состояния для σ^{i3}. Последние для заполнителя с упругими свойствами, симметричными относительно поверхностей $z = \text{const}$, в случае среднего изгиба представимы в следующей приближенной форме:

$$\sigma^{i3} = q^i = 2A^{ik}\varepsilon_{k3} = A^{ik}\left[(\delta_k{}^s - zb_k{}^s)\,\partial U_s/\partial z + \partial U_3/\partial\alpha^k + b_k{}^s U_s\right] \approx$$
$$\approx A^{ik}\,(\partial U_k/\partial z + \nabla_k U_3) \tag{1.9}$$

где A^{ik} — двухвалентный тензор сдвиговых упругих констант заполнителя. Исходя из формул (1.8) и (1.9), для определения U_k приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial U_k}{\partial z} = d_{ki}q^i - \frac{\omega_k^{(1)} + \omega_k^{(2)}}{2} - \frac{z}{2h}\,(\omega_k^{(2)} - \omega_k^{(1)}) +$$
$$+ \frac{z^2 - h^2}{2E_3}\,\nabla_k\nabla_i q^i + \frac{z + h}{2h}\,\nabla_k\beta_3 - \nabla_k\lambda_3 \tag{1.10}$$

в котором с принятой степенью точности появляющиеся при подстановке соотношения (1.8) в (1.9) величины $\nabla_i w^{(k)}$ заменены величинами $\omega_i^{(k)}$.

Интегрируя далее уранение (1.10) по z, получим

$$U_k = u_k + d_{ki}zq^i - z\,\frac{\omega_k^{(1)} + \omega_k^{(2)}}{2} - \frac{z^2}{4h}(\omega_k^{(2)} - \omega_k^{(1)}) + \frac{1}{2E_3}\left(\frac{z^3}{3} - h^2 z\right)\nabla_k\nabla_i q^i +$$
$$+ \frac{1}{2h}\left(\frac{z^2}{2} + hz\right)\nabla_k\beta_3 - \nabla_k\Lambda_3 \tag{1.11}$$

$$\Lambda_3 = \int_0^z \lambda_3\,dz, \qquad u_k = U_k\,|_{z=0}$$

Удовлетворяя соотношения (1.1) и (1.11) условиям сопряжения внешних слоев с заполнителем по тангенциальным перемешениям

$$u_i^{(1)} - h_{(1)}\omega_i^{(1)} = U_i\,|_{z=-h}, \qquad u_i^{(2)} + h_{(2)}\omega_i^{(2)} = U_i\,|_{z=h}$$

приходим к системе двух алгебраических уравнений, из которой устанавливаются зависимости

$$u_i = \frac{u_i^{(1)} + u_i^{(2)}}{2} + \left(\frac{h_{(2)}}{2} + \frac{h}{4}\right)\omega_i^{(2)} - \left(\frac{h_{(1)}}{2} + \frac{h}{4}\right)\omega_i^{(1)} +$$
$$+ \frac{h}{4}\,\nabla_i\beta_3 + \frac{1}{2}\,\nabla_i\,(\Lambda_3{}^+ + \Lambda_3{}^-), \quad \Lambda_3^\pm = \Lambda_3\,|_{z=\pm h}$$
$$^2/_3 h^3 E_3^{-1}\nabla_n\nabla_i q^i = u_k^{(1)} - u_k^{(2)} + c_{ki}q^i - (h_{(1)} + h)\,\omega_k^{(1)} -$$
$$- (h_{(2)} + h)\,\omega_k^{(2)} + h\nabla_k\beta_3 - \Lambda_k, \qquad c_{ki} = 2hd_{ki}$$
$$\Lambda_k = \int_{-h}^{h} \nabla_k\left(\int_{-h}^{z} \alpha_3 T\,dz\right)dz$$

