Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 1, 1990

УДК 593.3

В. М. Александров, Д. А. Пожарский

НЕКОТОРЫЕ СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ИЗГИБА ПЛАСТИН НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Изучаются задачи о вдавливании одного или двух включений в виде ребер жесткости в бесконечную пластину, лежащую на упругом основании. Из свойств ядер интегральных уравнений этих задач следует, что их решения имеют неинтегрируемые особенности [1]. Путем обобщения метода «больших λ» [2] впервые строится асимптотическое решение интегрального уравнения на двух участках.

Проведенный численный анализ может оказаться полезным при расчетах конструктивных элементов аэродромно-дорожного и гидротехнического строительства, а также сооружений на поверхности ледяного покрова.

1. Пусть в бесконечную $(-\infty < x,\ y < \infty)$ пластину Кирхгофа — Лява, лежащую на основании Винклера, по отрезку $y = 0,\ |x| \leqslant a$ вдавливается силой P тонкое жесткое включение, проседающее на величину $f(x)$. При взаимодействии включения с пластиной возникают контактные усилия $\varphi(x)$, вызывающие разрыв непрерывности обобщенных поперечных сил. Применением к уравнению изгиба пластин на основании Винклера и граничным условиям обобщенного интегрального преобразования Фурье получено [1] интегральное уравнение относительно $\varphi(x)$, которое после введения безразмерных величин имеет вид (штрихи опущены)

$$\int_{-1}^{1} \varphi(y)\, k\left(\frac{y-x}{\lambda}\right) dy = \pi f(x) \quad (|x| \leqslant 1) \tag{1.1}$$

$$k(t) = \int_0^\infty K(u) \cos ut\, du, \quad K(u) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{u^4+1}\sqrt{u^2+\sqrt{u^4+1}}}, \quad \lambda = \frac{1}{a}\left(\frac{d}{s}\right)^{1/4}$$

$$(x = ax',\ y = ay',\ 2f(x) = af'(x'),\ \varphi(y) = \sqrt{ds}\,\varphi'(y'))$$

где d и s — жесткости пластины и основания соответственно. Это уравнение было сведено [1] к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений и доказана ее разрешимость. Здесь, следуя [2], получим явные асимптотические формулы для $\varphi(x)$ в случае $f(x) \equiv 1$. При $\lambda \geqslant 2$ положим

$$k(t) = {}^1/_2 t^2 \ln|t| - F(t) \tag{1.2}$$

$$F(t) = \frac{3}{4}t^2 - \int_0^\infty u^{-3}\left((u^3K(u) - 1)\cos ut + 1 - \frac{1}{2}u^2t^2e^{-u}\right) du$$

Может быть получено разложение

$$F(t) = \sum_{i=0}^\infty a_i t^{2i} + \ln|t| \sum_{i=2}^\infty d_i t^{2i}; \quad a_0 = -1{,}514; \quad a_1 = 0{,}575$$

$$a_2 = 0{,}0242, \quad a_3 = -0{,}00213, \quad d_2 = 0, \quad d_3 = 0{,}000868$$

---

[1] *Исмаил Х. Т.* Краевые задачи изгиба пластин на упругом основании при наличии прямолинейных дефектов: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Одес. гос. ун-т, 1986. 101 с.

Окончательно будем иметь

$$\varphi(x) = \lambda^2 \frac{A_1x^2 + A_2}{(1-x^2)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Big\{ 24a_2A_1\Big(x^2 - \frac{1}{2}\Big) + \frac{1}{\lambda^2}\Big(3A_2\Big(\frac{1}{2} - x^2\Big) + A_1\Big(\frac{19}{8} - 4x^2 - x^4\Big)\Big)(120d_3 \ln\lambda - 74\,d_3 - 120a_3) + \frac{120d_3}{\lambda^2}\Big(A_1\Big(\frac{19}{8}\ln 2 - \frac{143}{48}\Big) + A_2\Big(\frac{3}{2}\ln 2 - \frac{17}{8}\Big) + x^2\Big(A_1\Big(\frac{23}{6} - 4\ln 2\Big) + A_2\Big(\frac{7}{2} - 3\ln 2\Big)\Big) - x^4\Big(A_1\Big(\ln 2 - \frac{17}{6}\Big) - A_2\Big)\Big)\Big\} + O(\lambda^{-4}\ln^2\lambda) \quad (1.3)$$

