Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 1, 1990

УДК 532.592:534.1

С. Я. Секерж-Зенькович

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ В ЗАМКНУТОМ СОСУДЕ

Изучаются трехмерные бесконечно малые колебания вязкой двухслойной тяжелой жидкости в сосуде произвольной формы. Число Рейнольдса предполагается большим (малая вязкость), что позволяет применить идеи теории пограничного слоя и метода усреднения Крылова — Боголюбова. Теория пограничного слоя применяется по аналогии с [1], а также работой [2], в которой решались линейные задачи о колебаниях сжимаемой среды с малой вязкостью. Выводятся приближенные формулы для компонент скорости жидкости, а также для коэффициента затухания и поправки к частоте собственных колебаний идеальной жидкости. Эти величины выражаются, как и аналогичные величины в [1], через собственные значения и собственные функции соответствующей задачи о колебаниях идеальной жидкости. Установлено, что коэффициент затухания и поправка к частоте даже в первом приближении по малому параметру зависят, подобно двумерному случаю, и от потерь энергии в пограничных слоях вблизи границы раздела двухслойной жидкости. Для однородной жидкости в открытом сосуде потери энергии вблизи свободной поверхности жидкости асимптотически малы (см. [1]) по сравнению с потерями вблизи стенок сосуда. В качестве примеров приводятся выражения коэффициента затухания и поправки к частоте колебаний для сосудов в форме прямоугольного параллелепипеда и кругового цилиндра.

Собственные колебания вязкой однородной тяжелой жидкости в открытом сосуде произвольной формы исследованы в [1]. Двумерные колебания вязкой двухслойной жидкости рассмотрены в [3—5].

1. Исходные уравнения. Рассмотрим задачу о собственных бесконечно малых колебаниях двухслойной вязкой тяжелой несжимаемой жидкости, полностью заполняющей замкнутый сосуд. Присвоим индекс 1 всем величинам, относящимся к верхнему слою более легкой жидкости, и индекс 2 — величинам, относящимся к нижнему слою. Скорости $\mathbf{U}_m$ $(m = 1, 2)$ частиц жидкости и давления P_m должны в областях D_m, занятых жидкостью, удовлетворять уравнениям Навье — Стокса и неразрывности. На стенках S_m сосуда должны быть равны нулю скорости $\mathbf{U}_m$. При переходе через границу раздела Σ жидких слоев должны оставаться непрерывными скорости $\mathbf{U}_1$ и $\mathbf{U}_2$, а также нормальные и касательные напряжения. В силу предположения о бесконечной малости движений считаем, что области D_m и поверхность Σ всегда такие же, как в равновесном состоянии жидкости. Считаем также, что частная производная по времени от возвышения H границы раздела равна вертикальным компонентам скоростей верхней и нижней жидкостей.

$$\partial\mathbf{U}_m/\partial t = -\rho_m^{-1}\nabla P_m - g\mathbf{k} + \nu_m\Delta\mathbf{U}, \quad \operatorname{div}\mathbf{U}_m = 0 \text{ в } D_m$$
$$\mathbf{U}_m = 0 \text{ на } S_m$$
$$-P_1 - \frac{\partial P_1}{\partial z}H + 2\nu_1\rho_1\frac{\partial U_{1z}}{\partial z} = -P_2 - \frac{\partial P_2}{\partial z}H + 2\nu_2\rho_2\frac{\partial U_{2z}}{\partial z} \tag{1.1}$$
$$\nu_1\rho_1\left(\frac{\partial U_{1\xi}}{\partial z} + \frac{\partial U_{1z}}{\partial \xi}\right) = \nu_2\rho_2\left(\frac{\partial U_{2\xi}}{\partial z} + \frac{\partial U_{2z}}{\partial \xi}\right), \quad \xi = x, y$$
$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2, \; U_{mz} = \partial H(x, y, t)/\partial t \text{ на } \Sigma, \; m = 1, 2$$

Здесь ρ_m — плотности, ν_m — кинематические вязкости жидкостей; декартова прямоугольная система координат xyz выбрана так, что плоскость xy совпадает с плоскостью Σ, а ось z и орт $\mathbf{k}$ направлены вертикально вверх.

