

УДК (531.355 + 532.5):534.1

© 1990 г.

Л. Д. Акуленко, С. А. Михайлов, С. В. Нестеров

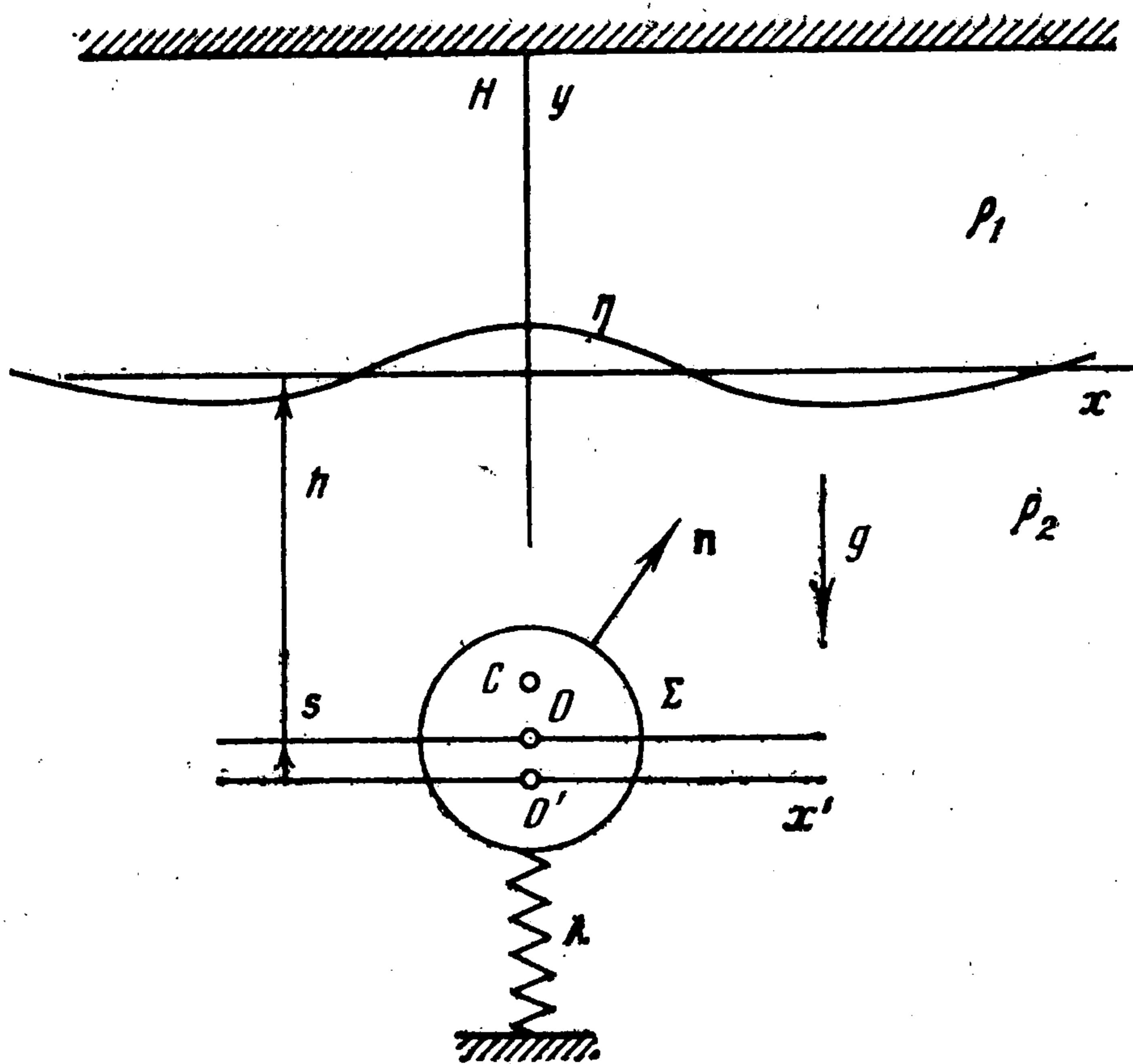
КОЛЕБАНИЯ ОСЦИЛЛЯТОРА ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ДВУХ ЖИДКОСТЕЙ

Изучаются свободные колебания осциллятора (твердого тела с упругой связью), находящегося вблизи границы раздела двух устойчиво стратифицированных жидкостей. Жидкости предполагаются идеальными и несжимаемыми. Движения тела приводят к излучению внутренних волн по поверхности раздела. Развиваются численно-аналитические методы исследования малых колебаний осциллятора и жидкости для самосогласованной гидродинамической модели. Обнаружены обусловленные дисперсионными свойствами среды качественные особенности затухания колебаний, а также возбуждения и распространения внутренних волн. Исследована амплитудно-частотная характеристика осциллятора с учетом реакции волн, определяющая глобальные свойства колебательной системы, такие, как добротность, изменение частоты и др.

