Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 1, 1990

УДК 539.3

© 1990 г.

А. А. Фонарев

ОБ ОТЫСКАНИИ ВЫПУЧЕННЫХ ФОРМ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ

Рассматривается построение выпученных форм круглой пластины с использованием решений бесконечной системы нелинейных алгебраических уравнений, которая появляется при подстановке в нелинейные уравнения Кармана их нетривиального решения, представимого, по предположению, в виде рядов. Показано, что можно найти приближения к решению системы с использованием проекционного метода и проекционно-итерационного процесса в банаховом пространстве последовательностей, ряды из элементов которых абсолютно сходятся. Приводятся результаты расчетов.

1. Осесимметричная деформация тонкой круглой упругой пластины постоянной толщины, находящейся в равновесии под равномерной сжимающей нагрузкой, приложенной вдоль края, описывается нелинейными уравнениями Кармана [1], сводящимися к системе уравнений

$$GQ(r) + \lambda^2 (1 - P(r))\, Q(r) = 0,\quad GP(r) = -{}^1\!/_2 Q^2(r),\quad 0 < r < 1 \tag{1.1}$$

$$G = r^{-3} d\,(r^3 d/dr)/dr$$

где r — безразмерный радиус, λ^2 — безразмерный параметр нагрузки, Q — безразмерная производная по радиусу поперечного перемещения, $(P - 1)$ — безразмерное радиальное напряжение.

Предположение о симметрии и гладкости приводит к условиям

$$Q'(0) = 0,\quad P'(0) = 0 \tag{1.2}$$

Если край $r = 1$ пластины жестко закреплен, то должны выполняться дополнительные граничные условия

$$Q(1) = 0,\quad P(1) = 0 \tag{1.3}$$

При любом λ краевая задача (1.1)—(1.3) имеет тривиальное решение $Q(r) \equiv 0$, $P(r) \equiv 0$ (невыпученная форма). Другие (нетривиальные) действительные решения называются выпученными формами.

В результате линеаризации задачи (1.1)—(1.3) около невыпученной формы получается линейная краевая задача второго порядка

$$G\bar{Q} + \lambda^2 \bar{Q} = 0,\quad 0 < r < 1;\quad \bar{Q}'(0) = \bar{Q}(1) = 0,\quad \bar{P} \equiv 0$$

которая имеет при $\lambda = \lambda_n$, где λ_n — n-й нуль функции Бесселя J_1, нетривиальные решения

$$\bar{Q}_n = r^{-1} J_1(\lambda_n r),\quad J_1(\lambda_n) = 0\quad (n = 1, 2, \ldots)$$

использующиеся далее для построения выпученных форм пластины.

Известно, что выпученные формы существуют при $\lambda > \lambda_1$ (см., например, [2] и библиографию в [2]).

Предположим, что нетривиальное решение $Q(r)$, $P(r)$ задачи (1.1)—(1.3) представляется рядами

$$Q(r) = \varepsilon \Sigma_a,\quad P(r) = \varepsilon^2 \Sigma_b;\quad \Sigma_a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \bar{Q}_n,\quad a_1 = 1,\quad \Sigma_b = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \bar{Q}_n \tag{1.4}$$

где ε принадлежит окрестности нуля вещественной прямой R, $\varepsilon \neq 0$. Тогда подстановка рядов (1.4) в первое уравнение (1.1) дает

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n (\lambda^2 - \lambda_n^2) \bar{Q}_n + (\lambda^2 - \lambda_1^2) \bar{Q}_1 - \lambda^2 \varepsilon^2 \Sigma_a \Sigma_b = 0$$