Введем безразмерные переменные, приняв за единицу длины характерный размер d сосуда, а за единицу времени $T_0 = 1/\omega_0$, где ω_0 — наименьшая собственная частота колебаний идеальной жидкости:

$$x = dx^*,\ y = dy^*,\ z = dz^*,\ t = t^*/\omega_0,\ \rho_1 = \rho\rho_2,\ \nu_1 = \nu\nu_2$$
$$\mathbf{U}_m = d\omega_0\mathbf{u}_m,\ P_m = -g\rho_m z + d^2\omega_0^2\rho_m p_m,\ H = d\eta \tag{1.2}$$

Представим векторы скорости $\mathbf{U}_m$ жидкостей в виде суммы потенциальной и вихревой составляющих

$$\mathbf{u}_m = -\nabla\varphi_m + \mathbf{v}_m \tag{1.3}$$

и, опуская здесь и ниже звездочку, положим, что $p_m = \partial\varphi_m/\partial t$, а функции φ_m и $\mathbf{v}_m$ удовлетворяют в D_m уравнениям

$$\Delta\varphi_m = 0;\ \partial\mathbf{v}_m/\partial t = R^{-1}\mu_m\Delta\mathbf{v}_m,\ \operatorname{div}\mathbf{v}_m = 0 \tag{1.4}$$

($R = \omega_0 d^2/\nu_2$, $\mu_m = \nu\delta_{1m} + \delta_{2m}$, δ_{kl} — символы Кронекера).

Тогда дифференциальные уравнения задачи будут удовлетворены в областях D_m. Граничные условия для φ_m и $\mathbf{v}_m$ запишутся так:

$$\nabla\varphi_m = \mathbf{v}_m \text{ на } S_m$$
$$\nabla\varphi_2 - \nabla\varphi_1 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$$
$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} - \rho\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + F\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\varphi_2 - \rho\varphi_1) = v_{2z} - \rho v_{1z} +$$
$$+\frac{2F}{R}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v_{2z}}{\partial z} - \rho\nu\frac{\partial v_{1z}}{\partial z} + \rho\nu\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z^2}\right) \quad \left(F = \frac{\omega_0^2 d}{g}\right) \tag{1.5}$$
$$\frac{1}{\sqrt{R}}\left[2\rho\nu\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\xi\partial z} - 2\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\xi\partial z} - \rho\nu\left(\frac{\partial v_{1\xi}}{\partial z} + \frac{\partial v_{1z}}{\partial\xi}\right) + \frac{\partial v_{2\xi}}{\partial z} + \frac{\partial v_{2z}}{\partial\xi}\right] = 0$$
$$\xi = x, y \quad \text{на } \Sigma$$

Далее считаем, что $R \gg 1$.

2. Общая схема решения. Система уравнений (1.4) является сингулярно возмущенной, поскольку содержит малый параметр $1/R$ при старшей производной. Асимптотическое решение задачи (1.4)—(1.5) ищем в виде суммы регулярной части, приближающей решение во внутренних точках областей D_m, и погранслойных частей, играющих существенную роль лишь в подобластях D_{mS} и $D_{m\Sigma}$, примыкающих к поверхностям S_m и Σ.

Положим

$$\varphi_m = \Phi_m \equiv \Phi_{m0} + R^{-1/2}\Phi_{m1} + \ldots \tag{2.1}$$
$$\mathbf{v}_m = S\mathbf{v}_m + \Sigma\mathbf{v}_m \equiv S_0\mathbf{v}_m + R^{-1/2}S_1\mathbf{v}_m + \ldots + \Sigma_0\mathbf{v}_m + R^{-1/2}\Sigma_1\mathbf{v}_m$$

Здесь Φ_m — регулярная часть асимптотического разложения, а $S\mathbf{v}_m$ и $\Sigma\mathbf{v}_m$ — погранслойные члены, существенные лишь в D_{mS} и $D_{m\Sigma}$ соответственно.

Введем в D_{mS} криволинейные ортогональные координаты s_1, s_2, s, так что поверхность $s = 0$ совпадает с поверхностями S_m и $s > 0$ в D_m. В $D_{m\Sigma}$ введем декартовы прямоугольные координаты x, y_m, z_m, так что ось x совпадает с осью исходной системы координат, $y_m \in \Sigma$, а оси z_m направлены внутрь областей D_m.

