Прикладная математика и механика, Том 54, вып. 1, 1990

УДК 532.135 : 534.1

О. Ю. Динариев

О СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СИГНАЛА В ЖИДКОСТИ С РЕЛАКСАЦИЕЙ

Исследуются некоторые математические свойства модели гидродинамики жидкости с учетом эффектов памяти (запаздывания) в явлениях переноса. В таких моделях в уравнения переноса вместо кинетических коэффициентов (вязкости, теплопроводности) вводятся релаксационные ядра. Алгебраические по форме реологические соотношения заменяются интегральными по времени. Главный результат заключается в выводе ограничений, которые с необходимостью налагаются на некоторые параметры интегральных ядер, если принять условие конечности скорости распространения в среде малых возмущений. Строится общая схема оценки релаксационных ядер связанной системы уравнений гидродинамики с памятью.

Для обеспечения конечности скорости распространения малых возмущений в жидкости необходимо модифицировать материальные соотношения Навье — Стокса — Фурье. Было предложено [1] устранить парадокс мгновенного распространения сигнала в процессе теплопроводности посредством замены параболического уравнения для температуры гиперболическим. Показано [2], что конечность скорости сигнала для процессов переноса связана с релаксационным характером зависимости потока от градиента переносимой величины. Необходимость замены кинетических коэффициентов релаксационными ядрами известна из неравновесной термодинамики [3, 4] и эксперимента [5].

1. Будем изучать движение жидкости в бесконечном пространстве относительно декартовой системы координат. Индексы i, j, k, l соответствуют координатам и пробегают значения 1, 2, 3. По повторяющимся индексам проводится суммирование.

Состояние жидкости в любой момент времени t задается полем плотности ρ, скорости v_i, температуры T. Симметричный тензор напряжений в вязкой жидкости задается выражением $p_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$, где $p = p(\rho, T)$ — термодинамическое давление, τ_{ij} — тензор вязких напряжений [6]. Пусть q_i — вектор потока тепла в жидкости. Производство энтропии в частице жидкости определяется выражением

$$\sigma = T^{-1}\tau_{ij}e_{ij} + q_i (T^{-1})_{,i}, \quad e_{ij} = {}^1/_2 (v_{i,j} + v_{j,i}) \tag{1.1}$$

В модели Навье—Стокса—Фурье имеют место материальные соотношения

$$\tau_{ij} = \eta_V\lambda\delta_{ij} + 2\eta_S s_{ij}, \quad \lambda = e_{kk}, \quad s_{ij} = e_{ij} - {}^1/_3\delta_{ij}\lambda \tag{1.2}$$

$$q_i = -\varkappa T_{,i} \tag{1.3}$$

Здесь η_V — объемная вязкость, η_S — сдвиговая вязкость, $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности, зависящие от ρ, T.

Будем исследовать малые возмущения плотности, скорости, температуры на фоне однородной покоящейся жидкости. Поэтому предположим, что $\rho = \rho_0 + r$, $T = T_0 + \theta$, причем r, v_i, θ малы, а ρ_0, T_0 — постоянные.

Введем вспомогательные обозначения. Пусть $g = g(t)$ — некоторая действительная функция. Обозначим символом $g_F(\omega)$ ее преобразование Фурье

$$g_F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} g(t)\, dt$$

В силу действительности $g(t)$ справедливо равенство

$$(g_F(\omega))^* = g_F(-\omega^*) \quad (1.4)$$

В дальнейшем будет использоваться теорема Пэли—Винера в следующей форме (доказательство см. в [7]):

А. Пусть E — пространство быстро убывающих функций на $\mathbb{R}$, E' — сопряженное пространство. Если $f \in E'$ и носитель f лежит в интервале $[J, +\infty)$, то $F = f_F$ — голоморфная функция в области $\operatorname{Im}\omega < 0$ и удовлетворяет неравенству

$$|F(\omega)| < C(1 + |\omega|)^{N_2} |\operatorname{Im}\omega|^{-N_2} \exp(J \operatorname{Im}\omega) \quad (1.5)$$

для некоторых положительных постоянных C, N_a. Если при этом f — гладкая функция, то функция F непрерывна вплоть до прямой $\operatorname{Im}\omega = 0$.