После умножения этого равенства на $r^3 \bar{Q}_m (r)$ и интегрирования по r от 0 до 1 в силу ортогональности функций $\bar{Q}_1$, $\bar{Q}_2$, ... получаются выражения

$$a_n = \frac{\lambda^2 \varepsilon^2 I_n}{(\lambda^2 - \lambda_n^2) \| \bar{Q}_n \|^2} \quad (n = 2, 3, \ldots), \quad \lambda^2 = \lambda_1^2 \frac{\| \bar{Q}_1 \|^2}{\| \bar{Q}_1 \|^2 - \varepsilon^2 I_1} \tag{1.5}$$

$$I_n = \int_0^1 r^3 \Sigma_a \Sigma_b \bar{Q}_n \, dr, \quad \| \bar{Q}_n \|^2 = \int_0^1 r J_1^2 (\lambda_n r) \, dr = \frac{1}{2} J_0^2 (\lambda_n) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Аналогично при подстановке рядов (1.4) во второе уравнение (1.1) получаются выражения

$$b_n = \frac{1}{2\lambda_n^2 \| \bar{Q}_n \|^2} \int_0^1 r^3 \Sigma_a^2 \bar{Q}_n \, dr \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1.6}$$

Выражения (1.5), (1.6) дают бесконечную систему нелинейных алгебраических уравнений относительно a_2, a_3, ... и b_1, b_2, ..., которая будет исследоваться далее. При этом будет показано, что система имеет решение в некоторой правой полуокрестности точки λ_1.

Если в рядах (1.4) a_2, a_3, ... и b_1, b_2, ... — решения системы (1.5), (1.6), то ряды (1.4) дают нетривиальное решение (или выпученную форму) задачи (1.1)—(1.3) с параметром нагрузки λ^2, получающимся при подстановке в правую часть второй формулы (1.5) решений системы (1.5), (1.6). Получающееся при этом решение задачи (1.1)—(1.3) формально удовлетворяет уравнениям (1.1), ибо сходимость получающихся рядов (1.4) и рядов из производных членов этих рядов не исследуется.

Если краевая задача (1.1)—(1.3) изучается в окрестности точки $\lambda = \lambda_m$ ($m \geqslant 2$), а не $\lambda = \lambda_1$, то этот случай рассматривается аналогично, достаточно взять $a_m = 1$ вместо $a_1 = 1$ в (1.4).

2. Исследуем бесконечную систему нелинейных алгебраических уравнений (1.5), (1.6).

Пусть l_1 — банахово пространство последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$ вещественных чисел, для которых сходится ряд $|x_1| + |x_2| + \ldots$, с нормой $\|x\| = |x_1| + |x_2| + \ldots$, и пусть $D \equiv \{x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_1 \colon x_1 = 1, \ |x_2| + |x_3| + \ldots \leqslant C\}$, где C — произвольное фиксированное положительное число.

Рассмотрим отображение B из D в множество последовательностей, ставящее в соответствие элементу $x = (x_1, x_2, \ldots) \in D$ последовательность $Bx = ((Bx)_1, (Bx)_2, \ldots)$, получающуюся при подстановке в правую часть формулы (1.6) при $n = 1, 2, \ldots$ элементов последовательности x вместо a_1, a_2, ... Для каждого $n \geqslant 1$ имеем

$$|(Bx)_n| \leqslant \left(\frac{1 + C}{\lambda_n J_0 (\lambda_n)} \right)^2 \int_0^1 |J_1 (\lambda_n r)| \, dr \leqslant \frac{3^{3/4} (1 + C)^2}{2\lambda_n^2 |J_0 (\lambda_n)|^{3/2}}$$

ибо для всех $t \geqslant 0$ имеем $|J_1 (t)| \leqslant 1$, что с использованием неравенства Гёльдера дает

$$\int_0^1 |J_1(\lambda_n r)|\,dr \leqslant \int_0^1 r^{-1/4}(r^{1/4}|J_1(\lambda_n r)|^{1/2})\,dr \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_0^1 r^{-1/3}\,dr\right)^{3/4}\left(\int_0^1 rJ_1^2(\lambda_n r)\,dr\right)^{1/4} = \frac{3^{3/4}}{2}|J_0(\lambda_n)|^{1/2}, \qquad \forall n$$

Следовательно, в силу сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2}|J_0(\lambda_n)|^{-3/2} \tag{2.1}$$

(этот ряд сходится, ибо $J_0(\lambda_n) = (2/(\pi\lambda_n))^{1/2}(\cos(\lambda_n - \pi/4) + O(\lambda_n^{-1}))$ и $\lambda_n = (n + 1/4)\pi + O(n^{-1})$ для больших значений n, см. [3]) $Bx \in l_1$ и существует такая постоянная $C_1 > 0$, не зависящая от $x \in D$, что $\|Bx\| \leqslant C_1$.