Рассматриваем погранслойные $S\mathbf{v}_m$ и $\Sigma\mathbf{v}_m$ члены как функции s_1, s_2, σ и x, y_m, ζ_m соответственно, причем $\sigma = R^{1/2}s$, $\zeta_m = R^{1/2}z_m$ — «растянутые» координаты. Требуем, чтобы погранслойные функции удовлетворяли условиям

$$S\mathbf{v}_m \to 0 \text{ при } \sigma \to \infty; \quad \Sigma\mathbf{v}_m \to 0 \text{ при } \zeta_m \to \infty \tag{2.2}$$

Подставим разложения (2.1) в систему уравнений (1.4). Получим отдельные уравнения для регулярных и погранслойных членов. Предположим, что функции Φ_m, а также параметры Ламе введенных криволинейных систем координат изменяются в пограничных слоях D_{mS} и $D_{m\Sigma}$ медленно при изменении координат s и Z_m по сравнению с функциями $S\mathbf{v}_m$ и $\Sigma\mathbf{v}_m$. Поэтому далее рассматриваем Φ_m как функции исходных координат x, y, z, а параметры Ламе H_l $(l = 1, 2, 3)$ — как функции s_1, s_2, s, т. е. не вводим в их аргументы «растянутых» переменных σ и ζ_m.

Подставим разложения (2.1) в граничные условия (1.5), получим соотношения на S_m и Σ, связывающие регулярные и погранслойные члены разложений.

3. Нулевое приближение. Построим нулевое приближение, т. е. функции, удовлетворяющие задаче (1.4), (1.5) с точностью до $O(R^{-1/2})$.

Рассматривая величины порядка $R^{1/2}$ в последнем уравнении (1.4) и величины порядка R^0 во втором уравнении, спроектированном на направление координатной линии s, имеем

$$\frac{\partial}{\partial\sigma} S_0 v_{m3} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial t} S_0 v_{m3} = \frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} S_0 v_{m3}$$

Решив с учетом условий (2.2) эти уравнения, а также аналогичные уравнения для $\Sigma_0 v_{m\zeta_m}$, найдем

$$S_0 v_{m3} = \Sigma_0 v_{m\zeta m} = 0 \tag{3.1}$$

Рассматривая величины порядка R^0 в первом уравнении (1.4) и в тех из граничных условий (1.5), в которых содержатся $S_0 v_{m3}$ и $\Sigma_0 v_{m\zeta m}$, приходим к следующей краевой задаче:

$$\begin{gathered} \Delta\Phi_{m0} = 0 \text{ в } D_m \\ \frac{\partial\Phi_{m0}}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S_m \\ \frac{\partial\Phi_{20}}{\partial z} - \frac{\partial\Phi_{10}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial\Phi_{20}}{\partial z} - \rho\frac{\partial\Phi_{10}}{\partial z} + F\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Phi_{20} - \rho\Phi_{10}) = 0 \quad \text{на } \Sigma \end{gathered} \tag{3.2}$$

Здесь и ниже $\mathbf{n}$ — внутренняя по отношению к области D_m нормаль к граничной поверхности этой области.

Частными решениями задачи являются функции

$$\begin{gathered} \Phi_{m0}(M, t) = Cf_{m0}(M)\cos\psi(t) \\ (dC/dt = 0, \; d\psi/dt = \overline{\omega}, \; \overline{\omega} = \omega/\omega_0) \end{gathered} \tag{3.3}$$

Здесь $f_{m0}(M)$ — собственная функция краевой задачи, получающейся из (3.2) после замены во втором граничном условии на Σ операции дифференцирования по t умножением на $-\overline{\omega}^2$, где произведение $-F\overline{\omega}^2$ равно одному из собственных значений задачи (3.2).

Заметим, что задача (3.2) имеет дискретный спектр собственных значений, причем конечной кратности. Через $f_{m0}(M)$ обозначена одна из собственных функций, соответствующая выбранному собственному значению.

Решения (3.3) описывают собственные колебания идеальной жидкости, имеющие постоянную амплитуду C и равномерно изменяющуюся во времени фазу $\psi(t)$.

Рассматривая собственные колебания вязкой жидкости, выберем функции $\Phi_{m0}(M, t)$ в виде (3.3), причем, следуя идее метода усреднения, считаем, что амплитуда колебаний C и скорость изменения фазы $d\psi/dt$ медленно изменяются во времени в зависимости от величины самой амплитуды C и разности фаз $\theta = \psi - \bar{\omega}t$. Положим

$$dC/dt = R^{-1/2}A_1(C,\ \theta) + R^{-1}A_2(C,\ \theta) + \ldots$$
$$d\psi/dt = \bar{\omega} + R^{-1/2}B_1(C,\ \theta) + R^{-1}B_2(C,\ \theta) + \ldots \tag{3.4}$$

где $A_1(C, \theta)$, $B_1(C, \theta)$, $A_2(C, \theta)$, ... — периодические функции θ с периодом 2π, подлежащие как и коэффициенты разложений (2.1), определению из задачи (1.4), (1.5).