1. Исходные предположения и постановка задачи. Исследуются малые вертикальные колебания механической системы, представленной на фиг. 1. Считается, что выпуклое твердое тело C с достаточно гладкой границей Σ находится под поверхностью раздела двух идеальных несжимаемых жидкостей. Для определенности принимается, что тело представляет собой круговой цилиндр, образующая которого при движении остается параллельной горизонту. Пусть a — радиус цилиндра, b — длина образующей, $b \gg a$; h — глубина погружения, $h \gg a$; ρ_1 — плотность верхнего слоя жидкости, $\rho_1 \gg 0$; H — толщина слоя, $0 < H < \infty$; ρ_2 — плотность бесконечно глубокой нижней жидкости, $\rho_2 > \rho_1$. Жидкости находятся в однородном поле силы тяготения, ускорение которой равно g .

Предполагается, что поступательное движение оси O цилиндра C происходит в вертикальной плоскости, перпендикулярной плоскости рисунка xu под действием силы тяготения, сил реакции жидкости и линейной возвращающей силы. В качестве механической реализации, возвращающей к некоторому устойчивому положению равновесия силы, рассматривается линейная упругая связь (пружина) с коэффициентом жесткости λ (фиг. 1). Отметим, что, поскольку $b \gg a$, движения жидкостей можно считать приближенно плоскими.

Постановка механической задачи заключается в следующем. В начальный момент времени $t = 0$ тело (его центр O или центр масс C) смещено вертикально из положения равновесия O' на малое расстояние s^0 , $|s^0| \ll a$. Затем оно отпускается с нулевой начальной скоростью и при $t > 0$ начинает совершать колебательные движения. В начальный момент жидкости также покоились, а поверхность раздела была горизонтальной, т. е. $y = \eta(x, 0) = 0$, где $y = \eta(x, t)$ — возвышение границы раздела. Потенциальная энергия тела будет расходоваться на образование волн, расходящихся от тела, а колебания тела будут затухать. Требуется определить последующее движение осциллятора $s(t)$ с учетом возникающих волн в окружающей неоднородной жидкости и форму поверхности раздела $\eta(x, t)$. Анализ движения



Фиг. 1

системы проводится на основе линейной теории волновых движений жидкости [1].

Исследованию колебательных движений тела, плавающего на свободной поверхности однородной жидкости, посвящена обширная литература ([1—5] и др.). Так, изучалось [3] затухание колебаний «вежи Фруда». Следует отметить, что, как правило, авторы ограничиваются анализом асимптотического поведения колебаний тел при неограниченном увеличении времени. Эти работы в основном повторяют результаты Л. Н. Сретенского [1]. Отмечалось [4], что «движение плавающего тела может быть определено точно, однако совсем немного можно сказать о волновом движении жидкости». Детально изучались [5, 6] колебания тонкого твердого тела на границе раздела двухслойной жидкости.

В предлагаемой работе в полной постановке решается задача о колебательных движениях цилиндра с упругой связью под границей раздела двух жидкостей и исследуются волновые движения жидкостей. Динамика системы существенно зависит от трех дополнительных параметров. Это — глубина верхнего слоя жидкости, отношение плотностей жидкостей и частота свободных колебаний ненагруженного (невоздействующего с жидкостью) осциллятора. Данное обстоятельство значительно обогащает динамику колебательной системы по сравнению со случаем тела, плавающего на свободной поверхности или границе раздела жидкостей [1—6]. Нестационарные колебания осциллятора, взаимодействующего с неоднородной жидкостью, до настоящего времени не были исследованы.

Итак, далее предполагается, что смещения $s(t)$ тела малы, а положение равновесия O' (и тело C) находятся достаточно далеко от границы раздела двух жидкостей. Поэтому возмущения жидкостей будут малы и можно использовать линеаризованные уравнения гидродинамики и приближенные условия обтекания цилиндра. Обозначим $\Phi_{1,2} = \Phi_{1,2}(x, y, t)$ потенциалы скоростей соответственно для верхней и нижней жидкостей в областях, не занимаемых телом. Вследствие несжимаемости жидкостей они удовлетворяют уравнению Лапласа в указанных областях $\forall t \in [0, T]$, $T < \infty$:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_1 &= 0, \quad |x| < \infty, \quad 0 < y < H \\ \Delta \Phi_2 &= 0, \quad |x| < \infty, \quad y < 0, \quad (x, y) \in C \end{aligned} \quad (1.1)$$

На твердых границах для жидкостей выполняются краевые условия непротекания $\forall t$:

$$\partial\Phi_1/\partial y|_{y=H} = 0, \quad \partial\Phi_2/\partial n|_{\Sigma} = -cn_y \quad (c = s') \quad (1.2)$$