Б. Пусть $F = F(\omega)$ — голоморфная функция в области $\operatorname{Im}\omega < 0$, удовлетворяющая для некоторых J, C, N_a, где $C, N_a > 0$, неравенству (1.5). Тогда существует функция $f \in E'$ с носителем в интервале $[J, +\infty)$ такая, что $f_F = F$.

Для того чтобы учесть конечность скорости распространения сигнала в жидкости, естественно перейти от модели (1.2), (1.3) к другой модели, в которой коэффициенты вязкости и теплопроводности заменены на некоторые релаксационные ядра $K_a = K_a(t)$ $(a = 1, 2, 3)$. В линейном приближении получаем ($g_1 * g_2$ — свертка функций g_1, g_2)

$$\tau_{ij} = K_1 * \lambda\delta_{ij} + 2K_2 * s_{ij}, \quad q_i = -K_3 * \theta_{,i} \quad (1.6)$$

Для медленных процессов соотношения (1.6) переходят в (1.2), (1.3), причем

$$\eta_V(\rho_0, T_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_1(t)\,dt, \quad \eta_S(\rho_0, T_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_2(t)\,dt, \quad \varkappa(\rho_0, T_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_3(t)\,dt$$

Исследуем условия, которым удовлетворяют ядра $K_a(t)$. Из принципа причинности следует, что $K_a(t) = 0$ при $t < 0$. Будем предполагать (и это достаточно хорошо подтверждается статистической физикой), что $K_a(t)$ — гладкие положительные монотонные быстро убывающие функции при $t \geqslant 0$. По теореме А $K_{aF}(\omega)$ $(a = 1, 2, 3)$ — голоморфные функции в области $\operatorname{Im}\omega < 0$, непрерывные вплоть до прямой $\operatorname{Im}\omega = 0$.

Из второго закона термодинамики следует, что производство энтропии в частице жидкости для процесса, при котором r, v_i, θ стремятся к нулю при $t \to \pm\infty$, неотрицательно:

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma\,dt \geqslant 0 \quad (1.7)$$

В низшем порядке малости из (1.1) получаем

$$W(x^l) = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \Big[K_1(t-\tau)\lambda(t, x^l)\lambda(\tau, x^l) + 2K_2(t-\tau) s_{ij}(t, x^l) s_{ij}(\tau, x^l) + \frac{1}{T_0} K_3(t-\tau)\theta_{,i}(t, x^l)\theta_{,i}(\tau, x^l)\Big]$$

Переходя здесь к фурье-образам с учетом (1.4), имеем

$$W(x^l) = \frac{1}{\pi T_0} \int_0^{+\infty} d\omega \Big[\operatorname{Re} K_{1F}(\omega)|\lambda_F(\omega, x^l)|^2 + 2\operatorname{Re} K_{2F}(\omega)|s_{ijF}(\omega, x^l)|^2 + \frac{1}{T_0}\operatorname{Re} K_{3F}(\omega)|\theta_{,iF}(\omega, x^l)|^2\Big] \quad (1.8)$$

В силу произвольности $\lambda_F(\omega, x^l)$, $s_{ijF}(\omega, x^l)$ и $\theta_{,iF}(\omega, x^l)$ при $\omega \geqslant 0$ из соотношений (1.7) и (1.8) следуют неравенства, представляющие собой условия совместности модели (1.6) с термодинамикой: $\mathrm{Re}\, K_{aF}(\omega) \geqslant 0$ $(a = 1, 2, 3)$, $\omega \in \mathbb{R}$. Будем использовать более сильные неравенства, которые, по-видимому, всегда выполняются на практике:

$$\mathrm{Re}\, K_{aF}(\omega) > 0 \quad (a = 1, 2, 3) \tag{1.9}$$

где ω — произвольное действительное число. Из принятых предположений относительно ядер и общих свойств голоморфных функций следует, что неравенства (1.9) выполняются во всей нижней полуплоскости комплексной плоскости: $\mathrm{Im}\, \omega \leqslant 0$.