При вычислении частных производных по времени t от функций, входящих во второе и третье уравнения (1.4) и второе условие (1.5), считаем, что функции зависят явно от C и ψ, а производные по t определяются формулами (3.4). Так, для производных по t от функций Φ_m имеют место следующие разложения (учитываем соотношения (2.1) и (3.4)):

$$\frac{\partial \Phi_m}{\partial t} = \bar{\omega}\frac{\partial \Phi_{m0}}{\partial \psi} + R^{-1/2}\left[\bar{\omega}\frac{\partial \Phi_{m1}}{\partial \psi} + \frac{\partial \Phi_{m0}}{\partial C}A_1 + \frac{\partial \Phi_{m0}}{\partial \psi}B_1\right] + \ldots$$
$$\frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial t^2} = \bar{\omega}^2\frac{\partial^2 \Phi_{m0}}{\partial \psi^2} + R^{-1/2}\left[\bar{\omega}^2\frac{\partial^2 \Phi_{m1}}{\partial \psi^2} + 2\bar{\omega}\left(\frac{\partial^2 \Phi_{m0}}{\partial C\partial \psi}A_1 + \frac{\partial^2 \Phi_{m0}}{\partial \psi^2}B_1\right)\right] + \ldots \tag{3.5}$$

Найдем теперь функции $\Sigma_0 v_{mx}$, $\Sigma_0 v_{my_m}$, $S_0 v_{ml}$, где $l = 1, 2$.

Уравнения и граничные условия для функций Σ_0, выводимые из второго уравнения (1.4), второго и третьего условий (1.5), с использованием формул (3.3) и (3.4), таковы:

$$\frac{\partial \Sigma_0 v_{m\xi_m}}{\partial \psi} = \bar{\omega}\mu_m\frac{\partial^2 \Sigma_0 v_{m\xi_m}}{\partial {\zeta_m}^2}, \quad \xi_m = x, y_m \text{ в } D_{m\Sigma}$$
$$\rho\nu\frac{\partial \Sigma_0 v_{1\xi_1}}{\partial \zeta_1} \pm \frac{\partial \Sigma_0 v_{2\xi_2}}{\partial \zeta_2} = 0$$
$$\Sigma_0 v_{1\xi_1} \mp \Sigma_0 v_{2\xi_2} = \frac{\partial}{\partial \xi}(f_{10} - f_{20})C\cos\psi \text{ на } \Sigma$$

(верхний знак берется при $\xi_1 = \xi_2 = \xi = x$, нижний — при $\xi_1 = y_1$, $\xi_2 = y_2$, $\xi = y$).

Заметим, что $y_1 = -y_2 = y$, а функции f_{m0} считаются зависящими от исходных декартовых координат x, y, z.

Решения последних задач при учете требования (2.2) имеют вид

$$\Sigma_0 v_{m\xi_m} = (\delta_{1m} \mp \rho\sqrt{\nu}\,\delta_{2m})\frac{C}{1+\rho\sqrt{\nu}}\frac{\partial}{\partial \xi}(f_{10} - f_{20})|_{z=0}\, e^{-\Omega\zeta_m}\cos(\psi - \Omega\zeta_m),$$
$$\Omega = \left(\frac{\bar{\omega}}{2\mu_m}\right)^{1/2} \tag{3.6}$$

знак минус берется при $\xi_m = x$, $\xi = x$, плюс — при $\xi_m = y_m$, $\xi = y$.

Функции $S_0 v_{ml}$, где $l = 1, 2$, найденные с учетом граничных условий (1.5) на S_m, таковы:

$$S_0 v_{ml} = H_l^{-1}\partial f_{m0}/\partial s_l\,|_{S_m}\, Ce^{-\Omega\sigma}\cos(\psi - \Omega\sigma) \tag{3.7}$$

Здесь H_1, H_2 ($H_3 = 1$) параметры Ламе системы координат s_1, s_2, s.