Здесь Σ — окружность, $c = c(t)$ — вертикальная скорость центра инерции цилиндра, n_y — проекция на ось y вектора нормали n к поверхности цилиндра Σ . Поскольку за конечное время возмущения в жидкости и по поверхности раздела распространяются на конечное расстояние, должны выполняться условия на бесконечности $\forall t \in [0, T]$:

$$\Phi_2|_{y \rightarrow -\infty} \rightarrow 0, \quad \Phi_{1,2}|_{|x| \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \quad (1.3)$$

Кроме условий (1.2), (1.3) должны также выполняться граничные условия на поверхности раздела жидкостей $y = \eta(x, t)$, выражающие равенство давлений и нормальных скоростей. В линейном приближении эти условия имеют вид

$$\begin{aligned} \rho_1 (\partial\Phi_1/\partial t - g\eta)_{y=0} &= \rho_2 (\partial\Phi_2/\partial t - g\eta)_{y=0} \\ \partial\eta/\partial t &= -\partial\Phi_1/\partial y|_{y=0} = -\partial\Phi_2/\partial y|_{y=0} \\ & (= -1/2 \partial(\Phi_1 + \Phi_2)/\partial y|_{y=0}) \\ |x| &< \infty, \quad t \in [0, T], \quad t < \infty \end{aligned} \quad (1.4)$$

Чтобы исключить неизвестную функцию η , продифференцируем первое равенство (1.4) по t и исключим $\partial\eta/\partial t$ при помощи второго. Получим систему соотношений, содержащих только функции $\Phi_{1,2}$:

$$\begin{aligned} [\rho_2 \partial^2\Phi_2/\partial t^2 - \rho_1 \partial^2\Phi_1/\partial t^2 + g(\rho_2 - \rho_1) \partial\Phi_{1,2}/\partial y]_{y=0} &= 0 \\ \partial\Phi_1/\partial y|_{y=0} &= \partial\Phi_2/\partial y|_{y=0} \quad (= 1/2 \partial(\Phi_1 + \Phi_2)/\partial y|_{y=0}) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Наряду с перечисленными выше краевыми условиями (1.2) — (1.5), необходимо поставить начальные условия для неизвестных функций $\Phi_{1,2}, \eta$. В силу сделанных выше предположений они тривиальны:

$$\Phi_{1,2}(x, y, 0) = 0, \quad \eta(x, 0) = 0 \quad (1.6)$$

Излагаемый ниже подход к решению задачи содержит следующие этапы: а) решение поставленной в п. 1 внешней задачи гидродинамики при заданном движении тела (п. 2), б) вывод самосогласованного уравнения движения и постановка замкнутой задачи Коши для тела (п. 3), в) изучение частотных характеристик колебаний для определения глобальных свойств движения (п. 4), г) численно-аналитическое решение $s(t)$ интегродифференциальной задачи Коши (ИДЗК) для тела и построение границы раздела.

2. Решение задачи гидродинамики при заданном движении цилиндра. Наибольшая, главная трудность решения поставленной внешней задачи гидродинамики возникает вследствие необходимости одновременного удовлетворения краевым условиям на несвязной границе: на поверхности Σ цилиндра и верхней жесткой стенке при $y = H$ (1.2), а также на границе раздела жидкостей (1.4) или (1.5) (см. фиг. 1). Точно удовлетворить условиям на поверхности Σ цилиндра можно, используя модификацию метода Хэвелока [1].

Ограничимся дипольным приближением: движение жидкости вблизи цилиндра C опишем при помощи потенциала диполя, помещенного в точку с координатами $(0, -h)$. Искомые потенциалы скоростей $\Phi_{1,2}$ представимы в виде [1]

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \varphi_1(x, y, t), \quad |x| < \infty, \quad H \geq y > 0 \\ \Phi_2 &= a^2 c(t) z(x, y) + \varphi_2(x, y, t), \quad |x| < \infty, \quad y < 0, \quad (x, y) \in C \\ z(x, y) &\equiv (y+h)[x^2 + (y+h)^2]^{-1} - (y-h)[x^2 + (y-h)^2]^{-1} \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\varphi_{1,2}$ — потенциалы скоростей волнового движения. При помощи выражения Φ_2 (2.1) удастся удовлетворить условию обтекания на (1.2) с точностью до величин $(a/h)^2$ (погрешностью $(a/h)^4$), что согласно методу Хэвеллока [1] является первым приближением.