Внося эти зависимости в соотношение (1.11), получим

$$U_i = f_{(1)}u_i^{(1)} + f_{(2)}u_i^{(2)} + \chi_{(1)}\omega_i^{(1)} + \chi_{(2)}\omega_i^{(2)} + \chi\, d_{is}q^s + U_i^{(T)}$$
$$f_{(k)} = \frac{1}{2} + \delta_{(k)}\frac{z^3}{4h^3} - \delta_{(k)}\frac{3z}{4h}, \qquad \chi = z + \frac{3}{2h^2}\left(\frac{z^3}{3} - h^2 z\right) \tag{1.12}$$
$$\chi_{(k)} = -\delta_{(k)}\left(\frac{h_{(k)}}{2} + \frac{h}{4}\right) - \frac{z}{2} + \delta_{(k)}\frac{z^2}{4h} - \frac{3\,(h_{(k)} + h)}{4h^3}\left(\frac{z^3}{3} - h^2 z\right)$$
$$U_k^{(t)} = \frac{h}{4}\,\nabla_k\beta_3 + \frac{1}{2h}\left(\frac{z^2}{2} + hz\right)\nabla_k\beta_3 - \nabla_k\Lambda_3 +$$
$$+ \frac{3}{4h^3}\left(\frac{z^3}{3} - h^2 z\right)(h\nabla_k\beta_3 - \Lambda_k) + \frac{1}{2}\,\nabla_k\,(\Lambda_3{}^+ + \Lambda_3{}^-)$$

Как следует из (1.8) и (1.5), поле перемещений в заполнителе определяется через восемь двумерных функций $u_i^{(k)}$, $w^{(k)}$, q^i, появляющихся естественным образом при интегрировании по z трехмерных соотношений термоупругости в рамках принятых предположений (1.8) и дальнейшем удовлетворении кинематическим условиям сопряжения внешних слоев с заполнителем. Последующее использование выведенных соотношений (1.8) (1.12), справедливых при среднем изгибе оболочки, позволяет вычислить тангенциальные компоненты тензора деформаций в заполнителе которые в линейном приближении с точностью до $\delta_i{}^k - zb_i{}^k \approx \delta_i{}^k$ оказываются такими:

$$
\begin{gathered}
2\varepsilon_{ik} = \mathbf{r}_k \partial_i \mathbf{U} + \mathbf{r}_i \partial_k \mathbf{U} = E_{ik} + E_{ki} \\
E_{ik} = \nabla_i U_k - b_{ik} U_3 = f_{(1)} \nabla_i u_k^{(1)} + f_{(2)} \nabla_i u_k^{(2)} + \chi_{(1)} \nabla_i \omega_k^{(1)} + \chi_{(2)} \nabla_i \omega_k^{(2)} + \\
+ \chi \nabla_i q^s d_{ks} + \nabla_i U_k^{(T)} - \\
- b_{ik} \left[\frac{w^{(1)} + w^{(2)}}{2} + \frac{z}{2h} \left(w^{(2)} - w^{(1)} \right) - \frac{z^2 - h^2}{2E_3} \nabla_s q^s + (z + h) \beta_3 / 2h^{-1} + \lambda_3 \right]
\end{gathered}
\tag{1.13}
$$

а затем, отказавшись на данном этапе от исходных упрощающих допущений (1.3), по формулам

$$
\begin{aligned}
\sigma^{ik} &= A^{ikjs} \varepsilon_{js} + A^{ik33} \varepsilon_{33} - \beta^{ik} T \\
\sigma^{33} &= A^{3333} \varepsilon_{33} + A^{ik33} \varepsilon_{ik} - \beta^{33} T
\end{aligned}
\tag{1.14}
$$

вычислить тангенциальные компоненты тензора напряжений и уточнить по сравнению с (1.5) напряжение поперечного обжатия в заполнителе.

Изложенная процедура построения уточненной модели упругого деформирования трехслойной оболочки относится к итерационному типу и пределы ее применимости определяются пределом применимости сохранившего свою силу предположения $\sigma^{i3} = q^i(\alpha^k)$, точно имеющего место лишь при строгом выполнении равенств (1.3). От итерационной процедуры построения уточненных моделей в механике пластин и оболочек, предложенной в [7] и примененной в дальнейшем в теории слоистых оболочек ([8] и др.), она отличается принятыми исходными равенствами (1.3), более адекватно отражавшими поле напряжений в заполнителе трехслойных оболочек. Заметим также, что в рамках выражений (1.8), (1.12) вместо линейных соотношений (1.12) можно составить и нелинейные кинематические соотношения квадратичного приближения. Однако их использование для построения линеаризованной теории и постановки задач устойчивости с целью исследования смешанных форм, описанных в [1], представляется нецелесообразным ввиду существенного усложнения отвечающих им соотношений без существенного их уточнения.