Далее, для всех $x, y \in D$ имеем

$$|(Bx - By)_n| \leqslant 2\frac{1+C}{\lambda_n^2 J_0^2(\lambda_n)}\int_0^1\left(\sum_{i=2}^{\infty}|(x_i - y_i)J_1(\lambda_i r)|\right)|J_1(\lambda_n r)|\,dr \leqslant$$
$$\leqslant 3^{3/4}\frac{1+C}{\lambda_n^2|J_0(\lambda_n)|^{3/2}}\|x - y\|$$

при $n \geqslant 1$. Значит, существует такая постоянная $C_2 > 0$, что $\|Bx - By\| \leqslant C_2\|x - y\|$, $\forall x,\ y \in D$.

Пусть $l_1 \times R$ — банахово пространство пар $(x, t) \in l_1 \times R$, $x \in l_1$ и $t \in R$, с нормой $\|(x, t)\| = \|x\| + |t|$.

Определим на $D \times R \subset l_1 \times R$ вещественнозначную функцию T, ставящую в соответствие элементу $(x, t) \in D \times R$ $(x \in D)$ число $T(x, t)$, получающееся подстановкой в правую часть второй формулы (1.5) элементов последовательностей x и Bx вместо $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$ соответственно и t вместо ε. Существуют такие положительные числа ε_1, C_3 и C_4, что $|T(x, \varepsilon)| \leqslant C_3$ и $|T(x, \varepsilon) - T(y, \varepsilon)| \leqslant C_4\varepsilon^2\|x - y\|$ для всех $\varepsilon \in [-\varepsilon_1, \varepsilon_1]$ и $x, y \in D$.

Определим также отображение A из $D \times R$ в множество последовательностей, ставящее в соответствие элементу $(x, t) \in D \times R$ последовательность $A(x, t) = ((A(x, t))_1, (A(x, t))_2, \ldots)$ с $(A(x, t))_1 = 1$ и $(A(x, t))_n$ $(n \geqslant 2)$, получающимися подстановкой в правую часть первой формулы (1.5) при $n = 2, 3, \ldots$ элементов последовательностей x и Bx вместо $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$ соответственно и чисел $T(x, t)$ и t вместо λ^2 и ε соответственно. Существуют такие постоянные $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1]$, $C_5 > 0$, $C_6 > 0$, что $A(x, \varepsilon) \in l_1$, $\|A(x, \varepsilon)\| \leqslant 1 + C_5\varepsilon^2$ и $\|A(x, \varepsilon) - A(y, \varepsilon)\| \leqslant C_6\varepsilon^2\|x - y\|$ для всех $\varepsilon \in [-\varepsilon_2, \varepsilon_2]$ и $x, y \in D$. Следовательно, существуют такие постоянные $\varepsilon_0 \in (0, \varepsilon_2]$ и $q \in (0, 1)$, что $A(x, \varepsilon) \in D$ и $\|A(x, \varepsilon) - A(y, \varepsilon)\| \leqslant q\|x - y\|$ для всех $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ и $x, y \in D$. И при этом отображение $A(x, \varepsilon)$ непрерывно по ε на $D \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$.

Отметим, что можно получить явные выражения постоянных C_i $(i = 1, \ldots, 6)$ через C и сумму ряда (2.1).

В силу принципа неподвижной точки [4] существует такое отображение x_0: $[-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \to D$, что $A(x_0(\varepsilon), \varepsilon) = x_0(\varepsilon)$ для всех $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, причем такое отображение единственное и непрерывное. И при каждом фиксированном $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ элемент $x_0(\varepsilon)$ — предел последовательности $v^{i+1} = A(v^i, \varepsilon)$ $(i = 0, 1, \ldots)$ с произвольным $v^0 \in D$. Далее, если в рядах (1.4) в качестве $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$ взяты элементы последовательностей $x_0(\varepsilon)$ и $Bx_0(\varepsilon)$, то эти ряды дают решение краевой задачи (1.1)—(1.3) с параметром нагрузки $\lambda^2 = T(x_0(\varepsilon), \varepsilon)$ ($\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$).