Подстановка выражений $\Phi_{1,2}$ (2.1) в уравнения (1.1) и граничные условия (1.2) — (1.5) приводит к краевой задаче для неизвестных $\varphi_{1,2}$:

$$\Delta\varphi_1 = 0, \quad |x| < \infty, \quad H \geq y > 0 \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_2 = 0, \quad |x| < \infty, \quad y < 0, \quad (x, y) \in C \\ [\rho_2\varphi_2'' - \rho_1\varphi_1'' + g(\rho_2 - \rho_1)\varphi_{1,2y}'|_{y=0} = 2\rho_2 a^2 h (x^2 + h^2)^{-1} c''(t) \\ \varphi_{1y}'(x, 0, t) = \varphi_{2y}'(x, 0, t), \quad \varphi_{1y}'(x, H, t) = 0 \end{aligned}$$

Здесь и далее точками обозначаются производные по времени, а штрихами с индексом внизу — соответственно производные по x, y . Начальные условия для потенциалов волновых движений $\varphi_{1,2}$ имеют вид

$$\varphi_{1,2}(x, y, 0) = 0, \quad [\rho_1\dot{\varphi}_1 - \rho_2\dot{\varphi}_2 - 2\rho_2 a^2 h (x^2 + h^2)^{-1} \dot{c}]_{y=0, t=0} = 0 \quad (2.3)$$

При помощи преобразования Фурье искомые потенциалы $\varphi_{1,2}$ можно представить в виде ($k \geq 0$ — волновое число)

$$\varphi_1(x, y, t) = \int_0^\infty A_1(k, t) \frac{\operatorname{ch} k(H-y)}{\operatorname{ch} kH} \cos kx dk \quad (2.4)$$

$$\varphi_2(x, y, t) = \int_0^\infty A_2(k, t) e^{ky} \cos kx dk; \quad A_1(k, t) = -A_2(k, t) \operatorname{cth} kH$$

Связь между неизвестными A_1 и A_2 следует из третьего краевого условия (2.2). Используя ее, первое условие (2.2) приведем к замкнутому дифференциальному по t уравнению для $A_2(k, t)$

$$A_2'' + \omega^2(k) A_2 = -2a^2 \kappa(k) e^{-kh} c''(t) \quad (2.5)$$

$$\kappa(k) \equiv \rho_2 \operatorname{th} kH (\rho_1 + \rho_2 \operatorname{th} kH)^{-1}, \quad k \geq 0$$

$$\left(\int_0^\infty e^{-kh} \cos kx dk = \frac{h}{h^2 + x^2}, \quad h > 0 \right)$$

В (2.5) введена важная характеристика колебательного процесса: $\omega = \omega(k)$ — частота внутренней волны с волновым числом k :

$$\begin{aligned} \omega^2 = \omega^2(k) &= (\rho_2 - \rho_1) gk \operatorname{th} kH (\rho_1 + \rho_2 \operatorname{th} kH)^{-1} \equiv \\ &\equiv (\rho_2 - \rho_1) \rho_2^{-1} gk \kappa(k), \quad k \geq 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Из выражения (2.6) следует, что фазовая скорость $\omega(k)/k$ не совпадает с групповой скоростью $d\omega(k)/dk$, $k > 0$. С физической точки зрения внутренние волны обладают дисперсией; только в пределе при $kH \rightarrow 0$ дисперсия отсутствует.

Решение уравнения (2.5) при учете начальных условий (2.3) путем двукратного интегрирования по частям записывается в виде

$$\begin{aligned} A_2(k, t) &= -2a^2 \kappa(k) e^{-kh} \left[c(t) - \omega(k) \int_0^t c(\tau) \sin \omega(k)(t - \tau) d\tau \right], \\ A_1 &= -A_2 \operatorname{cth} kH \end{aligned} \quad (2.7)$$

Для дальнейших построений потребуется в основном потенциал Φ_2 ; функция Φ_1 определяется согласно (2.4), (2.7). На основе (2.1), (2.4), (2.7)

дадим явное выражение для Φ_2 , которое имеет вид сложных квадратур

$$\Phi_2(x, y, t) = a^2 c(t) z(x, y) - 2a^2 \left[c(t) \int_0^\infty \kappa(k) e^{k(y-h)} \cos kx dk - \int_0^t c(\tau) \int_0^\infty \kappa(k) \omega(k) e^{k(y-h)} \sin \omega(k)(t-\tau) \cos kx dk d\tau \right] \quad (2.8)$$

$$\Phi_2|_{y \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \Phi_2|_{|x| \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \\ |x| < \infty, \quad y < 0, \quad (x, y) \in C, \quad 0 \leq t \leq T < \infty$$

Условия на бесконечности (1.3), как следует из (2.8), выполняются. Если движение цилиндра $s'(t) = c(t)$ ($c(0) = 0$) задано, то на основании (1.4) и полученных выражений для потенциалов можно получить форму границы раздела жидкостей $y = \eta(x, t)$ в виде (здесь требуется также функция Φ_1).

$$\eta(x, t) = (\rho_2 - \rho_1)^{-1} g^{-1} [\rho_2 \Phi_2^*(x, 0, t) - \rho_1 \Phi_1^*(x, 0, t)], \quad |x| < \infty, \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.9)$$

Явное выражение (2.9) после подстановки найденных функций $\Phi_{1,2}(x, y, t)$ оказывается чрезвычайно громоздким. Однако в предельном случае при $H \rightarrow \infty$ ($H \gg h$), часто допустимом на практике, возвышение границы раздела в безразмерных переменных приводится к доступному для анализа виду (см. п. 3).