Рассмотрев в третьем уравнении (1.4) члены порядка R^0 и, учтя формулы (3.6) и условия (2.2), получим

$$\Sigma_1 v_{m\zeta_m} = (\delta_{1m} - \rho\delta_{2m})(1/2\nu/\bar{\omega})^{1/2}Ee^{-\Omega\zeta_m}Q(\psi - \Omega\zeta_m)$$

$$S_1 v_{m3} = (1/_2 \mu_m/\overline{\omega})^{1/2} G_m C e^{-\Omega\sigma} Q(\psi - \Omega\sigma)$$

$$Q(\alpha) = \cos\alpha + \sin\alpha, \; E = (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)(f_{10} - f_{20})\,|_{z=0} \tag{3.8}$$

$$G_m(s_1, s_2) = \frac{1}{H_1 H_2}\left[\frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial f_{m0}}{\partial s_1}\right) + \frac{\partial}{\partial s_2}\left(\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial f_{m0}}{\partial s_2}\right)\right]\Bigg|_{S_m}$$

Заметим, из первого равенства (3.8) следует соотношение

$$\rho \Sigma_1 v_{1\zeta_1} + \Sigma_1 v_{1\zeta_2}\,|_{\zeta_1=\zeta_2=0} = 0 \tag{3.9}$$

4. Формулы для коэффициента затухания и поправки к частоте. Чтобы вывести формулы для декремента затухания и поправки к частоте собственных колебаний идеальной жидкости, построим ряд уравнений первого приближения, в котором задача (1.4), (1.5) удовлетворяется с точностью до $O(R^{-1})$. Можно проверить, что если во втором уравнении (1.5) приравнять члены порядка $R^{-1/2}$, то функции $\Sigma_1 v_{m\zeta_m}$, $S_1 v_{m3}$, определяемые формулами (3.8), будут удовлетворять полученным уравнениям.

Уравнения и граничные условия для Φ_{m1} имеют вид

$$\Delta\Phi_{m1} = 0 \text{ в } D_m \tag{4.1}$$

$$\partial\Phi_{m1}/\partial n = S_1 v_{m3} \text{ на } S_m \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial\Phi_{21}}{\partial z} - \frac{\partial\Phi_{11}}{\partial z} = -\Sigma_1 v_{2\zeta_2} - \Sigma_1 v_{1\zeta_1}$$

$$\frac{\partial\Phi_{21}}{\partial z} - \rho\frac{\partial\Phi_{11}}{\partial z} + F\overline{\omega}^2\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}(\Phi_{21} - \rho\Phi_{11}) = -2\overline{\omega}F\left[\left(\frac{\partial^2\Phi_{20}}{\partial C\partial\psi} - \rho\frac{\partial^2\Phi_{10}}{\partial C\partial\psi}\right)A_1 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial^2\Phi_{20}}{\partial\psi^2} - \rho\frac{\partial^2\Phi_{10}}{\partial\psi^2}\right)B_1\right] - \rho\Sigma_1 v_{1\zeta_1} - \Sigma_1 v_{2\zeta_2} \quad \text{на } \Sigma \tag{4.3}$$

По соображениям, приведенным ниже, в правых частях равенств (4.2) и (4.3) опущены функции $\Sigma_0 v_{mx}$, $\Sigma_0 v_{my_m}$ и $S_0 v_{m3}$ соответственно.

Правые части (4.2) и (4.3) зависят согласно соотношениям (3.3), (3.8) от ψ по законам $\sin\psi$ и $\cos\psi$. Поэтому можно считать, что решения Φ_{m1} задачи (4.1)—(4.3) удовлетворяют соотношению $\partial^2\Phi_{m1}/\partial\psi^2 = -\Phi_{m1}$, учтя которое, а также представление (3.3) и соотношение (3.9), запишем граничные условия на Σ так:

$$\partial\Phi_{21}/\partial z - \partial\Phi_{11}/\partial z = -\Sigma_1 v_{2\zeta_2} - \Sigma_1 v_{1\zeta_1}$$

$$\partial\Phi_{21}/\partial z - \rho\partial\Phi_{11}/\partial z - F\overline{\omega}^2(\Phi_{21} - \rho\Phi_{11}) = \tag{4.4}$$

$$= 2\overline{\omega}F(f_{20} - \rho f_{10})(A_1 \sin\psi + B_1 C\cos\psi) \text{ на } \Sigma$$

Параметр $F\overline{\omega}^2$, выбранный в разд. 3, равен собственному числу для задачи (4.1), (4.2), (4.4). Поэтому решение неоднородной краевой задачи существует лишь при наложении условий на правые части соотношений (4.2), (4.4). Эти условия позволяют найти величины A_1 и B_1, определяющие скорость медленного изменения амплитуды C и фазы ψ колебаний.

Выведем данные условия, воспользовавшись приемом, аналогичным примененному в [1].