Постоянные A_1, A_2 определяются из системы двух линейных уравнений [2]. Например, при $\lambda = 2$ имеем $A_1 = -0{,}182$, $A_2 = -0{,}0103$.

При $0 < \lambda < 2$ аппроксимируем $K(u)$ выражением (6.4) из [2], где $A = 0{,}703$, $B = 1{,}48$, $C = 0{,}625$, $D = 0{,}649$, $E = 2{,}26$, $F = 0{,}354$. Погрешность такой аппроксимации на вещественной оси $\theta = 11{,}5\%$, т. е. относительно высока, что вызвано обращением в нуль коэффициента при u^{-5} в асимптотическом разложении $K(u)$ при $u \to \infty$. В итоге найдем

$$\varphi(x) = \psi\Big(\frac{1+x}{\lambda}\Big) + \psi\Big(\frac{1-x}{\lambda}\Big) - \frac{0{,}396}{\lambda^2} \quad (1.4)$$

$$\psi(x) = \frac{0{,}629}{\lambda}\Big(-\frac{e^{-Ax}}{2\sqrt{\pi x^3}} + 0{,}14\frac{e^{-Ax}}{\sqrt{\pi x}} - 0{,}477\chi_E(x) - 0{,}133\chi_F(x) + 0{,}750\chi_0(x)\Big), \quad \chi_G(x) = \sqrt{A-G}\, e^{-Gx} \operatorname{erf}\sqrt{(A-G)x}, \quad G = E, F, 0$$

Погрешности решений (1.3) и (1.4) соответственно не превосходят 5 и $(5+\theta)\%$. При $\lambda = 2$, как видно из приведенных ниже значений $\varphi(x)$, происходит смыкание решений (1.3) и (1.4):

x	0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
$\varphi_{(1.3)}$	0,0106	0,0191	0,0968	0,326	1,09	7,66
$\varphi_{(1.4)}$	0,0122	0,0226	0,106	0,345	1,12	7,40

Отнесенные к a прогибы пластины даются формулой

$$\omega(x, y) = \int\limits_0^\infty \int\limits_{-1}^1 \varphi(\alpha)\cos\frac{u\alpha}{\lambda}\,d\alpha\cos\frac{ux}{\lambda}\exp\Big(\frac{-\sigma_+|y|}{\lambda}\Big) \times \Big(\sigma_+\sin\frac{\sigma_-|y|}{\lambda} + \sigma_-\cos\frac{\sigma_- y}{\lambda}\Big)\frac{du}{\sqrt{u^4+1}}, \quad \sigma_\pm = \frac{\pm u^2 + \sqrt{u^4+1}}{2} \quad (1.5)$$

Внутренний интеграл в (1.5) понимается в смысле конечной части [2, 3]. При известной функции $\omega(x, y)$ легко вычисляются изгибающие моменты M_x и M_y, отнесенные к d/a. В силу симметрии задачи величины $|M_x|$, $|M_y|$ имеют локальный максимум в начале координат. Кроме того, как показывают расчеты, проведенные при разных $\lambda > 0$, на любом луче, выходящем из начала координат, $|M_x|$, $|M_y|$ имеют бесконечное число локальных максимумов, затухая на бесконечности. Как правило, абсолютный максимум — первый или второй локальный. Могут быть построены эпюры равных максимальных моментов, близкие по форме к дугам эллипса. Сечения пластины по этим контурам наиболее опасны при проектировании конструкций. Аналогичный эффект известен в задачах о действии сосредоточенной силы на балку или плиту, лежащую на упругом основании [4, 5]. При этом в (1.5) нужно положить $\varphi(x)$ равной δ-функции Дирака; в точке приложения сосредоточенной силы изгибающие моменты будут бесконечны.