Из свойств гладкости ядер вытекает асимптотика

$$K_{aF}(\omega) = -i\omega^{-1}K_a(0) + o(|\omega|^{-1}), \quad \mathrm{Im}\, \omega \leqslant 0 \tag{1.10}$$

2. Движение жидкости описывается динамическими уравнениями неразрывности, импульса и энергии

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}\rho = -\rho v_{i,i}, \qquad \frac{d}{dt} v_i = \rho^{-1} p_{ij,j} + f_i \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} v_i v_i + U\right) = \rho^{-1}(p_{ij}v_j)_{,i} - \rho^{-1} q_{i,i} + \varepsilon + f_i v_i \end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь $U = U(\rho, T)$ — внутренняя энергия жидкости на единицу массы, f_i — внешние массовые силы, ε — источники тепла на единицу массы. Введем энтропию на единицу массы $S = S(\rho, T)$. Энтропия S связана с энергией U дифференциальным соотношением

$$dU = TdS - pd(1/\rho) \tag{2.2}$$

Будем обозначать термодинамическую величину, вычисленную при $\rho = \rho_0$, $T = T_0$, символом данной величины с нулевым индексом. Тогда из (2.1), (2.2) в линейном приближении получаем

$$\begin{gathered} \partial r/\partial t = -\rho_0 v_{i,i} \\ \partial v_i/\partial t = \rho_0^{-1}[-(p_{\rho 0} r + p_{T0}\theta)\delta_{ij} + \tau_{ij}]_{,j} + f_i \\ \partial\theta/\partial t = -p_{T0}\rho_0^{-1}S_{T0}^{-1}v_{i,i} - \rho_0^{-1}U_{T0}^{-1}q_{i,i} + U_{T0}^{-1}\varepsilon \end{gathered} \tag{2.3}$$

В (2.3) для τ_{ij}, q_i необходимо использовать выражения (1.6). Введем вспомогательные обозначения

$$\begin{gathered} K_0(t) = K_1(t) + {}^4/_3 K_2(t), \\ M_a = M_a(\omega) = \rho_0^{-1}K_{aF}(\omega) \; (a = 0, 1, 2), \; M_3 = M_3(\omega) = \\ = \rho_0^{-1}U_{T0}^{-1}K_{3F}(\omega), \; \rho_0^{-1}K_a(0) = m_a \; (a = 0, 1, 2), \\ \rho_0^{-1}U_{T0}^{-1}K_3(0) = m_3, \; \alpha = p_{\rho 0}, \; \beta = p_{T0}^2\rho_0^{-2}S_{T0}^{-1} \end{gathered} \tag{2.4}$$

Будем считать, что $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$.

Чтобы исследовать распространение сигнала в жидкости, нужно рассмотреть решение уравнений (2.3) с δ-образным источником

$$f_i = f_{i0}\delta'(t)\,\delta(x^1)\,\delta(x^2)\,\delta(x^3), \quad \varepsilon = \varepsilon_0\delta(t)\,\delta(x^1)\,\delta(x^2)\,\delta(x^3) \tag{2.5}$$

Систему (2.3) с источниковым членом (2.5) естественно решать методом преобразования Фурье по временным и пространственным переменным. Будем обозначать операцию транспонирования матриц символом «+». Введем матрицы-столбцы k (волновой вектор) и l соотношениями: $k^+ = \| k_1 k_2 k_3 \|$, $l^+ = \| 0 f_{i0} U_{T0}^{-1}\varepsilon_0 \|$. Обозначим $k^2 = k^+k$ и выберем точку пространства с координатами $x_0^i = L\delta_1^i$, $L > 0$. Тогда фурье-образ по времени полей плотности, скорости и температуры в этой точке пространства такой:

$$\left\| \begin{matrix} r_F(\omega, x_0^j) \\ v_{iF}(\omega, x_0^j) \\ \theta_F(\omega, x_0^j) \end{matrix} \right\| = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \left\| \begin{matrix} r(t, x_0^j) \\ v_i(t, x_0^j) \\ \theta(t, x_0^j) \end{matrix} \right\| dt = Yl \tag{2.6}$$

$$Y = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{ik_lL} (\Sigma(\omega, k_l))^{-1} dk_1\, dk_2\, dk_3 \tag{2.7}$$

$$\Sigma(\omega, k_l) = i\omega 1 + \left\| \begin{matrix} 0 & i\rho_0 k^+ & 0 \\ i\rho_0^{-1}\alpha k & (M_1 + {}^1/_3 M_2) kk^+ + M_2 k^2 & i\rho_0^{-1} p_{T0} k \\ 0 & i p_{T0} \rho_0^{-1} S_{T0}^{-1} k^+ & M_3 k^2 \end{matrix} \right\|$$

$$\det \Sigma(\omega, k_l) = (i\omega + k^2 M_2)^2 [k^4 M_3 (i\omega M_0 + \alpha) + $$
$$+ ik^2\omega(\alpha + \beta + i\omega(M_0 + M_3)) - i\omega^3] = P(\omega, k^2)$$

В выражении (2.7) удобно перейти к интегрированию в сферических координатах R, ψ, φ, связанных с k_1, k_2, k_3 равенствами

$$k_1 = R \sin\psi \cos\varphi, \quad k_2 = R \sin\psi \sin\varphi, \quad k_3 = R \cos\psi$$
$$R \geqslant 0, \quad \psi \in [-\pi/2, \pi/2], \quad \varphi \in [-\pi, \pi]$$

После интегрирования по φ каждый матричный элемент есть сумма слагаемых вида

$$y_\alpha = c_\alpha \int e^{iRL \sin\psi} R^{n+2} \sin^l \psi \cos^{m+1} \varphi\, (P(\omega, R^2))^{-1}\, dR\, d\psi$$
$$0 \leqslant R < +\infty, \quad -\pi/2 \leqslant \psi \leqslant \pi/2 \tag{2.8}$$

где n, l, m — некоторые натуральные числа, $c_\alpha = c_\alpha(\omega)$.

Заметим, что уравнение $P(\omega, R^2) = 0$ относительно R имеет шесть корней, причем множество корней инвариантно относительно преобразования инверсии: $R \mapsto (-R)$. Удобно занумеровать эти корни так, что $\pm R_1(\omega)$ — корни уравнения

$$i\omega + R^2 M_2 = 0 \tag{2.9}$$

причем $\operatorname{Im} R_1 \geqslant 0$, а $\pm R_2(\omega)$, $\pm R_3(\omega)$ — корни уравнения

$$R^4 M_3 (i\omega M_0 + \alpha) + iR^2\omega(\alpha + \beta + i\omega(M_0 + M_3)) - i\omega^3 = 0 \tag{2.10}$$

причем $\operatorname{Im} R_a(\omega) \geqslant 0$ $(a = 2, 3)$.

Лемма. Имеют место строгие неравенства $\operatorname{Im} R_a(\omega) > 0$ $(a = 1, 2, 3)$ при всех ω, лежащих в нижней комплексной полуплоскости.

Доказательство. Предположим, что при некотором ω $\operatorname{Im} R_1(\omega) = 0$. Тогда из (2.9) получаем $\operatorname{Re} M_2 \leqslant 0$, что противоречит (1.9).

