УДК 539.3

А. Г. Николаев, В. С. Проценко

ПЕРВАЯ И ВТОРАЯ ОСНОВНЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ДВУСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ, ОГРАНИЧЕННЫХ ПОВЕРХНОСТЯМИ СФЕРЫ И СФЕРОИДА

Метод построения решений основных краевых задач для однородного уравнения Ламе для многосвязных областей, ограниченных каноническими поверхностями цилиндрической и сфероидальной систем координат [1], распространяется на области с другой геометрией. Рассматриваемые задачи сводятся к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений второго рода с вполне непрерывными операторами. В качестве приложения приводится решение в виде разложений по малому параметру задачи о гидростатическом давлении шара с центрально расположенной сфероидальной полостью.

1. Рассмотрим первую и вторую основные осесимметричные задачи для однородного уравнения Ламе

$$\nabla^2 \mathbf{u} + (1-2\nu)^{-1}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0 \tag{1.1}$$

(ν — коэффициент Пуассона) для шара со сфероидальной полостью, ось которой проходит через центр шара. Вводя одинаково направленные сферическую (r, θ, φ) и вытянутую сфероидальную (ξ_1, η_1, φ) системы координат, совмещенные с центрами граничных поверхностей, получаем связь между координатами

$$r\cos\theta = c\,\mathrm{ch}\,\xi_1\cos\eta_1 + a,\quad r\sin\theta = c\,\mathrm{sh}\,\xi_1\sin\eta_1 \tag{1.2}$$

($2c$ — фокусное расстояние сфероидальной системы координат, a — расстояние между центрами граничных поверхностей).

Пусть на границе заданы векторы перемещений

$$\begin{gathered}\mathbf{U}|_{r=R} = \sum_{k=0}^{\infty}[A_{k,1}^{(1)}P_k^{(1)}(\cos\theta)\,\mathbf{e}_\rho + A_{k,1}^{(2)}P_k(\cos\theta)\,\mathbf{e}_z]\\ \mathbf{U}|_{\xi_1=\xi_0} = \sum_{k=0}^{\infty}[A_{k,2}^{(1)}P_k^{(1)}(\cos\eta_1)\,\mathbf{e}_\rho + A_{k,2}^{(2)}P_k(\cos\eta_1)\,\mathbf{e}_z]\end{gathered} \tag{1.3}$$

(e_0, e_z — орты цилиндрической системы координат). В дальнейшем предполагаем, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k|A_{k,i}^{(1)}| + |A_{k,i}^{(2)}|) < \infty \quad (i=1,2) \tag{1.4}$$

Будем искать решение задачи (1.1), (1.3) в виде

$$\mathbf{U} = \sum_{k=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n^{(k)}\frac{n!}{R^n}\mathbf{W}_{k,n}^-(r,\theta) + \frac{a_n^{(k+2)}}{Q_n(\mathrm{ch}\,\xi_0)}\mathbf{U}_{k,n}^+(\xi_1,\eta_1)\right] \tag{1.5}$$

Здесь и в дальнейшем приняты следующие обозначения

$$\mathbf{W}_{k,n}^{\pm} = \mathbf{D}_k^{(1)}[w_{k,n}^{\pm}(r,\theta,\varphi)],\quad \mathbf{U}_{k,n}^{\pm} = \mathbf{D}_k^{(2)}[u_{k,n}^{\pm}(\xi_1,\eta_1,\varphi)]\quad (k=1,2) \tag{1.6}$$

$$\mathbf{D}_1^{(1)} = \mathrm{grad},\ \mathbf{D}_2 = z\,\mathrm{grad} + (4\nu-3)\,\mathbf{e}_z,\ D_1^{(2)} = \frac{c}{2n+1}\mathbf{D}_1^{(1)}$$

$$\mathbf{D}_2^{(1)} = \mathbf{D}_2 - R^2\mathbf{D}_1^{(1)}D_1^{\pm},\quad \mathbf{D}_2^{(2)} = \mathbf{D}_2 - c\,\mathrm{ch}^2\,\xi_0\mathbf{D}_1^{(1)}D_2^{\pm}$$

$$D_2^{\pm} u_n^{\pm} = u_{n\pm1}^{\pm}, D_1^{\pm} w_n^{\pm} = [2(n \pm 1) + 1]^{-1} w_{n\pm1}^{\pm}, \quad w_{1,n}^{\pm} = w_{n\mp1}^{\pm}$$

$$w_{2\,n}^{\pm} = w_n^{\pm}, \quad u_{1,n}^{\pm} = (D_2^{-} - D_2^{+}) u_n^{\pm}, \quad u_{2,n}^{\pm} = u_n^{\pm}$$

$$w_n^{\pm} = \left\{ \begin{matrix} \dfrac{n!}{r^{n+1}} \\ \dfrac{r^n}{n!} \end{matrix} \right\} P_n(\cos\theta), \quad u_n^{\pm} = \left\{ \begin{matrix} Q_n(\mathrm{ch}\,\xi) \\ P_n(\mathrm{ch}\,\xi) \end{matrix} \right\} P_n(\cos\eta), \qquad \begin{matrix} q = \mathrm{ch}\,\xi_0 \\ \bar{q} = \mathrm{sh}\,\xi_0 \end{matrix}$$

где $P_n^{(m)}(x)$, $Q_n^{(m)}(x)$ — функции Лежандра первого и второго рода.

Решения (1.6) представляют собой осесимметричный вариант точных решений для сферы и сфероида, введенных в [2]. В несколько иной форме точные решения для шара и сфероида рассматривались в [3, 4].