2. Введем в рассмотрение векторы заданных усилий и моментов

$$
\mathbf{\Phi}^{(k)} = \Phi_n^{(k)} \mathbf{n} + \Phi_{n\tau}^{(k)} \boldsymbol{\tau} + \Phi_m^{(k)} \mathbf{m}, \quad \mathbf{L}^{(k)} = L_{n\tau}^{(k)} \mathbf{n} + L_n^{(k)} \boldsymbol{\tau}
$$

приложенных к граничным контурам $C_{(k)}$ срединных поверхностей внешних слоев, векторы внешних поверхностных усилий и моментов

$$
\mathbf{X}_{(k)} = X_{(k)}^i \mathbf{r}_i + X_k^{(3)} \mathbf{m}, \quad \mathbf{M}_{(k)} = M_{(k)}^i \mathbf{r}_i
$$

приведенных к поверхностям $\sigma_{(k)}$, вектор объемных сил в заполнителе, заданный разложением

$$
\mathbf{F} = F^i \mathbf{r}_i + F^3 \mathbf{m}
$$

а также вектор приложенных к граничному срезу заполнителя поверхностных сил $\mathbf{p}$, заданный разложением

$$
\mathbf{p} = p_n \mathbf{n} + p_{n\tau} \boldsymbol{\tau} + p^3 \mathbf{m}
$$

($\mathbf{n}$, $\boldsymbol{\tau}$ — векторы единичной нормали и касательной к контуру $C \equiv C_{(k)}$).

Для работы указанных внешних сил на соответствующих им возможных перемещениях с использованием соотношений (1.8), (1.12), можно получить выражение (ds — элемент длины контурной линии C, интегрирование по z всюду далее ведется в пределах от $-h$ до h, суммирование — от $k=1$ до $k=2$)

$$\delta A = \iint\limits_{\sigma}\left[\sum(x^i_{(k)}\delta u^{(k)}_i + x^3_{(k)}\delta w^{(k)} - m^i_{(k)}\delta\omega^{(k)}_i) + Q^i d_{is}\delta q^s - E_3^{-1}Q^3\nabla_i\delta q^i\right]d\sigma +$$
$$+\int\limits_{C}\left[\sum(\varphi^{(k)}_n\delta u^{(k)}_n + \varphi^{(k)}_{n\tau}\delta u^{(k)}_\tau + \varphi^{(k)}_m\delta w^{(k)} + l^{(k)}_{n\tau}\delta\omega^{(k)}_\tau - l^{(k)}_n\delta\omega^{(k)}_n) +\right.$$
$$\left.+ (P_n n^i + P_{n\tau}\tau^i)\,d_{is}\delta q^s - E_3^{-1}P_m\nabla_i\delta q^i\right]ds \qquad (2.1)$$
$$\omega^{(k)}_n = \omega^{(k)}_i n^i,\ \omega^{(k)}_\tau = \omega^{(k)}_i\tau^i,\ u^{(k)}_n = u^{(k)}_i n^i,\ u^{(k)}_\tau = u^{(k)}_i\tau^i$$
$$n^i = \mathbf{n}\mathbf{r}^i,\ \tau^i = \boldsymbol{\tau}\mathbf{r}^i$$
$$x^3_{(k)} = X^3_{(k)} + {}^1/_2\int F^3(1-\delta_{(k)}z/h)\,dz,\quad x^i_{(k)} = X^i_{(k)} + \int F^i f_{(k)}\,dz$$
$$m^i_{(k)} = M^i_{(k)} - \int F^i\chi_{(k)}\,dz,\quad \varphi^{(k)}_n = \Phi^{(k)}_n + \int p_n f_{(k)}\,dz$$
$$\varphi^{(k)}_\tau = \Phi^{(k)}_\tau + \int p_{n\tau}f_{(k)}\,dz,\quad \varphi^{(k)}_m = \Phi^{(k)}_m + {}^1/_2\int p^3(1-\delta_{(k)}z/h)\,dz$$
$$Q^i = \int F^i\chi\,dz,\quad Q^3 = {}^1/_2\int F^3(z^2-h^2)\,dz,\quad l^{(k)}_n = L^{(k)}_n - \int p_n\chi_{(k)}\,dz$$
$$l^{(k)}_{n\tau} = L^{(k)}_{n\tau} + \int p_{n\tau}\chi_{(k)}\,dz,\quad P_n = \int p_n\chi\,dz$$
$$P_{n\tau} = \int p_{n\tau}\chi\,dz,\quad P_m = {}^1/_2\int p^3(z^2-h^2)\,dz$$