Теперь исследуем уравнение (2.10). Величина $z = -i\omega/R^2$ удовлетворяет уравнению, вытекающему из (2.10)

$$z^2 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) z + \lambda_1\lambda_2 = 0 \tag{2.11}$$
$$\lambda_1 = M_0 + \alpha/(i\omega), \quad \lambda_2 = M_3, \quad \lambda_3 = \beta/(i\omega)$$

Обозначим $\alpha_j = \operatorname{Re} \lambda_j$, $\beta_j = \operatorname{Im} \lambda_j$ $(j = 1, 2, 3)$. Отметим, что согласно принятым ранее предположениям

$$\alpha_j > 0 \ (j = 1, 2); \quad \alpha_3 \geqslant 0; \quad \operatorname{sign} \beta_j = -\operatorname{sign} \operatorname{Re} \omega \tag{2.12}$$

Будем считать параметр β переменным, изменяющимся от нуля до $+\infty$. Уравнение (2.11) имеет два корня, непрерывно зависящих от β: $z_a = z_a(\beta)$ $(a = 1, 2)$, причем при всех β, α

$$\operatorname{Re} z_a(\beta) > 0 \tag{2.13}$$

Действительно, при $\beta = 0$ имеем: $z_a(0) = \lambda_a$ $(a = 1, 2)$ и $\operatorname{Re} z_a(0) = \alpha_a > 0$ в силу (2.12). Пусть при некотором положительном β и некотором a $\operatorname{Re} z_a(\beta) = 0$. Подставив этот корень в левую часть уравнения (2.11) и взяв от нее действительную и мнимую части, можно получить два действительных уравнения относительно неизвестной величины $\operatorname{Im} z_a(\beta)$. Из этих уравнений величину $\operatorname{Im} z(\beta)$ можно исключить, и тогда получается несовместимое с (2.12) равенство

$$0 = -(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)^2 + \sum_{j=1}^{3} \beta_j \sum_{i=1}^{3} \alpha_i (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + (\alpha_1\alpha_2 - |\beta_1\beta_2) \left(\sum_{j=1}^{3} \alpha_j\right)^2$$

Пусть теперь $\operatorname{Im} R_a(\omega) = 0$ при некотором ω, причем $a = 2$ или $a = 3$. Тогда

$$\operatorname{Re} z_{a-1} = \operatorname{Im} \omega / R_a^2 \leqslant 0$$

что противоречит (2.13). Лемма доказана.

Вернемся к исследованию выражения (2.8). Заметим, что поскольку элементы матрицы $P(\omega, k^2)(\Sigma(\omega, k_l))^{-1}$ полиномиально зависят от k_l, то справедливо равенство $n = l + m$. Далее матрица $\Sigma(\omega, k_l)$ остается инвариантной при формальной замене $(R, \psi, \varphi) \mapsto (-R, -\psi, -\varphi)$, откуда следует, что $m = 2q$, где q — натуральное число.

Сделаем в (2.8) подстановку $u = \sin\psi$ и проинтегрируем по переменной u

$$y_\alpha = c_\alpha \sum_{d=0}^{q} C_q^{\,d} (-1)^d \int\limits_{0 \leqslant R < +\infty,\ -1 \leqslant u \leqslant 1} \exp(iRLu)\, R^{l+2q+2} u^{l+2d} (P(\omega, R^2))^{-1}\, dR\, du =$$

$$= c_\alpha \sum_{d=0}^{q} a_d \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R^{2(q-d)+1} \exp(iRL)\, (P(\omega, R^2))^{-1}\, dR$$

Здесь C_q^d — биномиальные коэффициенты, a_d — некоторые постоянные. В последнем интеграле можно выполнить интегрирование по R при помощи теории вычетов, и тогда получается выражение

$$y_\alpha = \sum_{a=1}^{3} s_{\alpha a}(\omega) \exp(iR_a(\omega) L) \tag{2.14}$$

где $s_{\alpha a}(\omega)$ — голоморфные в полуплоскости $\operatorname{Im} \omega < 0$ функции, удовлетворяющие неравенству

$$|\, s_{\alpha a}(\omega)\, | \leqslant C\, |\operatorname{Im} \omega\, |^{-N_1} (1 + |\, \omega\, |)^{N_2} \tag{2.15}$$

для некоторых постоянных $C, N_a > 0$.

Из (2.14) и (2.6) вытекает, что

$$\left\| \begin{matrix} r_F(\omega, x_0^{\,j}) \\ v_{iF}(\omega, x_0^{\,j}) \\ \theta_F(\omega, x_0^{\,j}) \end{matrix} \right\| = \sum_{a=1}^{3} l_a \exp(iLR_a(\omega))$$

где $l_a = l_a(\omega)$ — векторы, компоненты которых удовлетворяют неравенствам (2.15).