3. Вывод уравнений колебаний цилиндра с учетом реакции излучаемых волн. Чтобы определить смещение $s(t)$ центра масс C цилиндра (или точки Q), нужно построить замкнутое уравнение движения с учетом реакции жидкости. Вычислим внешние силы, действующие на тело. Сила реакций F , действующая на цилиндр, определяется интегрированием проекций сил давления по контуру Σ

$$F = -b \oint_{\Sigma} p n dl, \quad n = (n_x, n_y)^T \quad (3.1)$$

где $p = p(x, y, t)$ — давление в жидкости, n — внешняя нормаль. Используя интеграл Бернулли, находим

$$p = p(x, y, t) = \rho_2 [\Phi_2^*(x, y, t) - gy] \quad (3.2)$$

Вычисляя правую часть равенства (3.2) при помощи формулы (2.8), подставляя результат в (3.1) и интегрируя, получим $F = (F_x, F_y)^T$:

$$F_x \equiv 0, \quad F_y = \pi a^2 b \rho_2 \left[g - c(t) \left(1 + \frac{a^2}{4h^2} - 2a^2 \int_0^\infty k \kappa(k) e^{-kh} dk \right) \right] - \\ - 2\pi a^2 b \rho_2 \int_0^t c(\tau) \int_0^\infty \kappa(k) \omega^2(k) e^{-2kh} \cos \omega(k)(t-\tau) dk d\tau \quad (3.3)$$

Смещение $s(t)$ центра инерции C цилиндра удобно отсчитывать от положения равновесия. Учитывая выражение (3.3) для вертикальной составляющей силы давления, получим замкнутое интегродифференциальное уравнение (ИДУ), описывающее вертикальные колебания тела на упругой связи вблизи границы раздела двух жидкостей

$$s'' + \Omega^2 s = -2a^2 \frac{M_2}{M} \int_0^t s'(\tau) \int_0^\infty k \kappa(k) \omega^2(k) e^{-2kh} \cos \omega(k)(t-\tau) dk d\tau \quad (3.4)$$

$$\Omega^2 = \frac{\lambda}{M}, \quad M_2 = \pi a^2 b \rho_2,$$

$$M = M_C + M_2 \left[1 + \frac{a^2}{4h^2} - 2a^2 \int_0^\infty k \kappa(k) e^{-2kh} dk \right]$$

Здесь M — эффективная масса цилиндра (с учетом присоединенной массы жидкости), M_C — его истинная масса, Ω — частота колебаний цилиндра при отсутствии излучения волн (при $\rho_1 = \rho_2$ или $\omega(k) \equiv 0$). ИДУ (3.4) должно быть решено при начальных условиях

$$s(0) = s^0, \quad s'(0) = c(0) = 0 \quad (3.5)$$

Итак, получена ИДЗК (3.4), (3.5), решение которой $s(t)$ на рассматриваемом интервале времени $0 \leq t \leq T < \infty$ позволит найти все искомые характеристики движения системы в виде квадратур (см. пп. 2, 3). Введем безразмерные параметры и аргументы

$$H_* = H/h, \quad \delta = \rho_1/\rho_2, \quad \xi = kh, \quad t_* = \Omega t$$

$$\gamma^2 = \frac{g}{\Omega^2 h} (1 - \delta) > 0, \quad \varepsilon = 2 \left(\frac{a}{h} \right)^2 \frac{M_2}{M} \gamma^2 \quad (\varepsilon \ll \gamma^2 \sim 1) \quad (3.6)$$

Неизвестная s в силу линейности и однородности уравнения может быть обезразмерена на любую удобную величину, например h (или s^0 , тогда $s(0) = 1$). В результате получим ИДЗК

$$s'' + s = -\varepsilon \int_0^{t_*} K(\delta, H_*, \gamma(t_* - \tau)) s'(\tau) d\tau$$

$$s(0) = s^0 (= 1), \quad s'(0) = 0 \quad (3.7)$$

$$K(\delta, H_*, \gamma t_*) = \int_0^\infty \frac{\xi^2 \zeta}{(\delta + \zeta)^2} \cos\left(\frac{\xi \zeta}{\delta + \zeta}\right)^{1/2} \gamma t_* d\xi$$

$$\zeta = \text{th } \xi H_*, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad \delta \geq 0, \quad H_* > 0, \quad \gamma > 0, \quad 0 \leq t_* \leq T_*(\varepsilon)$$