Ниже даны некоторые значения M_x при $\lambda = 5$ и коэффициенте Пуассона $\nu = 0{,}3$. Видно, что локальный максимум на прямой $x = y$ достигается при $x = 0{,}76$, а на оси ординат — при $y = 1{,}36$:

x	0	0,5	0,76	1,0	1,2	2,0
$M_x(x,\ x)$	—1,162	—0,0971	—0,0211	—0,0259	—0,0214	0,00281
y	0	0,5	1,0	1,36	1,5	2,0
$M_x(0,\ y)$	—1,162	—0,151	0,0806	0,101	0,100	0,0830

Отметим также, что вдоль ребра изгибающие моменты значительно больше, чем на линии, ему перпендикулярной.

2. Интегральное уравнение задачи о вдавливании в бесконечную пластину, лежащую на основании Винклера, двух ребер по отрезкам $y = 0$, $a \leqslant |x| \leqslant b$, очевидно, можно разбить на четный и нечетный случаи:

$$\int_k^1 \varphi_\pm(y)\left[k\left(\frac{y-x}{\lambda}\right) \pm k\left(\frac{y+x}{\lambda}\right)\right] dy = \pi f_\pm(x) \quad (k \leqslant x \leqslant 1) \tag{2.1}$$

$$2\varphi_\pm(x) = \varphi(x) \pm \varphi(-x), \quad 2f_\pm(x) = f(x) \pm f(-x)$$

$$k = a / b, \quad \lambda = (d/s)^{1/4}/b$$

Для решения (2.1) методом «больших λ» разовьем идеи работы [2]. Учитывая свойства функции $k(t)$ [2], перепишем (2.1) в виде

$$\int_k^1 \varphi_\pm^*(y)\left[\frac{(y-x)^2}{2}\ln\frac{|y-x|}{\lambda} \pm \frac{(y+x)^2}{2}\ln\frac{(y+x)}{\lambda}\right] dy = \pi G_\pm(x)$$

$$(k \leqslant x \leqslant 1) \tag{2.2}$$

$$\lambda^2 \varphi_\pm{}^*(x) = \varphi_\pm(x)$$

$$G_\pm(x) = f_\pm(x) + \lambda^2 \int_k^1 \varphi_\pm{}^*(y)\left[F\left(\frac{y-x}{\lambda}\right) \pm F\left(\frac{y+x}{\lambda}\right)\right] dy$$

Введем функции (в фигурных скобках верхний или нижний член берется соответственно для верхнего или нижнего индекса)

$$\psi_\pm(x) = \varphi_\pm{}^*(x) - \frac{\operatorname{sgn} x\,(\alpha_\pm + \beta_\pm x^2)}{g^3(x)}\begin{Bmatrix} x \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{2.3}$$

$$g(x) = \sqrt{(1-x^2)(x^2-k^2)}$$

причем $\alpha_\pm$ и $\beta_\pm$ определяются так, чтобы функции $\psi_\pm(x)$ имели интегрируемые особенности в точках $\pm k$, ± 1.