В общем решении (1.5) перейдем к сфероидальным координатам, используя для этого формулы разложений сферических решений уравнения Ламе по сфероидальным [2]

$$\mathbf{W}_{1,n}^{-} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+n+1} \left(k + \frac{1}{2}\right) C_{n,k}^{(1)} \mathbf{U}_{1,k}^{-} \tag{1.7}$$

$$\mathbf{W}_{2,n}^{-} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+n} \left(k + \frac{1}{2}\right) [C_{n,k}^{(1)} \mathbf{U}_{2,k}^{-} + C_{n,k}^{(2)} \mathbf{U}_{1,k}^{-}]$$

$$C_{n,k}^{(1)} = \sqrt{\pi} \left(\frac{c}{2}\right)^n \frac{1}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)} C_{n-k}^{-\frac{1}{2}-n} \left(\frac{a}{c}\right),$$

$$C_{n,k}^{(2)} = \frac{R^2}{2n-1} C_{n-2,k}^{(1)} - cq^2 C_{n-1,k+1}^{(1)}$$

($C_m^{\nu}(x)$ — функция Гегенбауэра). Подставляя (1.7) в (1.5), после некоторых преобразований получаем

$$\mathbf{U} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{a_k^{(3)}}{Q_k(q)} \mathbf{U}_{1,k}^{+} + \frac{a_k^{(4)}}{Q_k(q)} \mathbf{U}_{2,k}^{+} + \left(k + \frac{1}{2}\right) \sum_{i=1}^{2} H_{ik}^{(1)} \mathbf{U}_{i,k}^{-} \right] \tag{1.8}$$

$$H_{ik}^{(1)} = \sum_{n=k}^{\infty} a_n^{(i)} \frac{n!}{R^n} (-1)^{i+k+n} C_{n,k}^{(1)} + \delta_{i1} \sum_{n=k}^{\infty} a_n^{(2)} \frac{n!}{R^n} (-1)^{k+n} C_{n,k}^{(2)},$$

$$\delta_{i1} = \begin{cases} 1, & i = 1 \\ 0, & i \neq 1 \end{cases}$$

Аналогично преобразуем решение (1.5) к сферическим координатам, используя формулы разложений сфероидальных решений уравнения Ламе по сферическим [2]

$$\mathbf{U}_{1,n}^{+} = \frac{c}{2} \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^{k+n} C_{k,n}^{(1)} \mathbf{W}_{1,k}^{+} \tag{1.9}$$

$$\mathbf{U}_{2,n}^{+} = \frac{c}{2} \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^{k+n} [C_{k,n}^{(1)} \mathbf{W}_{2,k}^{+} + C_{k,n}^{(2)} \mathbf{W}_{1,k}^{+}]$$

В результате будем иметь

$$\mathbf{U} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[a_k^{(1)} \frac{k!}{R^k} \mathbf{W}_{1,k}^{-} + a_k^{(2)} \frac{k!}{R^k} W_{2,k}^{-} + \frac{c}{2} \sum_{i=1}^{2} H_{ik}^{(2)} W_{i,k}^{+} \right] \tag{1.10}$$

$$H_{ik}^{(2)} = \sum_{n=0}^{k} \frac{a_n^{(i+2)} (-1)^{k+n}}{Q_n(q)} C_{k,n}^{(1)} + \delta_{i1} \sum_{n=0}^{k} \frac{a_n^{(4)} (-1)^{k+n}}{Q_n(q)} C_{k,n}^{(2)}$$

Переходя к координатной форме записи перемещений (1.8), (1.10) в базисе e_ϱ, e_z и удовлетворяя условиям на границе (1.3) с использованием ортогональности функций Лежандра, получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно $a_k^{(p)}$

$$\sum_{p=1}^{2}\left(s_{k,p}^{(i)}a_k^{(p)}+\sum_{n=0}^{k}a_n^{(p+2)}t_{n,k}^{(i,p)}\right)=A_{k,1}^{(i)}$$
$$\sum_{p=1}^{2}\left(s_{k,p}^{(i+2)}a_k^{(p+2)}+\sum_{n=k}^{\infty}a_n^{(p)}t_{n,k}^{(i+2,p)}\right)=A_{k,2}^{(i)} \quad (1.11)$$
$$(i=1,2;\ p=1,2,3,4;\ k=1,2,\ldots)$$

Здесь

$$s_{k,1}^{(1)}=\frac{1}{k+1},\quad s_{k,2}^{(1)}=\frac{k-1}{2k-1},\quad s_{k,1}^{(2)}=1,\quad s_{k,2}^{(2)}=4\nu-3+\frac{k^2}{2k-1}$$
$$s_{k,1}^{(3)}=-\frac{Q_k^{(-1)}(q)}{Q_k(q)},\quad s_{k,2}^{(3)}=-\frac{(k+2)\,qQ_k^{(-1)}(q)}{Q_k(q)}$$
$$s_{k,1}^{(4)}=-1,\quad s_{k,2}^{(4)}=\frac{(4\nu-3)\,Q_k(q)-(k+1)\,qQ_{k+1}(q)}{Q_k(q)}$$
$$t_{n,k}^{(1,1)}=\frac{(-1)^{k+n}c\,(k-1)!}{2R^{k+1}Q_n(q)}C_{k,n}^{(1)},\quad t_{n,k}^{(2,1)}=\frac{(-1)^{k+n+1}ck!}{2R^{k+1}Q_n(q)}C_{k,n}^{(1)}$$
$$t_{n,k}^{(1,2)}=\frac{(-1)^{k+n}c\,(k-1)!}{2R^{k+1}Q_n(q)}\left[C_{k,n}^{(2)}+\frac{k\,(k+2)}{2k+3}C_{k,n}^{(1)}\right]$$
$$t_{n,k}^{(2,2)}=\frac{(-1)^{k+n}ck!}{2R^{k+1}Q_n(q)}\left[\left(4\nu-3-\frac{(k+1)^2}{2k+3}\right)C_{k,n}^{(1)}-C_{k,n}^{(2)}\right] \quad (1.12)$$
$$t_{n,k}^{(3,1)}=(-1)^{k+n}\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{n!}{R^n}P_k^{(-1)}(q)\,C_{n,k}^{(1)}$$
$$t_{n,k}^{(4,1)}=(-1)^{k+n}\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{n!}{R^n}P_k(q)\,C_{n,k}^{(1)}$$
$$t_{n,k}^{(3,2)}=(-1)^{k+n}\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{n!}{R^n}\left[(k-1)\,qP_{k-1}^{(-1)}(q)\,C_{n,k}^{(1)}-P_k^{(-1)}(q)\,C_{n,k}^{(2)}\right]$$
$$t_{n,k}^{(4,2)}=(-1)^{k+n}\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{n!}{R^n}\left[((4\nu-3)\,P_k(q)+kqP_{k-1}(q))\,C_{n,k}^{(1)}-P_k(q)\,C_{n,k}^{(2)}\right]$$