Предположив, что решение указанной краевой задачи, т. е. функции Φ_{m1} найдены, запишем формулы Грина для функций f_{m0} и Φ_{m1}:

$$\int\limits_{S_m} f_{m0}\frac{\partial\Phi_{m1}}{\partial n}dS - (-1)^m\int\limits_{\Sigma}\left(f_{m0}\frac{\partial\Phi_{m1}}{\partial z} - \Phi_{m1}\frac{\partial f_{m0}}{\partial z}\right)d\Sigma = 0$$

Подставив в эти формулы выражения для производных функций f_{m0} и Φ_{m1}, определенные из (3.2), (3.3), (4.2), (4.4), получим

$$(1-\rho)\int\limits_{S_m} f_{m0}S_1 v_{m3}\,dS + \int\limits_{\Sigma}[2\overline{\omega}F_m Q_1 - r_m F_m\overline{\omega}^2\Phi_{m1}f_{3-m,0} +$$

$$+ r_m f_{m0}(\Sigma_1 v_{1\zeta_1} + \Sigma_1 v_{2\zeta_2} + F_m\overline{\omega}^2\Phi_{3-m,1})]\,d\Sigma = 0$$

$$Q_1 = (A_1 \sin\psi + CB_1 \cos\psi)(f_{20} - \rho f_{10}),\ r_1 = 1,\ r_2 = -\rho,\ F_1 = F,\ F_2 = -F$$

Отметим, что если бы в правых частях формул (4.2) и (4.3) не были опущены функции $\Sigma_0 v_{mx}$, $\Sigma_0 v_{my_m}$, то в левых частях последних равенств фигурировали бы интегралы, имеющие порядок $R^{-1/2}$, которые в данном приближении все равно бы пришлось отбросить.

Умножив на ρ последнее соотношение, в котором выбрано $m = 1$, и сложив с соотношением, в котором $m = 2$, получим после преобразований с учетом равенств (3.1) и (3.9)

$$2(1-\rho)F^{-1}\varpi^{-3}(A_1\sin\psi + CB_1\cos\psi)\int\limits_{\Sigma}(\partial f_{20}/\partial z)^2\, d\Sigma =$$
$$= \rho \int\limits_{S_1+\Sigma} f_{10}\mathbf{a}_1\mathbf{n}_1\, dS + \int\limits_{S_2+\Sigma} f_{20}\mathbf{a}_2\mathbf{n}_2\, dS \tag{4.5}$$
$$\mathbf{a}_m = S_0\mathbf{v}_m + R^{-1/2}S_1\mathbf{v}_m + \Sigma_0\mathbf{v}_m + R^{-1/2}\Sigma_1\mathbf{v}_m$$

Компоненты векторов $S_0\mathbf{v}_1$, $\Sigma_0\mathbf{v}_1, \ldots, \Sigma_1\mathbf{v}_2$ определяются формулами (3.1), (3.6)—(3.8), причем считается, что компоненты векторов $S_1\mathbf{v}_m$ и $\Sigma_1\mathbf{v}_m$ — касательные к поверхностям S_m и Σ соответственно равны нулю. Через $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ обозначены внутренние по отношению к областям D_m и Σ единичные нормали к границам этих областей.

Преобразуем правую часть (4.5), воспользовавшись формулой Гаусса — Остроградского и учтя, что векторы $\mathbf{a}_m$ можно считать соленоидальными в D_m (в самом деле, $\mathbf{a}_m$ соленоидальны с точностью до $O(R^{-1/2})$ в D_{mS}, $D_{m\Sigma}$, а $|\mathbf{a}_m|$ быстро убывают по мере удаления точки интегрирования от границ D_m). Имеем

$$2(1-\rho)F^{-1}\varpi^{-3}(A_1\sin\psi + CB_1\cos\psi)\int\limits_{\Sigma}(\partial f_{20}/\partial z)^2\, d\Sigma =$$
$$= -\rho\int\limits_{D_1}\nabla f_{10}\mathbf{a}_1\, dv - \int\limits_{D_2}\nabla f_{20}\mathbf{a}_2\, dv \tag{4.6}$$