Для приложений представляет интерес исследование решения ИДЗК (3.7) на асимптотически большом интервале аргумента $t_* \in [0, T_*(\varepsilon)]$, где $T_*(\varepsilon) \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, на котором происходит существенное, качественное изменение поведения системы. Полное изучение движения системы, описываемой ИДЗК (3.7), затруднено, так как она содержит большое число параметров: ε , γ , δ , H_* . Поэтому рассмотрим предельный случай $H_* \rightarrow \infty$ (бесконечно глубокий верхний слой); расчеты показывают, что решения практически совпадают при $H_* = \infty$ и $H_* \simeq 1$ (т. е. $H \simeq h$). ИДЗК (3.7) содержит параметры ε , γ и приводится к виду (для удобства сделано переобозначение $t_* = t$)

$$s'' + s = -\varepsilon \int_0^t K(\gamma(t - \tau)) s'(\tau) d\tau, \quad s(0) = s^0 (= 1), \quad s'(0) = 0 \quad (3.8)$$

$$K(\gamma t) = \int_0^\infty \xi^2 e^{-2\xi} \cos \sqrt{\xi} \gamma t d\xi, \quad \gamma^2 = \frac{g^*}{\Omega^2 h}, \quad g^* = g \frac{1 - \delta}{1 + \delta}$$

$$\varepsilon = \left(\frac{a}{h} \right)^2 \frac{M_2}{M} \gamma^2 \ll 1, \quad \gamma \sim 1; \quad 0 \leq t \leq T(\varepsilon), \quad T(\varepsilon)|_{\varepsilon \rightarrow 0} \rightarrow \infty$$

Далее уделяется внимание построению решения $s = s(t, \gamma, \varepsilon)$ ИДЗК (3.8). На основании этого решения, согласно п. 2, определяются потенциалы скоростей $\Phi_{1,2}(x, y, t)$ в обеих жидкостях, поля скоростей $v_{1,2} = -\nabla \Phi_{1,2}$ и давлений $p_{1,2}$ (пп. 2, 3), а также граница раздела $y = \eta(x, t)$

(п. 2). В частности,

$$\eta_*(x_*, t) = \int_0^t s^*(\tau) \int_0^\infty \xi e^{-\xi} \cos \xi x_* \cos \sqrt{\xi} \gamma (t - \tau) d\xi d\tau$$

$$x_* = \frac{x}{h}, \quad \eta_*(x_*, t) = \frac{\eta(x_*/h, t)}{\mu h}, \quad \mu = 2 \left(\frac{a}{h} \right)^2 \frac{1}{1 + \delta} \ll 1 \quad (3.9)$$

Можно найти формальное решение ИДУ (3.8) с ядром типа свертки операционными методами [7], как, например, в [1, 2]. Однако такое решение практически не удастся проанализировать из-за сложной аналитической структуры ядра $K(\gamma t)$ и его трансформанты. Для построения искомого решения и границы раздела жидкостей на асимптотически большом интервале времени разработаны численные методы. Ниже в п. 5 приводятся результаты расчетов и анализ движения системы для различных значений параметров ε, γ . Для определения глобальных характеристик линейной колебательной системы (3.8) интерес в теоретическом и прикладном аспектах представляет также исследование установившихся вынужденных колебаний при действии гармонической внешней силы на тело.

4. Вынужденные колебания осциллятора вблизи границы раздела жидкостей. Движение тела под действием гармонической силы в безразмерных переменных описываются ИДЗК вида

$$S'' + S = -\varepsilon \int_0^t K(\gamma(t - \tau)) S^*(\tau) d\tau + f_0 \cos \alpha t \quad (4.1)$$

$$S(0) = S'(0) = 0, \quad \alpha \in [0, \infty) \quad (f_0 = 1)$$

Применяя преобразование Лапласа [7], получим выражения для трансформант решения и ядра

$$S^*(p, \alpha, \gamma, \varepsilon) = p/R^*, \quad R^* = (p^2 + \alpha^2)[1 + p^2 + \varepsilon p K^*(p, \gamma)]$$

$$K^*(p, \gamma) = \int_0^\infty \frac{p \xi^2 e^{-2\xi} d\xi}{p^2 + \xi \gamma^2} = \frac{p}{4\gamma^2} - \frac{p^3}{2\gamma^4} + \frac{p^5}{\gamma^4} \int_0^\infty \frac{e^{-2\xi} d\xi}{p^2 + \xi \gamma^2} \quad (4.2)$$

$$p = \sigma + iv, \quad \sigma \geq \sigma_0 \geq 0, \quad |v| < \infty$$

Обращение трансформанты $S^*(p)$ (4.2) приводит к стандартному выражению для оригинала $S(t)$ — решения ИДЗК (4.1)

$$S = S(t, \alpha, \gamma, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{p e^{pt} dp}{R^*(p^2, \alpha, \gamma, \varepsilon)} \quad (4.3)$$