При $k=0$ к уравнениям (1.11) при $i=2$ нужно добавить $a_0^{(1)}=a_0^{(3)}=0$.

Разрешая уравнения (1.11) относительно $a_k^{(p)}$, представим бесконечную систему в виде

$$a_k^{(i)}+(-1)^{i+1}\sum_{p=1}^{2}\sum_{n=0}^{k}a_n^{(p+2)}\frac{t_{n,k}^{(1,p)}s_{k,3-i}^{(2)}-t_{n,k}^{(2,p)}s_{k,3-i}^{(1)}}{\Delta_1}=$$
$$=(-1)^{i+1}\frac{A_{k,1}^{(1)}s_{k,3-i}^{(2)}-A_{k,1}^{(2)}s_{k,3-i}^{(1)}}{\Delta_1},\quad \Delta_1=s_{k,1}^{(1)}s_{k,2}^{(2)}-s_{k,1}^{(2)}s_{k,2}^{(1)} \quad (1.13)$$
$$a_k^{(i+2)}+(-1)^{i+1}\sum_{p=1}^{2}\sum_{n=k}^{\infty}a_n^{(p)}\frac{t_{n,k}^{(3,p)}s_{k,3-i}^{(4)}-t_{n,k}^{(4,p)}s_{k,3-i}^{(3)}}{\Delta_2}=$$
$$=(-1)^{i+1}\frac{A_{k,2}^{(1)}s_{k,3-i}^{(4)}-A_{k,2}^{(2)}s_{k,3-i}^{(3)}}{\Delta_2},\quad \Delta_2=s_{k,1}^{(3)}s_{k,2}^{(4)}-s_{k,2}^{(3)}s_{k,1}^{(4)}$$

При $k=0$ к уравнениям

$$a_0^{(2)}+\frac{t_{0,0}^{(2,2)}}{s_{0,2}^{(2)}}a_0^{(4)}=\frac{A_{0,1}^{(2)}}{s_{0,2}^{(2)}},\quad a_0^{(4)}=\sum_{p=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(p)}\frac{t_{n,0}^{(4,p)}}{s_{0,2}^{(4)}}=\frac{A_{0,2}^{(2)}}{s_{0,2}^{(4)}} \quad (1.14)$$

нужно добавить $a_0^{(1)}=a_0^{(3)}=0$.

Лемма 1.1. Определители Δ_1, Δ_2 при $k \geqslant 1$, $\nu < 1/2$ отличны от нуля при всех $\xi_0 > 0$. Справедливы следующие оценки

$$|\Delta_1| \geqslant (2-4\nu)(k+1)^{-1}, \quad |\Delta_2| \geqslant (3-4\nu)(k+1)^{-1} \tag{1.15}$$

Доказательство. В доказательстве нуждается лишь вторая оценка. Выписывая Δ_2 в явном виде

$$Q_k(q)^2 \Delta_2 = \frac{q}{k} Q_k^{(1)}(q) Q_{k+1}(q) - \frac{q}{k+1} Q_k(q) Q_{k+1}^{(1)}(q) + \frac{3-4\nu}{k(k+1)} Q_k(q) Q_k^{(1)}(q)$$

заметим, что последнее слагаемое отрицательно. Для первых двух слагаемых с использованием интегрального представления функций Лежандра второго рода можно получить формулу

$$\frac{q}{k} Q_k^{(1)}(q) Q_{k+1}(q) - \frac{q}{k+1} Q_k(q) Q_{k+1}^{(1)}(q) = -q\bar{q}^2 \int\limits_0^\infty dt \int\limits_0^t \frac{(\operatorname{ch} t - \operatorname{ch} u)^2\, du}{(q+\bar{q}\operatorname{ch} t)^{k+2}(q+\bar{q}\operatorname{ch} u)^{k+2}}$$

из которой и неравенства $|Q_k^{(1)}(q)| > kQ_k(q)$ следует требуемая оценка.

Бесконечная система (1.13), (1.14), представляет собой операторное уравнение $(I+T)\,x = f$, где x, f — столбцы неизвестных и правых частей соответственно, I — единичный оператор, T — оператор системы.

Лемма 1.2. Оператор T системы (1.13), (1.14) является вполне непрерывным оператором из l_2 в l_2 при $R > c \operatorname{ch} \xi_0 + a$.