Подставим (2.3) в (2.2) и, дифференцируя полученное уравнение 3 раза по x, придем относительно $\psi_\pm(x)$ к уравнениям известного типа [6], решая которые, получим формулы обращения интегрального оператора (2.2)

$$\varphi_\pm{}^*(x) = \left(\frac{2(Q_\pm + R_\pm x^2 + T_\pm x^4)}{g^3(x)} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\pi g(x)}\int_k^1 \frac{g(y)\,G_\pm'''(y)}{y^2-x^2}\begin{Bmatrix} 1 \\ y \end{Bmatrix} dy\right)\begin{Bmatrix} |x| \\ \operatorname{sgn} x \end{Bmatrix} \quad (k \leqslant x \leqslant 1) \tag{2.4}$$

Постоянные $Q_\pm$, $R_\pm$, $T_\pm$ находятся из систем трех линейных уравнений (опущенных здесь ввиду своей громоздкости), для вывода которых нужно воздействовать на (2.2) следующими операторами:

$$\begin{Bmatrix} x \\ 1 \end{Bmatrix}\frac{dx}{g(x)}\int_k^1 \cdot, \quad \begin{Bmatrix} x \\ 1 \end{Bmatrix}\frac{x^n\,dx}{g^3(x)}\int_k^1 \cdot \quad (n = 0{,}2)$$

При этом возникает необходимость вычисления интегралов

$$b_n = \int_k^1 t^{2n} \frac{dt}{g^3(t)},$$

$$c_n = \frac{\operatorname{sgn} y}{\pi} \int_k^1 t^{2n} \ln\left|\frac{t-y}{t+y}\right| \frac{dt}{g^3(t)} \qquad (k < |y| < 1, n = 0, 1 \ldots) \tag{2.5}$$

Интегралы (2.5) понимаются в смысле конечной части. При $n \geqslant 2$ они выражаются через b_0, b_1, c_0, c_1 и эллиптические интегралы. Ниже приводятся их значения для $n = 0, 1$, рассчитанные на ЭВМ:

k	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
$-b_0$	97,15	9,689	3,097	1,409	0,7676
b_1	1,735	0,8106	0,4862	0,3233	0,2271
$-c_0$	2,402	2,814	4,055	8,467	57,73
$-c_1$	0,9233	0,9307	1,115	1,628	0,3192

Разыскивая $\varphi_\pm{}^*(x)$ в форме

$$\varphi_\pm{}^*(x) = \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{[i/2]} \varphi_{2i,j}^{\pm}(x)\, \lambda^{-2i} \ln^j \lambda + O(\lambda^{-4} \ln^2 \lambda) \tag{2.6}$$

подставляя (2.6) в (2.4) и приравнивая члены при одинаковых степенях $\lambda \ln \lambda$, последовательно определим функции-коэффициенты в разложении (2.6).

Например, при $f_+(x) \equiv 1$ найдем, что

$$\varphi_{00}{}^+(x) = \frac{2|x|}{g^3(x)} (Q_+ + R_+ x^2 + T_+ x^4), \quad \varphi_{20}{}^+(x) = \frac{48 a_2 |x|}{g(x)} T_+ h_2(x)$$

$$\varphi_{21}{}^+(x) \equiv \varphi_{42}{}^+(x) \equiv 0$$

$$\varphi_{41}{}^+(x) = -\frac{240 d_3 |x|}{g(x)} \left(T_+ h_4(x) + 3\left(R_+ + T_+ \frac{3}{2}(1+k^2)\right) h_2(x)\right)$$

$$\varphi_{40}{}^+(x) = \frac{|x|}{g(x)} \left((240 a_3 + 228 d_3) T_+ + 120 d_3 \left(\frac{4Q_+}{(1-k^2)^2} + \frac{2(1+k^2)}{(1-k^2)^2} R_+ + f_0 T_+\right)\right) h_4(x) +$$
$$+ \frac{|x|}{g(x)} \left((720 a_3 + 324 d_3)\left(R_+ + T_+ \frac{3}{2}(1+k^2)\right)\right) h_2(x) + 240 d_3 \left(R_+ + \frac{3}{2} T_+\right) +$$
$$+ 120 d_3 \left(\frac{2(1+k^2)}{(1-k^2)^2} Q_+ + f_0 R_+ - f_1 T_+\right)\Bigg) - \frac{480 d_3 |x|}{\pi g(x)} \int_k^1 \frac{g(y)\,dy}{y^2 - x^2} (f_2 Q_+ + f_3 R_+ + f_4 T_+) -$$
$$- \frac{1440 d_3 |x|}{\pi g(x)} \int_k^1 \frac{y^2 g(y)\,dy}{y^2 - x^2} (c_1 Q_+ + f_2 R_+ + f_3 T_+) \tag{2.7}$$