Периодическому установившемуся режиму соответствуют вклады в интеграле (4.3) от мнимых полюсов $p = \pm i\alpha$. Однако вычисление вычетов в этих полюсах приводит к расходящемуся интегралу в выражении для $K^*(\pm i\alpha, \gamma)$ (сходимость имеет место в смысле главного значения). Во избежание этого осложнения преобразуем выражение (4.3) посредством замены $p = \sigma + iv$, $-\infty < v < +\infty$ ($\sigma = \text{const}$) и вычислим вычеты в точках $p = \pm i\alpha$. Искомая амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) примет вид

$$A = A(\alpha, \gamma, \varepsilon) = 1/R(\alpha^2, \gamma^2, \varepsilon)$$

$$R(\alpha^2, \gamma^2, \varepsilon) = \left| 1 - \alpha^2 - \frac{\varepsilon}{4} \frac{\alpha^2}{\gamma^2} \left(1 + 2 \frac{\alpha^2}{\gamma^2} \right) - \varepsilon \frac{\alpha^6}{\gamma^4} Q(\alpha^2, \gamma^2) \right| =$$

$$= \{ [1 - \alpha^2 - \varepsilon f(\chi)]^2 + \varepsilon^2 g(\chi) \}^{1/2} \equiv X(\alpha^2, \chi, \varepsilon) \quad (4.4)$$

$$Q(\alpha^2, \gamma^2) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{e^{-2\xi} d\xi}{(\sigma + i\alpha)^2 + \xi \gamma^2} = \frac{1}{\gamma^2} I(\chi) - i \frac{2\pi}{\gamma^2} e^{-2\chi}$$

$$I(\chi) = \int_0^{\infty} \frac{\xi \cos 2\xi - \chi \sin 2\xi}{\xi^2 + \chi^2} d\xi, \quad \chi = \frac{\alpha^2}{\gamma^2}, \quad 0 \leq \chi < \infty$$

$$f(\chi) \equiv (\chi/4)(1 + 2\chi) + \chi^3 I(\chi), \quad g(\chi) \equiv (2\pi)^2 \chi^6 e^{-4\chi}$$

Из анализа функции $R(\alpha^2, \gamma^2, \varepsilon)$ следует вывод, что при фиксированном достаточно малом $\varepsilon > 0$ у нее имеется минимум по α^2 и максимум по γ^2 (седловая точка); соответственно у функции X по α^2 — минимум, по χ — максимум. Амплитуда в этой точке имеет максимум по α^2 , стремящийся к бесконечности как $1/\varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, и минимум по γ^2 (или χ). Приравнявая нулю производные функции X^2 по α^2 и χ , получим уравнения для определения точки минимакса (α_0, γ_0) :

$$\begin{aligned} \partial X^2 / \partial \alpha^2 &= -2[1 - \alpha^2 - \varepsilon f(\chi)] = 0, \quad \alpha^2 = 1 - \varepsilon f(\chi) \\ \partial X^2 / \partial \chi &= -2\varepsilon f'(\chi)[1 - \alpha^2 - \varepsilon f(\chi)] + \varepsilon^2 g'(\chi) = 0, \quad g'(\chi) = 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Дифференцирование $g(\chi)$ позволяет определить искомое значение $\chi_0 = 3/2$. Подстановка этого значения в выражение (4.5) для α^2 дает искомые значения обеих переменных $\alpha_0(\varepsilon)$, $\gamma_0(\varepsilon)$ и величину минимакса $A_0(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} \alpha_0^2 &= \alpha_0^2(\varepsilon) = 1 - \varepsilon f(3/2), \quad f(3/2) \simeq -0,186 \\ \gamma_0^2 &= \gamma_0^2(\varepsilon) = 2/3 [1 - \varepsilon f(3/2)] \\ A_0 &= A_0(\varepsilon) = A(\alpha_0(\varepsilon), \gamma_0(\varepsilon), \varepsilon) = \\ &= \varepsilon^{-1} g^{-1/2}(3/2) = \varepsilon^{-1} 4e^3 / (27\pi) \simeq 0,94\varepsilon^{-1} \end{aligned} \quad (4.6)$$