Доказательство. Для доказательства, как известно [5], достаточно показать, что матричные коэффициенты оператора суммируемы с квадратом. Непосредственно из соотношений (1.12) следует, что произвольный матричный коэффициент может быть ограничен сверху суммой конечного числа выражений вида

$$\tau_{n,k} = Bn^{\alpha} P_n^{(\gamma)}(q)(k+\beta)!\, R^{-k}\, |C_{k,n}^{(1)}|$$

где B — некоторая постоянная, не зависящая от n и k; α, β, γ — фиксированные целые неотрицательные числа. Заметим, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} |\tau_{n,k}| \leqslant B_1 \sum_{n=0}^{\infty} n^{\alpha} P_n^{(\gamma)}(q)\, Q_n^{(\beta)}\left(\frac{R-a}{c}\right)$$

причем последний ряд сходится при $R > cq + a$ в силу асимптотических формул для функций Лежандра. Следовательно, доказано более сильное утверждение

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} |T_{nk}| < \infty \tag{1.16}$$

где T_{nk} — матричные коэффициенты оператора T.

Можно показать, что при выполнении условия (1.4) столбец правых частей системы (1.13), (1.14) принадлежит пространству $l_1 \subset l_2$. Тогда система (1.13), (1.14) корректно разрешима почти при всех значениях входящих в нее параметров в гильбертовом пространстве l_2 и приближенное решение может быть получено методом редукции [5]. Из разрешимости системы в l_2 и (1.4), (1.13), (1.14), (1.16) следует

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k^{(i)}| < \infty$$

а значит, абсолютная и равномерная сходимость рядов (1.5), (1.8), (1.10).

Пусть теперь на границе заданы напряжения (G — модуль сдвига)

$$\mathbf{F}\mathbf{U}|_{r=R} = 2G \sum_{k=0}^{\infty} [A_{k,1}^{(1)} P_k^{(1)}(\cos\theta)\, e_\rho + A_{k,1}^{(2)} P_k(\cos\theta)\, e_z] \tag{1.17}$$

$$\mathbf{F}\mathbf{U}|_{\xi_1=\xi_0} = 2Ghc^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} [A_{k,2}^{(1)} P_k^{(1)}(\cos\eta_1)\, e_\rho + A_{k,2}^{(2)} P_k(\cos\eta_1)\, e_z]$$

$$h = (q^2 - \cos^2\eta_1)^{-1/2}$$

Решение первой основной задачи будем по-прежнему искать в виде (1.5). Переходя в формулах (1.8), (1.10) от перемещений к напряжениям на соответствующей граничной поверхности и удовлетворяя условиям (1.17), получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений (1.11) со следующими матричными коэффициентами

$$s_{k,1}^{(1)} = \frac{k}{k+1}, \quad s_{k,2}^{(1)} = 2\nu + \frac{(k-1)(k-2)}{2k-1}, \quad s_{k,1}^{(2)} = k,$$

$$s_{k,2}^{(2)} = k\left[2\nu - 1 + \frac{k(k-2)}{2k-1}\right]$$

$$s_{k,1}^{(3)} = \frac{1}{Q_k(q)}\frac{d}{d\xi_0}Q_k^{-1}(q), \quad s_{k,2}^{(3)} = \frac{1}{Q_k(q)}\left[\frac{q^2}{k+1}\frac{d}{d\xi_0}\left(\frac{Q_{k+1}^{(1)}(q)}{q}\right) - 2\nu Q_k(q)\right]$$

$$s_{k,1}^{(4)} = \frac{Q_k^{(1)}(q)}{Q_k(q)}, \quad s_{k,2}^{(4)} = \frac{1}{Q_k(q)}\left[(k+1)q^2\frac{d}{d\xi_0}\left(\frac{Q_{k+1}(q)}{q}\right) + (1-2\nu)Q_k^{(1)}(q)\right]$$

$$t_{n,k}^{(1,1)} = \frac{(-1)^{k+n+1}c(k+1)!}{2kR^{k+1}Q_n(q)}C_{k,n}^{(1)}, \quad t_{n,k}^{(2,1)} = \frac{(-1)^{k+n}c(k+1)!}{2R^{k+1}Q_n(q)}C_{k,n}^{(1)}$$

$$t_{n,k}^{(1,2)} = \frac{(-1)^{k+n}ck!}{2R^{k+1}Q_n(q)}\left[\left(2\nu - \frac{(k+2)(k+3)}{2k+3}\right)C_{k,n}^{(1)} - \frac{k+1}{k}C_{k,n}^{(2)}\right]$$

$$t_{n,k}^{(2,2)} = \frac{(-1)^{k+n}c(k+1)!}{2R^{k+1}Q_n(q)}\left[C_{k,n}^{(2)} - \left(2\nu - 1 - \frac{(k+1)(k+3)}{2k+3}\right)C_{k,n}^{(1)}\right] \qquad (1.18)$$

$$t_{n,k}^{(3,1)} = (-1)^{k+n+1}\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{n!}{R^n}\frac{d}{d\xi_0}P_k^{(-1)}(q)C_{n,k}^{(1)}$$

$$t_{n,k}^{(3,2)} = (-1)^{k+n}\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{n!}{R^n}\times$$

$$\times\left[\frac{d}{d\xi_0}P_k^{(-1)}(q)C_{n,k}^{(2)} - \left(\frac{q^2}{k}\frac{d}{d\xi_0}\left(\frac{P_{k-1}^{(1)}(q)}{q}\right) + 2\nu P_k(q)\right)C_{n,k}^{(1)}\right]$$

$$t_{n,k}^{(4,1)} = (-1)^{k+n+1}\left(k+\frac{1}{2}\right)P_k^{(1)}(q)\frac{n!}{R^n}C_{n,k}^{(1)}$$

$$t_{n,k}^{(4,2)} = (-1)^{k+n}\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{n!}{R^n}\times$$

$$\times\left[P_k^{(1)}(q)C_{n,k}^{(2)} - \left(kq^2\frac{d}{d\xi_0}\left(\frac{P_{k-1}(q)}{q}\right) + (2\nu-1)P_k^{(1)}(q)\right)C_{n,k}^{(1)}\right]$$

При $k = 0$ к уравнениям (1.11) при $i = 2$ нужно добавить равенства $a_0^{(1)} = a_0^{(2)} = a_0^{(3)} = 0$. Два указанных уравнения имеют вид

$$a_0^{(4)} = A_{0,2}^{(2)}Q_0(q)\left[q^2\frac{d}{d\xi_0}\left(\frac{Q_1(q)}{q}\right) + (1-2\nu)Q_0^{(1)}(q)\right]^{-1}, \quad a_0^{(4)} = -\frac{R^2A_{0,1}^{(2)}Q_0(q)}{(2\nu-2)c} \qquad (1.19)$$

Условия статики для данной задачи приводят к соотношению

$$c\bar{q}A_{0,2}^{(2)} = -R^2A_{0,1}^{(2)} \qquad (1.20)$$

из которого следует, что одно из уравнений (1.19) — следствие другого, и значит, при $k = 0$ система непротиворечива.