$$h_2(x) = x^2 - \frac{1+k^2}{2}, \quad h_4(x) = x^4 - x^2 \frac{1+k^2}{2} + \frac{(1-k^2)^2}{8}$$

$$f_0 = \ln \frac{1-k^2}{4} + \frac{2(1+k^2)}{(1-k^2)^2}, \quad f_1 = \frac{(1+k^2)(6k^2 - 5k^4 - 5)}{2(1-k^2)^2} - \frac{3}{2}(1+k^2) \ln \frac{1-k^2}{4}$$

$$f_2 = K - k^2 c_0 + (1+k^2) c_1, \; f_3 = K - E - k^2 c_1 + (1+k^2) f_2, \; f_4 = K\left(\frac{8}{3} + \frac{7k^2}{3} + \frac{3k^4}{4}\right) -$$
$$- \frac{5}{3} E(1+k^2) - c_0 k^2 (1 + k^2 + k^4) + c_1 (1+k^2)(1+k^4)$$

Здесь $K = K(k)$ и $E = E(k)$ — полные эллиптические интегралы. Через эллиптические интегралы можно также выразить и сингулярные интегралы в формуле для $\varphi_{40}^*(x)$ [7].

Решение (2.6) при $\lambda \geqslant 2$ дает погрешность не более 5 %.

Исходя из (2.4), выведем асимптотические формулы для усилий $P_\pm$ и моментов $M_\pm$, действующих на включения. Например, в четном случае

$$P_+ = \int_k^1 \varphi_+(x)\,dx = -\lambda^2 \pi T_+$$

$$M_+ = \int_k^1 x\varphi_+(x)\,dx = 2\lambda^2 (Q_+ b_1 + R_+ b_2 + T_+ b_3) + \frac{2\lambda^2}{\pi} \int_k^1 \frac{x^2\,dx}{g(x)} \int_k^1 \frac{g(y)\,G_+'''(y)}{y^2 - x^2}\,dy \tag{2.8}$$

3. Главный член асимптотики решения интегрального уравнения (2.1) при малых λ [8] составим, комбинируя точное решение задачи о полубесконечном ребре и задачи об одном ребре конечной длины, изученной выше. При этом в возникающих уравнениях Виннера — Хопфа функция $K(u)$ из (1.1), как и ранее, аппроксимируется легко факторизуемой функцией (6.4) из [2]. В случаях $f_+(x) \equiv 1$, $f_-(x) = \operatorname{sgn} x$ при $\lambda < 1 - k$ справедливо представление

$$\varphi_\pm(x) = \psi\left(\frac{|x| - k}{\lambda}\right)\begin{Bmatrix} 1 \\ \operatorname{sgn} x \end{Bmatrix} + \psi\left(\frac{1 + x}{\lambda}\right) \pm \psi\left(\frac{1 - x}{\lambda}\right) - \frac{0{,}396}{\lambda^2}\begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.1}$$

где $\psi(x)$ дается формулой (1.4).

Усилия $P_\pm$ и моменты $M_\pm$, приложенные к включениям, при малых λ можно найти численным интегрированием в смысле конечной части выражений (3.1).