Если ввести в рассмотрение обобщенные внутренние усилия и моменты

$$t^{ij}_{(k)} = T^{ij}_{(k)} + \int\sigma^{ij}f_{(k)}\,dz,\quad m^{ij}_{(k)} = M^{ij}_{(k)} - \int\sigma^{ij}\chi_{(k)}\,dz$$
$$S^{ij}_{(k)} = {}^1/_2\int\sigma^{ij}(1-\delta_{(k)}z/h)\,dz,\quad T^{33} = \int\sigma^{33}\,dz \qquad (2.2)$$
$$M^{33} = \int\sigma^{33}z\,dz,\quad N^{ij} = \int\sigma^{ij}\chi\,dz,\quad H^{ij} = {}^1/_2\int\sigma^{ij}(z^2-h^2)\,dz$$

в которых ${T_{(k)}}^{ij}$, ${M_{(k)}}^{ij}$ — контравариантные компоненты тензоров внутренних усилий и моментов во внешних слоях, приведенных к их срединным поверхностям, принять во внимание равенства $2\sigma^{i3}\delta\varepsilon_{i3} = d_{ki}q^k\delta q^i$, то при учете соотношений (1.12), (1.2), (1.7) для вычисления вариации потенциальной энергии деформации оболочки в целом приходим к выражению

$$\delta U = \iint\limits_{\sigma}\left[\int(\sigma^{ij}\delta\varepsilon_{ij} + 2\sigma^{i3}\delta\varepsilon_{i3} + \sigma^{33}\delta\varepsilon_{33})\,dz + \sum(T^{ij}_{(k)}\delta\varepsilon^{(k)}_{ij} + M^{ij}_{(k)}\delta\varkappa^{(k)}_{ij})\right]d\sigma =$$
$$= \iint\limits_{\sigma}\Bigl\{\sum\{t^{ij}_{(k)}\nabla_i\delta u^{(k)}_j - m^{ij}_{(k)}\nabla_i\delta\omega^{(k)}_j + T^{ij}_{(k)}\omega^{(k)}_i\delta\omega^{(k)}_j -$$
$$- [{}^1/_2\delta_{(k)}T^{33} + b_{ij}(T^{ij}_{(k)} + S^{ij}_{(k)})]\,\delta w^{(k)}\} + c_{ij}q^i\delta q^j +$$
$$+ N^{ij}d_{js}\nabla_i\delta q^s + E_3^{-1}(b_{ij}H^{ij} - M^{33})\,\nabla_s\delta q^s\Bigr\}\,d\sigma \qquad (2.3)$$

Исходя из соотношений (1.2), (2.1), (2.3) после традиционных преобразований можно составить вариационное уравнение Лагранжа следующего вида:

$$\sum(l^{(k)}_{n\tau} - g^{(k)}_{n\tau})\,\delta w^{(k)}|_C + \int\limits_{C}\Bigl\{\sum[(\varphi^{(k)}_n - t^{(k)}_n)\,\delta u^{(k)}_n + (\varphi^{(k)}_{n\tau} - t^{(k)}_{n\tau})\,\delta u^{(k)}_\tau +$$
$$+ (\varphi^{(k)}_m - dl^{(k)}_{n\tau}/ds - S^i_{(k)}n_i + dg^{(k)}_{n\tau}/ds)\,\delta w^{(k)} - (l^{(k)}_n - g^{(k)}_n)\,\delta\omega^{(k)}_n] +$$
$$+ [d_n(P_n - N_n) + d_{n\tau}(P_{n\tau} - N_{n\tau}) - E_3^{-1}(b_{ij}H^{ij} - M^{33} + Q^3)]\,\delta q_n +$$
$$+ [d_{n\tau}(P_n - N_n) + d_\tau(P_{n\tau} - N_{n\tau})]\,\delta q_\tau - E_3^{-1}P_m\nabla_i\delta q^i\Bigr\}\,ds +$$
$$+ \iint\limits_{\sigma}\left[\sum(f^i_{(k)}\delta u^{(k)}_i + f^3_{(k)}\delta w^{(k)}) + \mu_i\delta q^i\right]d\sigma = 0 \qquad (2.4)$$
$$d_n = d_{ij}n^in^j,\quad d_{n\tau} = d_{ij}n^i\tau^j,\quad d_\tau = d_{ij}\tau^i\tau^j \qquad (2.5)$$

$$N_n = N^{ij}n_in_j,\ N_{n\tau} = N^{ij}n_i\tau_j,\ t_n^{(k)} = t_{(k)}^{ij}n_in_j$$
$$t_{n\tau}^{(k)} = t_{(k)}^{ij}n_i\tau_j,\ g_n^{(k)} = m_{(k)}^{ij}n_in_j,\ g_{n\tau}^{(k)} = -m_{(k)}^{ij}n_i\tau_j$$
$$S_{(k)}^i = \nabla_j m_{(k)}^{ij} + T_{(k)}^{ij}\omega_j^{(k)} + m_{(k)}^i,\ q_n = q^in_i,\ q_\tau = q^i\tau_i$$
$$f_{(k)} = \nabla_j t_{(k)}^{ij} - S_{(k)}^j b_j{}^i + x_{(k)}^i,\ f_{(k)}^3 = \nabla_i S_{(k)}^i + b_{ij}(T_{(k)}^{ij} + S_{(k)}^{ij}) + {}^1/_2\delta_{(k)}h^{-1}T^{33} + x_{(k)}^3$$
$$\mu_s = \nabla_s[E_3^{-1}(b_{ij}H^{ij} - M^{33} + Q^3)] + \nabla_i(d_{js}N^{ij}) - c_{is}q^i + Q^id_{is}$$

Из построенного вариационного уравнения (2.4) следует система восьми дифференциальных уравнений равновесия

$$f_{(k)}{}^i = 0,\ f_{(k)}{}^3 = 0,\ \mu_s = 0 \tag{2.6}$$

и отвечающие им граничные условия в точках контура C

$$\varphi_n^{(k)} = t_n^{(k)} \text{ при } \delta u_n^{(k)} \neq 0,\ \varphi_{n\tau}^{(k)} = t_{n\tau}^{(k)} \text{ при } \delta u_\tau^{(k)} \neq 0$$
$$\varphi_m^{(k)} - dl_{n\tau}^{(k)}/ds = S_{(k)}^in_i - dg_{n\tau}^{(k)}/ds \text{ при } \delta w^{(k)} \neq 0 \tag{2.7}$$
$$d_n(P_n - N_n) + d_{n\tau}(P_{n\tau} - N_{n\tau}) - E_3^{-1}(b_{ij}H^{ij} - M^{33} + Q^3) =$$
$$= 0 \text{ при } \delta q_n \neq 0,\ d_{n\tau}(P_n - N_n) + d_\tau(P_{n\tau} - N_{n\tau}) = 0 \text{ при } q_\tau \neq 0$$

К последним в свободной угловой точке контура $C_{(k)}$ добавляются статические условия $l_{n\tau}{}^{(k)} - g_{n\tau}{}^{(k)} = 0$ при $\delta w^{(k)} \neq 0$, имеющие тот же смысл, что и в классической теории оболочек Кирхгофа — Лява.

В рамках построенной модели, как следует из контурного интеграла уравнения (2.4), не имеется возможности формулировки статического граничного условия, связанного с $\nabla_i\delta q^i$, т. е. в (2.1), а следовательно, и в (2.4) слагаемое $E_3{}^{-1}P_m\nabla_i\delta q^i$ яляется ненужным.