Систему (1.5), (1.6) не удается решить точно, поэтому далее рассматриваются приближенные методы ее решения.

Зафиксируем любое $i \geqslant 2$ и рассмотрим подпространство E_i пространства l_1, состоящее из последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_1$ с $x_n = 0$ для всех $n > i$. Определим линейный оператор проектирования F_i: $l_1 \to E_i$, ставящий в соответствие элементу $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_1$ элемент $F_i x = y \equiv (y_1, y_2, \ldots)$ с $y_n = x_n$ для $n = 1, \ldots, i$ и $y_n = 0$ для $n > i$. Имеем $\| F_i x \| \leqslant \| x \|$, $\forall x \in l_1$.

Введем множество $D_i = D \cap E_i$ и отображение $B_i : D \to E_i$, $B_i x = F_i B(F_i x)$ для $x \in D$.

Определим функцию T_i: $D \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \to R$, ставящую в соответствие элементу $(x, t) \in D \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ число $T_i(x, t)$, получающееся при подстановке в левую часть второй формулы (1.5) элементов последовательностей $F_i x$ и $B_i x$ вместо $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$ соответственно и t вместо ε. Определим также отображение A_i: $D \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \to E_i$, ставящее в соответствие элементу $(x, t) \in D \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ элемент $A_i(x, t) = z \equiv (z_1, z_2, \ldots) \in E_i$ с $z_1 = 1$ и z_n ($n = 2, \ldots, i$), получающимися в результате подстановки в правую часть первой формулы (1.5) при $n = 2, \ldots, i$ элементов последовательностей $F_i x$ и $B_i x$ вместо $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$, чисел $T_i(x, t)$ и t вместо λ^2 и ε соответственно. Имеем $A_i(x, \varepsilon) \in D_i$ и $\| A_i(x, \varepsilon) - A_i(y, \varepsilon) \| \leqslant q \| x - y \|$ для всех $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ и $x, y \in D$, где число q такое же, как выше. Следовательно, из теоремы в [5] вытекает следующая теорема о сходимости последовательностей проекционного метода (т. е. сходимости $x^i(\varepsilon)$) и проекционно-итерационного процесса (т. е. сходимости $y^i(\varepsilon)$), сочетающего в себе проекционный метод и итерационный процесс, к решению $x_0(\varepsilon)$ уравнения $A(x, \varepsilon) = x$ ($x \in D$).

Теорема. Для каждого $i \geqslant 2$ существует такое отображение $x^i: [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \to D_i$, что $A_i(x^i(\varepsilon), \varepsilon) = x^i(\varepsilon)$ для всех $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, причем такое отображение единственное и непрерывное; последовательность отображений $x^i(\varepsilon)$ ($i = 2, 3, \ldots$) сходится равномерно к $x_0(\varepsilon)$ на $[-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$; для любого отображения $y^1 : [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \to D_2$ последовательность отображений $y^{i+1}(\varepsilon) = A_{i+1}(y^i(\varepsilon), \varepsilon)$ ($i = 1, 2, \ldots$) сходится равномерно к $x_0(\varepsilon)$ на $[-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$.

Замечание. При фиксированном $i \geqslant 2$ отображение $x^i(\varepsilon)$ из теоремы может быть найдено с использованием итерационного процесса

$$z^{j+1}(\varepsilon) = A_i(z^j(\varepsilon), \varepsilon) \quad (j = 0, 1, \ldots)$$

с произвольным начальным отображением $z^0 : [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \to D_i$, причем справедлива следующая оценка скорости сходимости:

$$\| z^j(\varepsilon) - x^i(\varepsilon) \| \leqslant 2(1 + C) q^j/(1 - q) \quad (j = 0, 1, \ldots)$$

для всех $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$.