Для определителей Δ_1 и Δ_2 в случае первой краевой задачи доказаны оценки

$$|\Delta_1| > 2\nu k(k+1)^{-1}, \quad |\Delta_2| > (1-\nu)\operatorname{cth}\xi_0, \quad \nu < 1$$

Исследование разрешимости бесконечной системы полностью аналогично проведенному ранее для второй краевой задачи.

2. Рассмотрим первую и вторую осесимметричные задачи для уравнения (1.1) для вытянутого сфероида с шаровой полостью, центр которой расположен на оси сфероида на расстоянии a от его центра. Введем оди-

наково направленные сфероидальную (ξ, η, φ) и сферическую (r_1, θ_1, φ) системы координат, совмещенные с центрами граничных поверхностей. Тогда соотношения (1.2) нужно заменить на

$$c\,\mathrm{ch}\,\xi\cos\eta = r_1\cos\theta_1 + a,\quad c\,\mathrm{sh}\,\xi\sin\eta = r_1\sin\theta_1 \tag{2.1}$$

Пусть на границе заданы векторы перемещений

$$\begin{gathered}\mathbf{U}|_{r_1=R} = \sum_{k=0}^{\infty}[A_{k,1}^{(1)}P_k^{(1)}(\cos\theta_1)\,e_\rho + A_{k,1}^{(2)}P_k(\cos\theta_1)\,e_z]\\ \mathbf{U}|_{\xi=\xi_0} = \sum_{k=0}^{\infty}[A_{k,2}^{(1)}P_k^{(1)}(\cos\eta)\,e_\rho + A_{k,2}^{(2)}P_k(\cos\eta)\,e_z]\end{gathered} \tag{2.2}$$

подчиненные условию (1.4).

Будем искать решение задачи в виде

$$\mathbf{U} = \sum_{k=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n^{(k)}\frac{R^{n+1}}{n!}\mathbf{W}_{k,n}^{+}(r_1, \theta_1) + a_n^{(k+2)}\frac{\mathbf{U}_{k,n}^{-}(\xi,\eta)}{P_n(q)}\right] \tag{2.3}$$

где использованы обозначения, принятые в (1.6).

Поступая как в п. 1, с использованием формул разложения внешних сферических решений уравнения Ламе по внешним сфероидальным

$$\mathbf{W}_{1,n}^{+} = \frac{2}{c}\sum_{k=n}^{\infty}\left(k+\frac{1}{2}\right)P_{k,n}^{(1)}\mathbf{U}_{1,k}^{+}$$

$$\mathbf{W}_{2,n}^{+} = \frac{2}{c}\sum_{k=n}^{\infty}\left(k+\frac{1}{2}\right)[P_{k,n}^{(1)}\mathbf{U}_{2,k}^{+} - P_{k,n}^{(2)}\mathbf{U}_{1,k}^{+}]$$

$$P_{n,k}^{(1)} = \frac{1}{c^k}\left[\frac{d^k}{dx^k}P_n(x)\right]_{|x=a/c},\quad P_{n,k}^{(2)} = \frac{R^2}{2k+3}P_{n,k+2}^{(1)} - cq^2P_{n-1,k+1}^{(1)}$$

и внутренних сфероидальных по внутренним сферическим [2]

$$\mathbf{U}_{1,n}^{-} = -\sum_{k=0}^{n}P_{n,k}^{(1)}\mathbf{W}_{1,k}^{-},\quad \mathbf{U}_{2,n}^{-} = \sum_{k=0}^{n}[P_{n,k}^{(1)}\mathbf{W}_{2,k}^{-} + P_{n,k}^{(2)}\mathbf{W}_{1,k}^{-}]$$

представим перемещение (2.3) в сферической и сфероидальной системах координат и удовлетворим граничным условиям (2.2). Бесконечная система линейных алгебраических уравнений имеет вид (1.11) со следующими матричными коэффициентами

$$s_{k,1}^{(1)} = \frac{1}{k},\quad s_{k,2}^{(1)} = \frac{k+2}{2k+3},\quad s_{k,1}^{(2)} = -1,\quad s_{k,2}^{(2)} = 4\nu - 3 - \frac{(k+1)^2}{2k+3},$$

$$s_{k,1}^{(4)} = -1$$

$$s_{k,1}^{(3)} = -\frac{P_k^{(-1)}(q)}{P_k(q)},\quad s_{k,2}^{(3)} = \frac{(k-1)\,qP_{k-1}^{(-1)}(q)}{P_k(q)},\quad s_{k,2}^{(4)} = \frac{(4\nu-3)\,P_k(q) + kqP_{k-1}(q)}{P_k(q)}$$

$$t_{n,k}^{(1,1)} = -\frac{R^kP_{n,k}^{(1)}}{(k+1)!\,P_n(q)},\quad t_{n,k}^{(2,1)} = -\frac{R^kP_{n,k}^{(1)}}{k!P_n(q)}$$