Соотношения упругости, устанавливающие зависимости между введенными в рассмотрение силовыми факторами $t_{(k)}^{ij}$, $m_{(k)}^{ij}$, $S_{(k)}^{ij}$, T^{33}, M^{33}, N^{ij}, H^{ij} и восемью неизвестными функциями $u_i^{(k)}$, $w^{(k)}$, q^i, составляются на базе формул (2.2) с использованием выражений (1.2), (1.7), (1.12) и не приведенных здесь соотношений упругости для внешних слоев, записываемых в рамках принятой модели Кирхгофа — Лява с учетом температурных воздействий.

Линеаризованные уравнения теории упругой устойчивости трехслойных оболочек в рамках концепции Эйлера о существовании двух смежных форм равновесия в момент потери устойчивости устанавливаются исходя из выведенного комплекса соотношений традиционным способом. Они позволяют исследовать описанные в [1] смешанные формы потери устойчивости в уточненной постановке.

3. Если вернуться к исходным предположениям (1.3) $\sigma^{ij} = 0$, то формулы (2.2) принимают вид

$$t_{(k)}^{ij} = T_{(k)}^{ij},\ m_{(k)}^{ij} = M_{(k)}^{ij},\ S_{(k)}^{ij} = N^{ij} = H^{ij} = 0$$

Так как при этом

$$T^{33} = \int \sigma^{33}dz = E_3(w^{(2)} - w^{(1)}),\quad M^{33} = -{}^2/_3h^3\nabla_iq^i + M_{(t)}^{33}$$
$$M_{(t)}^{33} = E_3\int \alpha_3Tzdz$$

то следующие из (2.5), (2.6) шесть уравнений равновесия внешних слоев

$$f_{(k)}^i = \nabla_jT_{(k)}^{ij} - S_{(k)}^jb_j{}^i + x_{(k)}^i = 0,\ f_{(k)}^3 = \nabla_iS_{(k)}^i + b_{ij}T_{(k)}^{ij} +$$
$$+ {}^1/_2h^{-1}\delta_{(k)}E_3(w^{(2)} - w^{(1)}) + x_{(k)}^3 = 0$$

и два уравнения, имеющие место для заполнителя

$$\mu_s = {}^2/_3E_3^{-1}h^3\nabla_s\nabla_iq^i - E_3^{-1}\nabla_sM_{(t)}^{33} + E_3^{-1}\nabla_sQ^3 - c_{is}q^i + d_{is}Q^i = 0$$

оказываются между собой не связанными и теряют физический смысл. Следовательно, построенный в предыдущих разделах комплекс соотношений не допускает формального перехода к модели трансверсально-мягкого заполнителя. Для этого случая необходимый комплекс соотношений с учетом температурных воздействий на оболочку может быть построен на основе процедуры, изложенной в [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Паймушин В. Н., Бобров С. Н.* О формах потери устойчивости трехслойных пластин и оболочек с внешними слоями из однородных и армированных материалов // Механика композит. материалов. 1985. № 1. С. 79—86.
2. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник. Т. 2. М.: Машиностроение. 1968. 463 с.
3. *Григолюк Э. И., Чулков П. П.* Устойчивость и колебания трехслойных оболочек // Науч. тр. Ин-та механики МГУ. 1973. № 27. 215 с.
4. *Паймушин В. Н., Бобров С. Н.* Критические нагрузки шарнирно опертых прямоугольных пластин симметричного строения при двустороннем сжатии одного внешнего слоя // Изв. вузов. Авиационная техника. 1985. № 2. С. 51—55.
5. *Паймушин В. Н.*, Нелинейная теория среднего изгиба трехслойных оболочек с дефектами в виде участков непроклея // Прикл. механика. 1987. 23. № 11. С. 32—38.
6. *Галимов К. З.* Основы нелинейной теории тонких оболочек. Казань: Изд-во Казан. ун-та. 1975. 328 с.
7. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука. 1974. 446 с.
8. *Пискунов В. Г., Вериженко В. Е.* Линейные и нелинейные задачи расчета слоистых конструкций. Киев: Будiвельник, 1986. 176 с.

Казань

Поступила в редакцию
21.II.1989