Основной вклад в правую часть (4.6) вносят интегралы по подобластям D_{mS} и $D_{m\Sigma}$. В данных подобластях производные по s и z_m от функций f_{m0} можно с точностью до $O(R^{-1/2})$ считать равными нулю, а производные по s_1, s_2 и x, y_m, соответственно, заменить их значениями при $s = z_m = 0$. Учтя это, выполним в объемных интегралах (4.6) интегрирование по s и z_m в пределах от 0 до ∞, в результате чего интегралы сведутся к поверхностным и равенство (4.6) примет вид

$$2^{3/2}(1-\rho)F^{-1}\varpi^{-5/2}(A_1\sin\psi + CB_1\cos\psi) = -CI(\cos\psi + \sin\psi)$$
$$I = = I_3^{-1}\left(\rho\sqrt{\nu}\, I_1 + I_2 + \frac{\rho\sqrt{\nu}}{1+\rho\sqrt{\nu}} I_4\right) \tag{4.7}$$
$$I_1 = \int\limits_{S_1}(\nabla_2 f_{10})^2\, dS,\quad I_2 = \int\limits_{S_2}(\nabla_2 f_{20})^2\, dS$$
$$I_3 = \int\limits_{\Sigma}(\partial f_{20}/\partial z)^2\, d\Sigma,\quad I_4 = \int\limits_{\Sigma}(\nabla_2 f_{10} - \nabla_2 f_{20})^2\, d\Sigma$$

Отсюда

$$A_1 = -CF2^{-3/2}\varpi^{5/2}(1-\rho)^{-1} I,\ B_1 = A_1/C$$

Подставив найденные значения A_1 и B_1 в уравнения (3.4) и введя снова размерные переменные по формулам (1.2), придем к следующим выражетниям для размерного коэффициента затухания и для поправки к частоте:

$$\alpha = A_1\omega_0 C^{-1}R^{-1/2} = -(2^{-3}\nu_2\omega^5)^{1/2}\quad [g(1-\rho)]^{-1} I$$

$$\Delta\omega = B_1\omega_0 R^{-1/2} = \alpha \tag{4.8}$$

Величины, содержащие I_3 и I_4, определяют потери механической энергии на границе раздела жидкостей, а содержащие I_1 и I_2 — потери энергии на стенках сосуда. В общем случае все эти величины имеют один порядок малости $R^{-1/2}$. Для предельного случая $\rho = 0$ однородной жидкости потери энергии на свободной поверхности имеют более высокий порядок малости, что следует из (4.7), (4.8) и из формулы (2.21) работы [1], к которой сводится (4.8) при $\rho = 0$.

5. **Примеры.** Рассмотрим сосуд, имеющий вертикальную боковую поверхность, плоское дно и плоскую верхнюю крышку. Выберем функцию $f_{m0}(M)$ в виде (h_m — глубины жидких слоев).

$$f_{m0} = (-1)^{m+1} sh^{-1}\ \varkappa_n h_m\ \chi_n(x,\ y)\ \mathrm{ch}\ \{\varkappa_n [h_m + (-1)^m z]\}$$

где $\chi_n(x,\ y)$ — одна из собственных функций задачи

$$\Delta_2\chi_n + \varkappa_n^2\chi_n = 0\ \text{ в }\ \Sigma,\quad \partial\chi_n/\partial n = 0\ \text{ на }\ \Gamma \tag{5.1}$$

причем Δ_2 — оператор Лапласа по переменным x, y, а Γ — кривая, по которой плоскость Σ $(z = 0)$ пересекается боковой поверхностью сосуда. Частота ω_n колебаний идеальной жидкости выражается через $\varkappa_n$ по формуле

$$\omega_n^2 = g\varkappa_n(\rho_2 - \rho_1)(\rho_2 \,\mathrm{cth}\, \varkappa_n h_2 + \rho_1 \,\mathrm{cth}\, \varkappa_n h_1)^{-1} \tag{5.2}$$

Подставив функции f_{m0} в (4.7) и проинтегрировав по z, получим

$$I_m = \mathrm{sh}^{-2}\varkappa_n h_m \left\{\frac{\mathrm{sh}\, 2\varkappa_n h_m}{4\varkappa_n}\int\limits_\Gamma \left[\left(\frac{\partial\chi_n}{\partial l_h}\right)^2 + \varkappa_n^2\chi_n^2\right] d\gamma + \right.$$

$$\left. + \frac{h_m}{2}\int\limits_\Gamma\left[\left(\frac{\partial\chi_n}{\partial l_h}\right)^2 - \varkappa_n^2\chi_n^2\right] d\gamma + \int\limits_\Sigma\left[\left(\frac{\partial\chi_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\chi_n}{\partial y}\right)^2\right] d\Sigma\right\},\quad m = 1, 2 \tag{5.3}$$

$$I_3 = \varkappa_n^2\int\limits_\Sigma \chi_n^2\, d\Sigma,\quad I_4 = (\mathrm{cth}\,\varkappa_n h_1 + \mathrm{cth}\,\varkappa_n h_2)^2 \int\limits_\Sigma\left[\left(\frac{\partial\chi_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\chi_n}{\partial y}\right)^2\right] d\Sigma$$

Здесь $\partial/\partial l_h$ — производные по касательной к кривой Γ в плоскости Σ.