$$t_{n,k}^{(2,2)} = \frac{R^k}{k!\,P_n(q)}\left[P_{n,k}^{(2)} + \left(4\nu - 3 + \frac{k^2}{2k-1}\right)P_{n,k}^{(1)}\right]$$

$$t_{n,k}^{(3,1)} = -\frac{2k+1}{c}\frac{R^{n+1}}{n!}Q_k^{(-1)}(q)\,P_{k,n}^{(1)},\quad t_{n,k}^{(4,1)} = -\frac{2k+1}{c}\frac{R^{n+1}}{n!}Q_k(q)\,P_{k,n}^{(1)} \tag{2.4}$$

$$t_{n,k}^{(1,2)} = \frac{R^k}{k!P_n(q)}\left[\frac{P_{n,k}^{(2)}}{k+1} + \frac{k-1}{2k-1}P_{n,k}^{(1)}\right]$$

$$t_{n,k}^{(3,2)} = \frac{2k+1}{c}\frac{R^{n+1}}{n!}[Q_k^{-1}(q)\,P_{k,n}^{(2)} - (k+2)\,qQ_{k+1}^{(-1)}(q)\,P_{k,n}^{(1)}]$$

$$t_{n,k}^{(4,2)} = \frac{2k+1}{c} \frac{R^{n+1}}{n!} \left[Q_k(q) P_{k,n}^{(2)} + ((4\nu - 3) Q_k(q) - (k+1) q Q_{k+1}(q)) P_{k,n}^{(1)}\right]$$

При $k = 0$ к уравнениям (1.11) при $i = 2$ нужно добавить равенства $a_0^{(1)} = a_0^{(3)} = 0$.

Лемма 2.1. Определители Δ_1, Δ_2 системы (1.13), (2.4) при $k \geqslant 1$, $\nu < {}^1/_2$ отличны от нуля при всех $\xi_0 > 0$. Справедливы оценки

$$|\Delta_1| > (3-4\nu)(k+1)^{-1}, \quad |\Delta_2| \geqslant (2-4\nu)(k+1)^{-1} \operatorname{th} \xi_0 \tag{2.5}$$

Доказательство. Доказательство проведем для второй оценки. Запишем Δ_2 в явном виде

$$P_k(q)^2 \Delta_2 = \frac{3-4\nu}{k(k+1)} P_k^{(1)}(q) P_k(q) - \frac{q}{k+1} P_k^{(1)}(q) P_{k-1}(q) + \frac{q}{k} P_{k-1}^{(1)}(q) P_k(q)$$

Из рекуррентных формул для функций Лежандра следует

$$P_k^{(1)}(q) P_k(q) - kqP_k^{(1)}(q) P_{k-1}(q) + (k+1)\, qP_{k-1}^{(1)}(q) P_k(q) =$$
$$= (2k+1)^{-1} [P_{k+1}^{(2)}(q) P_{k-1}^{(1)}(q) - P_{k+1}^{(1)}(q) P_{k-1}^{(2)}(q)]$$

Правая часть последней формулы раскладывается в ряд по степеням $q - 1$, который при $\xi_0 > 0$, $k \geqslant 1$ строго положителен. Учитывая неравенство $P_k^{(1)}(q) \geqslant k \operatorname{th} \xi_0 P_k(q)$, получаем требуемый результат.

Лемма 2.2. Оператор T системы (1.13) с матричными коэффициентами (2.4) является вполне непрерывным оператором из l_2 в l_2 при $cq - a > R$, если $aq > c$, и при $\bar{q}\,(c^2 - a^2)^{1/2} > R$, если $aq \leqslant c$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный матричный коэффициент оператора системы T. Он может быть ограничен сверху конечной суммой выражений вида

$$\tau_{nk} = Bn^\alpha \frac{R^n}{n! c^n} Q_k^{(\gamma)}(q) \left| \frac{d^n}{dx^n} P_k(x) \right|_{x=a/c}$$

где B — постоянное число, не зависящее от n и k; α, γ — фиксированные неотрицательные целые числа.

Оценим сумму квадратов τ_{nk}. Для этого рассмотрим формулу [6]

$$\frac{P_n^{(m)}(\cos\theta_1)}{r_1^{n+1}} = \frac{2}{c} \frac{(-1)^m}{(n-m)!} \sum_{k=n}^{\infty} \left(k + \frac{1}{2}\right) P_{k,n}^{(1)} Q_k^{(-m)}(\operatorname{ch}\xi) P_k^{(m)}(\cos\eta)$$

в которой все параметры связаны соотношением (2.1). Известно, что функции

$$[(k + {}^1/_2)(k-m)!/(k+m)!]^{1/2} P_k^{(m)}(x)$$

образуют полную ортонормированную систему в $L_2[-1, 1]$. Запишем равенство Парсеваля для этой системы

$$\sum_{k=n}^{\infty} \left[\frac{2}{c(n-m)!} \left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{(k+m)!}{(k-m)!}\right)^{1/2} P_{k,n}^{(1)} Q_k^{(-m)}(q)\right]^2 = \int_0^\pi \left[\frac{P_n^{(m)}(\cos\theta_1)}{r_1^{n+1}}\right]^2 \sin\theta_1\, d\theta_1$$

Отсюда следует

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{2\alpha} R^{2n+2} \sum_{k=n}^{\infty} \left[\frac{2}{c(n-m)!}\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{(k+m)!}{(k-m)!}\right)^{1/2} P_{k,n}^{(1)} Q_k^{(-m)}(q)\right]^2 =$$
$$= \int_0^\pi \sum_{n=0}^{\infty} n^{2\alpha} \left(\frac{R}{r_1}\right)^{2n+2} [P_n^{(m)}(\cos\theta_1)]^2 \sin\theta_1\, d\theta_1$$

Ряд справа сходится, если $r_1 > R$. Находя минимум r_1, получаем, что он равен $cq - a$, если $aq > c$, и $\bar{q}\,(c^2 - a^2)^{1/2}$, если $aq \leqslant c$. Таким образом, при выполнении условий леммы сходится ряд, составленный из квадратов τ_{nk}, откуда и следует доказываемое утверждение.