Теорема и замечание позволяют отыскивать приближения к решению системы (1.5), (1.6), по которым можно построить приближения к выпученной форме задачи (1.1)—(1.3).

В соответствии с изложенным были проведены расчеты с использованием проекционного метода и проекционно-итерационного процесса на

ЭВМ ЕС-1033 и ЕС-1061 с двойной точностью. Результаты показали, что ε_0 не является малым числом.

Приведем некоторые результаты, полученные проекционным методом. В этом случае расчеты проводились при фиксированных ε в соответствии с замечанием. Расчет прекращался при

$$\max_{n=2,\ldots,i} |(z^{j+1}(\varepsilon) - z^j(\varepsilon))_n| \leqslant \delta$$

где δ — заданная точность (см. $z^j(\varepsilon)$ в Замечании), при этом в качестве $z^0(\varepsilon) = ((z^0(\varepsilon))_1, (z^0(\varepsilon))_2, \ldots) \in D_i$ брался элемент с $(z^0(\varepsilon))_n = 0$ для $n \geqslant 2$. Если в результате совершалось m итераций, то $z^m(\varepsilon) = (a_1{}^m, a_2{}^m, \ldots)$ и $B_i z^{m-1}(\varepsilon) = (b_1^{m-1}, b_2^{m-1}, \ldots)$ использовались для построения приближений к выпученным формам задачи (1.1)—(1.3): приближения к выпученным формам рассматривались в виде сумм

$$Q_i = \varepsilon \sum_{n=1}^{i} a_n{}^m \bar{Q}_n, \quad P_i = \varepsilon^2 \sum_{n=1}^{i} b_n^{m-1} \bar{Q}_n \tag{2.2}$$

и вычислялись величины

$$\gamma_1 = \max_{k=1,\ldots,49} |GQ_i(r) + \lambda^2 (1 - P_i(r)) Q_i(r)| |_{r=r_k}$$

$$\gamma_2 = \max_{k=1,\ldots,49} |GP_i(r) + {}^1/_2 Q_i^2(r)| |_{r=r_k}$$

$$(\lambda^2 = T_i(z^{m-1}(\varepsilon), \varepsilon), \; r_k = k/50)$$

которые естественно называть ошибками, ибо они получаются при подстановке приближений (2.2) к выпученным формам в уравнения (1.1).

В таблице приведены результаты расчетов при $\delta = 10^{-15}$.

ε	i	γ_1	γ_2	m	λ
0,5	55	$1{,}19 \cdot 10^{-5}$	$2{,}33 \cdot 10^{-5}$	8	3,8493
0,5	60	$8{,}5 \cdot 10^{-6}$	$2{,}1 \cdot 10^{-5}$	8	3,8493
1	60	$7{,}06 \cdot 10^{-5}$	$8{,}55 \cdot 10^{-5}$	11	3,9029
2	5	0,133	$9{,}95 \cdot 10^{-2}$	20	4,1300
2	20	$1{,}73 \cdot 10^{-2}$	$1{,}04 \cdot 10^{-2}$	20	4,1301
2	30	$7{,}1 \cdot 10^{-3}$	$4{,}26 \cdot 10^{-3}$	20	4,1301
2	60	$6{,}53 \cdot 10^{-4}$	$3{,}71 \cdot 10^{-4}$	20	4,1301
2,3	60	$1{,}06 \cdot 10^{-3}$	$5{,}1 \cdot 10^{-4}$	24	4,2343

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kármán T.* Festigkeitsprobleme im Maschinenbau // Encyklopädie der math. Wissenschaften. Bd. 4. Leipzig, 1910. S. 348—352.
2. *Волковысский Дж. Х.* Доказательство существования выпученных форм круглых пластин при помощи теоремы Шаудера о неподвижной точке // Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения. М.: Мир, 1974. С. 35—45.
3. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций, Ч. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1949. 798 с.
4. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 744 с.
5. *Fonarev A. A.* On the approximation scheme // Abstrs. of Paper Presented to the Amer. Math. Soc.: 87 Annu meet. 1981. V. 2. № 3. P. 381.

Москва

Поступила в редакцию 17.XI.1988