Чтобы рассчитать коэффициент затухания и поправку к частоте, надо найти собственные числа $\varkappa_n$ и собственные функции χ_n задачи (5.1), затем по формулам (5.3) вычислить I_m $(m = 1, 2, 3, 4)$ и подставить I_m в (4.8), причем в качестве ω надо принять ω_n, определяемую равенством (5.2).

Приведем окончательные выражения I_m $(m = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ в двух случаях.

А. Сосуд имеет форму прямоугольного параллелепипеда $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $-h_2 \leqslant z \leqslant h_1$. В этом случае

$$\varkappa_{sr} = \pi\left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2}\right)^{1/2},\quad \chi_{sr} = \cos\frac{\pi r x}{a}\cos\frac{\pi s y}{b},\quad s = 0, 1, \ldots,\quad r = 1, 2, \ldots$$

$$I_m = \frac{1}{\mathrm{sh}^2\varkappa_{sr}h_m}\ \frac{ab}{2(2-\delta_{s0})}\left\{\frac{q}{\varkappa_{sr}}\left[\frac{r^2}{a^2}\left(\frac{2-\delta_{s0}}{b} + \frac{1}{a}\right) + \frac{s^2}{b^2}\left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b}\right)\right] - \right.$$

$$\left. - 2h_m\pi^2\left(\frac{r^2}{a^3} + \frac{s^2}{b^3}\right) + \varkappa_{sr}^2\right\},\quad m = 1, 2\quad q = \pi^2\,\mathrm{sh}\, 2\varkappa_n h_m$$

$$I_3 = 2^{-2+\delta_{s0}}\varkappa_{sr}^2 ab,\quad I_4 = (\mathrm{cth}\,\varkappa_{sr}h_1 + \mathrm{cth}\,\varkappa_{sr}h_2)^2 I_3$$

Б. Сосуд имеет форму кругового цилиндра $0 \leqslant R^* \leqslant d$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $-h_2 \leqslant z \leqslant h_1$. В этом случае $\varkappa_{sr} = \nu_{sr}/d$, s, $r = 1,\ 2, \ldots$, где ν_{sr} — последовательные положительные нули производных функций Бесселя $(J_\nu'(\nu_{sr}) = 0,\ 0 < \nu_{s1} < \nu_{s2} < \ldots)$

$$\chi_{0r} = 2^{-1/2}J_0(\nu_{0r}R^*/d),\quad \chi_{sr}^{(1)} = J_s(\nu_{sr}R^*/d)\cos s\varphi,\quad \chi_{sr}^{(2)} = J_s(\nu_{sr}R^*/d)\sin s\varphi$$

$$I_m = \frac{\pi J_s^2(\nu_{sr})}{2\,\mathrm{sh}^2\varkappa_{sr}h_m}\left[\frac{\mathrm{sh}\, 2\varkappa_{sr}h_m}{2\nu_{sr}}(s^2 + \nu_{sr}^2) + (\nu_{sr}^2 - s^2)\left(1 - \frac{h_m}{d}\right)\right],\quad m = 1, 2$$

$$I_3 = \pi 2^{-1}(\nu_{sr}^2 - s^2)J_s^2(\nu_{sr}),\quad I_4 = (\mathrm{cth}\,\varkappa_{sr}h_1 + \mathrm{cth}\,\varkappa_{sr}h_2)^2 I_3$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черноусько Ф. Л.* О свободных колебаниях вязкой жидкости в сосуде // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 6. С. 836—847.
2. *Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н., Федотова Е. В.* Асимптотическое решение линеаризованной задачи о распространении звука в ограниченной среде с малой вязкостью // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1987. Т. 27. № 2. С. 226—236.
3. *Harrison W. J.* The influence of viscosity on the oscillations of superimposed fluids// Proc. London Math. Soc. 1908. V. 6. P. 396—405.
4. *Thorpe S. A.* On standing internal gravity waves of finite amplitude // J. Fluid Mech. 1968. V. 32. No 3. P. 489—528.
5. *Howes F. A.* A model for viscous attenuation of waves on the common boundary of two superimposed fluids // Wave motion. 1987. V. 9. No. 5. P. 363—375.

Москва

Поступила в редакцию
7.III.1989