Введем в рассмотрение функции

$$L_a = L_a(\omega) = \operatorname{Im} R_a(\omega)/(-\operatorname{Im} \omega), \quad \operatorname{Im} \omega < 0 \ (a = 1, 2, 3)$$

Чтобы скорость сигнала в жидкости не превосходила некоторой априорно заданной скорости c, по теореме А необходимо, а по теореме Б и достаточно выполнение неравенств

$$L_a(\omega) \geqslant c^{-1}, \ \operatorname{Im} \omega < 0 \ (a = 1, 2, 3)$$

Положим

$$V_a^{-1} = \inf_{\operatorname{Im} \omega < 0} L_a(\omega) \quad (a = 1, 2, 3)$$

Заметим, что функции $L_a = L_a(\omega)$ не могут достигать нижней грани ни в одной точке нижней комплексной полуплоскости.

В самом деле, предположим противное: пусть точка $\omega = \omega_0$, $\mathrm{Im}\ \omega_0 < 0$ есть точка абсолютного минимума функции $L_a(\omega)$ для некоторого a: $L_a(\omega_0) = V_a^{-1}$. Тогда гармоническая функция двух действительных переменных ω_1 и ω_2

$$h_a = h_a(\omega_1, \omega_2) = \mathrm{Im}\, R_a(\omega_1 + \omega_2) + V_a^{-1}\omega_2$$

достигает в ω_0 абсолютного минимума, равного нулю. Поэтому $h_a \equiv 0$ что, однако, противоречит непрерывности функции $K_{aF}(\omega)$ на действительной оси.

Итак, справедливо равенство

$$V_a^{-1} = \lim_{\xi \to +\infty} \inf_{|\omega| \geqslant \xi} L_a(\omega)$$

Используя (1.10), (2.4), теперь получим

$$V_1 = m_2^{1/2},\ V_{2,3} = (2m_3\alpha^\circ)^{1/2}[\alpha^\circ + \beta^\circ \pm ((\alpha^\circ + \beta^\circ) - 4m_3\alpha^\circ)^{1/2}]^{-1/2}$$
$$\alpha^\circ = \alpha + m_1,\ \beta^\circ = \beta + m_3 \qquad (2.16)$$

Из предыдущих рассуждений ясно, что V_a ($a = 1, 2, 3$) — максимальные скорости распространения различных мод в жидкости. Первое равенство (2.16) соответствует полученному ранее [2], так как эта мода описывает перенос вихрей в жидкости.

Условия

$$V_a \leqslant c\ (a = 1, 2, 3) \qquad (2.17)$$

необходимо учитывать при построении моделей жидкости с конечной скоростью распространения сигнала. Неравенства (2.17) вместе с выражениями (2.16) представляют собой ограничения на релаксационные ядра.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cattaneo M. C.* Sur une forme de l'équation de la chaleur éliminant le paradoxe d'une propagation instantané // Acad. Sci. 1958. T. 247. № 4. P. 431—433.
2. *Динариев О. Ю.* О скорости распространения волн для процессов переноса с релаксацией // Докл. АН СССР. 1988. Т. 301. № 5. С. 1095—1097.
3. *Зубарев Д. Н.* Неравновесная статистическая термодинамика. М.: Наука, 1971. 415 с.
4. *Зубарев Д. Н., Сергеев М. В.* Неравновесная статистическая термодинамика сплошной среды // Дэй У. А. Термодинамика простых сред с памятью. М.: Мир, 1974. С. 167—186.
5. *Монтен Р. Д.* Коллективные возбуждения в классических одноатомных жидкостях // Динамические свойства твердых тел и жидкостей. Исследования методом рассеяния нейтронов. М.: Мир, 1980. С. 391—423.
6. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1973. 536 с.
7. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье. М.: Мир, 1986. 462 с.

Москва

Поступила в редакцию
25.I.1989