Замечание. Условия, налагаемые леммой 2.2 на параметры задачи, имеют следующий геометрический смысл: они требуют, чтобы граничные поверхности не пересекались.

Вопрос разрешимости бесконечной системы может быть решен так же, как в п. 1.

Рассмотрим первую краевую задачу для сфероида с шаровой полостью. Пусть на границе заданы напряжения

$$\begin{aligned}\mathbf{FU}_{|r_1=R} &= 2G\sum_{k=0}^{\infty}\left[A_{k,1}^{(1)}P_k^{(1)}(\cos\theta_1)e_\rho + A_{k,1}^{(2)}P_k(\cos\theta_1)\,e_z\right]\\ \mathbf{FU}_{|\xi=\xi_0} &= 2Ghc^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\left[A_{k,2}^{(1)}P_k^{(1)}(\cos\eta)\,e_\rho + A_{k,2}^{(2)}P_k(\cos\eta)\,e_z\right]\end{aligned} \tag{2.6}$$

Решение задачи будем искать в виде (2.3). Выполняя указанные ранее выкладки и переходя от перемещений к напряжениям, после удовлетворения граничным условиям получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений (1.11) со следующими матричными коэффициентами

$$s_{k,1}^{(1)} = \frac{k+1}{kR},\quad s_{k,2}^{(1)} = \frac{1}{R}\left[\frac{(k+2)(k+3)}{2k+3} - 2\nu\right]$$

$$s_{k,1}^{(2)} = -\frac{k+1}{R},\quad s_{k,2}^{(2)} = \frac{k+1}{R}\left[2\nu - 1 - \frac{(k+1)(k+3)}{2k+3}\right]$$

$$s_{k,1}^{(3)} = -\frac{1}{P_k(q)}\frac{d}{d\xi_0}P_k^{(-1)}(q),\quad s_{k,2}^{(3)} = \frac{1}{P_k(q)}\left[\frac{q^2}{k}\frac{d}{d\xi_0}\left(\frac{P_{k-1}^{(1)}(q)}{q}\right) + 2\nu P_k(q)\right]$$

$$s_{k,1}^{(4)} = -\frac{P_k^{(1)}(q)}{P_k(q)},\quad s_{k,2}^{(4)} = \frac{1}{P_k(q)}\left[kq^2\frac{d}{d\xi_0}\left(\frac{P_{k-1}(q)}{q}\right) + (2\nu-1)P_k^{(1)}(q)\right]$$

$$t_{n,k}^{(1,1)} = \frac{kR^{k-1}}{(k+1)!}\frac{P_{n,k}^{(1)}}{P_n(q)},\quad t_{n,k}^{(2,1)} = \frac{R^{k-1}}{(k-1)!}\frac{P_{n,k}^{(1)}}{P_n(q)}$$

$$t_{n,k}^{(1,2)} = -\frac{R^{k-1}}{k!}\left[\frac{k}{k+1}\frac{P_{n,k}^{(2)}}{P_n(q)} + \left(2\nu + \frac{(k-1)(k-2)}{2k-1}\right)\frac{P_{n,k}^{(1)}}{P_n(q)}\right] \tag{2.7}$$

$$t_{n,k}^{(2,2)} = -\frac{R^{k-1}}{(k-1)!}\left[\frac{P_{n,k}^{(2)}}{P_n(q)} + \left(2\nu - 1 + \frac{k(k-2)}{2k-1}\right)\frac{P_{n,k}^{(1)}}{P_n(q)}\right]$$

$$t_{n,k}^{(3,1)} = -\frac{2k+1}{c}\frac{R^{n+1}}{n!}\frac{d}{d\xi_0}Q_k^{(-1)}(q)P_{k,n}^{(1)},\quad t_{n,k}^{(4,1)} = -\frac{2k+1}{c}\frac{R^{n+1}}{n!}Q_k^{(1)}(q)P_{k,n}^{(1)}$$

$$t_{n,k}^{(3,2)} = \\ = \frac{2k+1}{c}\frac{R^{n+1}}{n!}\left[\frac{d}{d\xi_0}Q_k^{(-1)}(q)P_{k,n}^{(2)} - \left(\frac{q^2}{k+1}\frac{d}{d\xi_0}\left(\frac{Q_{k+1}^{(1)}(q)}{q}\right) - 2\nu Q_k(q)\right)P_{k,n}^{(1)}\right]$$

$$t_{n,k}^{(4,2)} = \frac{2k+1}{c}\frac{R^{n+1}}{n!}\times \\ \times\left[Q_k^{(1)}(q)P_{k,n}^{(2)} - \left((k+1)q^2\frac{d}{d\xi_0}\left(\frac{Q_{k+1}(q)}{q}\right) + (1-2\nu)Q_k^{(1)}(q)\right)P_{k,n}^{(1)}\right]$$

При $k=0$ к уравнениям (1.11) при $i=2$ нужно добавить равенства $a_0^{(1)} = a_0^{(3)} = a_0^{(4)} = 0$. Эти уравнения имеют вид

$$\frac{2\nu-2}{R}a_0^{(2)} = A_{0,1}^{(2)},\quad -\frac{R}{c}\left[q^2\frac{d}{d\xi_0}\left(\frac{Q_1(q)}{q}\right) + (1-2\nu)Q_0^{(1)}(q)\right]a_0^{(2)} = A_{0,2}^{(2)} \tag{2.8}$$

Из условий статики (1.20) следует, что одно из уравнений (2.8) — следствие другого, т. е. при $k=0$ система непротиворечива.