Ниже даны некоторые значения $\varphi_+(x)$, рассчитанные при помощи соотношений (2.7) при $\lambda = 5$ (верхняя строка, $Q_+ = 0{,}006763$, $R_+ = 0{,}01156$, $T_+ = -0{,}01378$) и по формуле (3.1) при $\lambda = 0{,}5$ (нижняя строка); $k = 0{,}1$:

x	0,2	0,4	0,5	0,6	0,7	0,9
$\varphi_+(x)$	14,73	3,691	2,876	2,586	2,635	5,377
$-\varphi_+(x)$	4,299	1,321	1,154	1,153	1,318	4,284

Расчеты показывают, что при $\lambda = 0{,}5$ у $\varphi_-(x)$ на интервале $k < x < 1$ изменяется знак, что свидетельствует о возможности отрыва включения от пластины. Видимо, это связано с тем, что теория Кирхгофа — Лява плохо описывает напряженное состояние вблизи интенсивной поперечной нагрузки [9]. При $\lambda > 2$ смены знака $\varphi_-(x)$ не наблюдается.

При $\lambda = 5$ и $k = 0{,}1$ по формулам (2.8) найдем: $P_+ = 1{,}082$, $M_+ = 1{,}413$, при $\lambda = 0{,}5$ и $k = 0{,}1$ имеем: $P_+ = 0{,}427$, $M_+ = 0{,}992$.

Численный анализ позволяет сделать вывод, что при $\lambda \geqslant 2$ и фиксированном k взаимовлияние включений не меняется заметно с ростом λ. В то же время можно доказать, что при $\lambda < \lambda^* < 1$ функция $\varphi_+(x)$ отличается от $\varphi(x)$ менее чем на 1 %, т. е. включения практически не влияют одно на другое ($\varphi(x)$ — решение задачи для одного ребра, расположенного на отрезке $y = 0$, $k \leqslant x \leqslant 1$).

Наконец, имея формулы для $\varphi_\pm(x)$ и выражения для безразмерных прогибов пластины $\omega^\pm(x, y)$ типа (1.5), рассчитаем безразмерные изгибающие моменты $M_x^\pm$, $M_y^\pm$ в некоторой окрестности включений. В целом выводы, сделанные относительно этих моментов в разд. 1, остаются верными и здесь. Так, при $k = 0{,}1$ и $\lambda = 5$ функция $|M_x^+|$ имеет локальный экстремум в начале координат, где $|M_x^+| = 9{,}2 \cdot 10^3$, а расстояние между локальными экстремумами на этой полуоси значительно возрастает по сравнению с задачей о вдавливании одного ребра при $\lambda = 5$.

Развитая выше методика переносится на решение смешанных задач изгиба пластины в виде бесконечной полосы [2] в случае двух участков смены граничных условий.

Заметим также, что интегральное уравнение (2.1) со знаком минус в точности соответствует задаче о вдавливании ребра в пластину, лежащую на основании Винклера и имеющую вид полуплоскости, на границе которой поставлены условия свободного опирания. Если же край такой пластины жестко защемлен или свободен от усилий и моментов, то ядра соответствующих интегральных уравнений не удается представить так, как это сделано в (2.1). Тем не менее при достаточно малых λ эти уравнения можно решать методом последовательных приближений, взяв в качестве нулевого приближения главный член асимптотики (3.1) со знаком минус.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Онищук О. В., Попов Г. Я., Фаршайт П. Г.* Об особенностях контактных усилий при изгибе пластин с тонкими включениями // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 2. С. 293—302.
2. *Зеленцов В. Б.* О решении некоторых интегральных уравнений смешанных задач теории изгиба пластин // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 6. С. 983—991.
3. Функциональный анализ / Под ред. С. Г. Крейна. М.: Наука, 1972. 544 с.
4. *Власов В. З., Леонтьев Н. Н.* Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Физматгиз, 1960. 491 с.
5. *Коренев Б. Г., Черниговская Е. И.* Расчет плит на упругом основании. М.: Госстройиздат, 1962. 355 с.
6. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. М. Л.: Гостехиздат, 1949. 270 с.
7. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
8. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
9. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 635 с.

Москва

Поступила в редакцию
72.I.1988