Для определителей Δ_1 и Δ_2 в случае первой краевой задачи получены следующие оценки

$$|\Delta_1| > (k+1)R^{-2},\quad |\Delta_2| > k(k+1)^{-1}2\nu\,\mathrm{th}\,\xi_0$$

Разрешимость бесконечной системы устанавливается как и ранее.

3. В качестве приложения рассмотрим задачу о внешнем гидростатическом давлении p, действующем на шар с центрально расположенной свободной от усилий сфероидальной полостью. Условия на границе имеют вид (1.17), где

$$A_{k,1}^{(1)} = \frac{p}{2G}\delta_{k1}, \quad A_{k,1}^{(2)} = -\frac{p}{2G}\delta_{k1}, \quad A_{k,2}^{(1)} = A_{k,2}^{(2)} = 0; \quad \delta_{k1} = \begin{cases} 1, & k=1 \\ 0, & k \neq 1 \end{cases}$$

Решение задачи дано формулой (1.5), где $a_0^{(i)} = 0$, $a_k^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, 4)$ удовлетворяют бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (1.13) с матричными коэффициентами (1.18), вычисленными при $a = 0$. Будем искать решение системы (1.13) в виде рядов по малому параметру $\varepsilon = cq/R$. Разложив неизвестные $a_k^{(i)}$ и матричные коэффициенты в ряды по степеням ε, подставив их в уравнения (1.13) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε, имеем

$$a_1^{(1)} = \frac{p}{2G}\left\{\frac{2-4\nu}{1+\nu} + \frac{2^3\varepsilon^3}{3q^2\Delta_1\Delta_2 Q_1(q)^2}\left[-\left(\left((1-2\nu)3q^2 + \frac{4-\nu}{5} - \nu(3-5\nu)\right)Q_1^{(1)}(q) - \left((1-2\nu)6q^2 + \frac{2}{5}(4-\nu) - 2(1-\nu-\nu^2)\right)\frac{\bar q}{q}Q_1(q)\right]\right\} + O(\varepsilon^6)$$

$$a_1^{(2)} = \frac{p}{2G}\left\{\frac{3}{2+2\nu} + \frac{2\varepsilon^3}{3q^2\Delta_1\Delta_2 Q_1(q)^2}\left[-\left(\frac{9}{4}q^2 + \frac{1}{4} - 2\nu\right)Q_1^{(1)}(q) - \left(\frac{9}{2}q^2 - 1 - \nu\right)\frac{\bar q}{q}Q_1(q)\right\} + O(\varepsilon^6)$$

$$a_1^{(3)} = \frac{p}{2G}\frac{\varepsilon}{\Delta_2 Q_1(q)} \times \left[\left(\frac{3}{2}q^2 + 1 - 2\nu\right)Q_1^{(1)}(q) + (3q^2 + 1 - 2\nu)\frac{\bar q}{q}Q_1(q)\right] + O(\varepsilon^4)$$

$$a_1^{(4)} = \frac{p}{2G}\frac{\varepsilon}{\Delta_2 Q_1(q)}\left[-\frac{1}{2}Q_1^{(1)}(q) - \frac{\bar q}{q}Q(q)\right] + O(\varepsilon^4)$$

$$a_k^{(i)} = o(\varepsilon^3), \quad k = 2, 3, \ldots; \; i = 1, \ldots, 4$$

Тогда для напряжений на поверхности шара при $\theta = 0$ получаем

$$\sigma_\theta = \sigma_\varphi = p\left\{-1 + \frac{\varepsilon^3}{q^2\Delta_2 Q_1(q)^2}\left[-\left(\frac{3}{2}q^2 + \frac{1}{2} - \nu\right)Q_1^{(1)}(q) - 3q\bar q Q_1(q)\right]\right\} + O(\varepsilon^4) \tag{3.1}$$

Первое слагаемое в формуле (3.1) отвечает случаю однородного шара и совпадает с известными значениями σ_θ, σ_φ в задаче Ламе. Первая поправка к нему имеет третий порядок малости и, как может быть показано, при $\nu < {}^1/_2$ отрицательна. Таким образом, наличие сфероидальной полости приводит к увеличению сжимающих напряжений σ_θ и σ_φ на поверхности шара при $\theta = 0$. Если в формуле (3.1) устремить $q \to \infty$ при $c = R_1/q$, то сфероидальная полость переходит в сферическую, а напряжения равны

$$\sigma_\theta = \sigma_\varphi = p\left[-1 - {}^3/_2\zeta^3\right] + o(\zeta^3), \quad \zeta = R_1/R$$

Последняя формула совпадает с двумя первыми членами разложений σ_θ, σ_φ в ряды по степеням ζ в задаче Ламе об определении напряженного состояния полой сферы, подверженной равномерному внешнему давлению [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Проценко В. С., Николаев А. Г.* Решение пространственных задач теории упругости с помощью формул переразложения // Прикл. механика. 1986. Т. 22. № 7. С. 83—89.
2. *Николаев А. Г.* Формулы переразложения векторных решений уравнения Ламе в сферической и сфероидальной системах координат // Математические методы анализа динамических систем. Харьков: авиац. ин-т, 1984. Вып. 8. С. 100—104.
3. *Подильчук Ю. Н.* Трехмерные задачи теории упругости. Киев: Наук. думка, 1979. 240 с.
4. *Улитко А. Ф.* Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. Киев: Наук. думка, 1979. 265 с.
5. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.
6. *Проценко В. С., Николаев А. Г.* Формулы переразложения для решений уравнения Лапласа в сферических и вытянутых сфероидальных координатах // Докл. АН УССР. Сер. А. 1983. № 12. С. 10—13.
7. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 492 с.

Харьков

Поступила в редакцию 1.II.1988