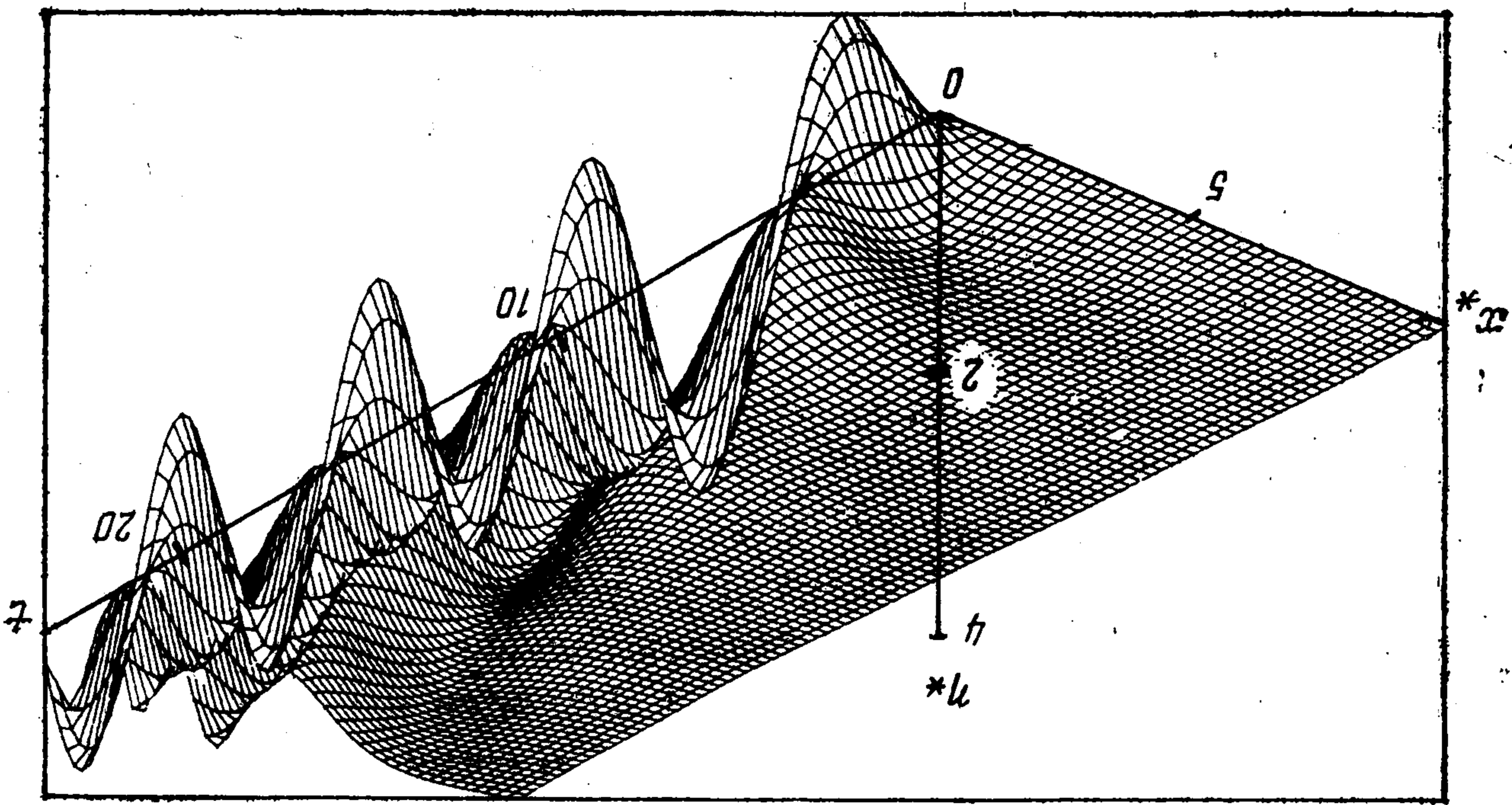
При фиксированных значениях параметров ε , γ значение α^* , отвечающее максимуму функции A , находится решением (например, методом Пикара) уравнения $dX^2/d\alpha^2 = 0$, т. е.

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= 1 - \varepsilon f(\chi) + \varepsilon \gamma^{-2} f'(\chi) [1 - \alpha^2 - \varepsilon f(\chi)] - \varepsilon^2 \gamma^{-2} g'(\chi) \\ \alpha^{*2} &= \alpha^{*2}(\gamma, \varepsilon) = 1 + O(\varepsilon) = 1 - \varepsilon f(\gamma^{-2}) + O(\varepsilon^2) = \\ &= 1 - \varepsilon f(\gamma^{-2}) + \varepsilon^2 \gamma^{-2} f'(\gamma^{-2}) f(\gamma^{-2}) - 1/2 \varepsilon^2 \gamma^{-2} g'(\gamma^{-2}) + O(\varepsilon^3) = \\ \max_{\alpha} A(\alpha, \gamma, \varepsilon) &= A(\alpha^*(\gamma, \varepsilon), \gamma, \varepsilon) = A_0(\varepsilon) + O(\varepsilon), \quad \gamma \sim 1 \end{aligned} \quad (4.7)$$

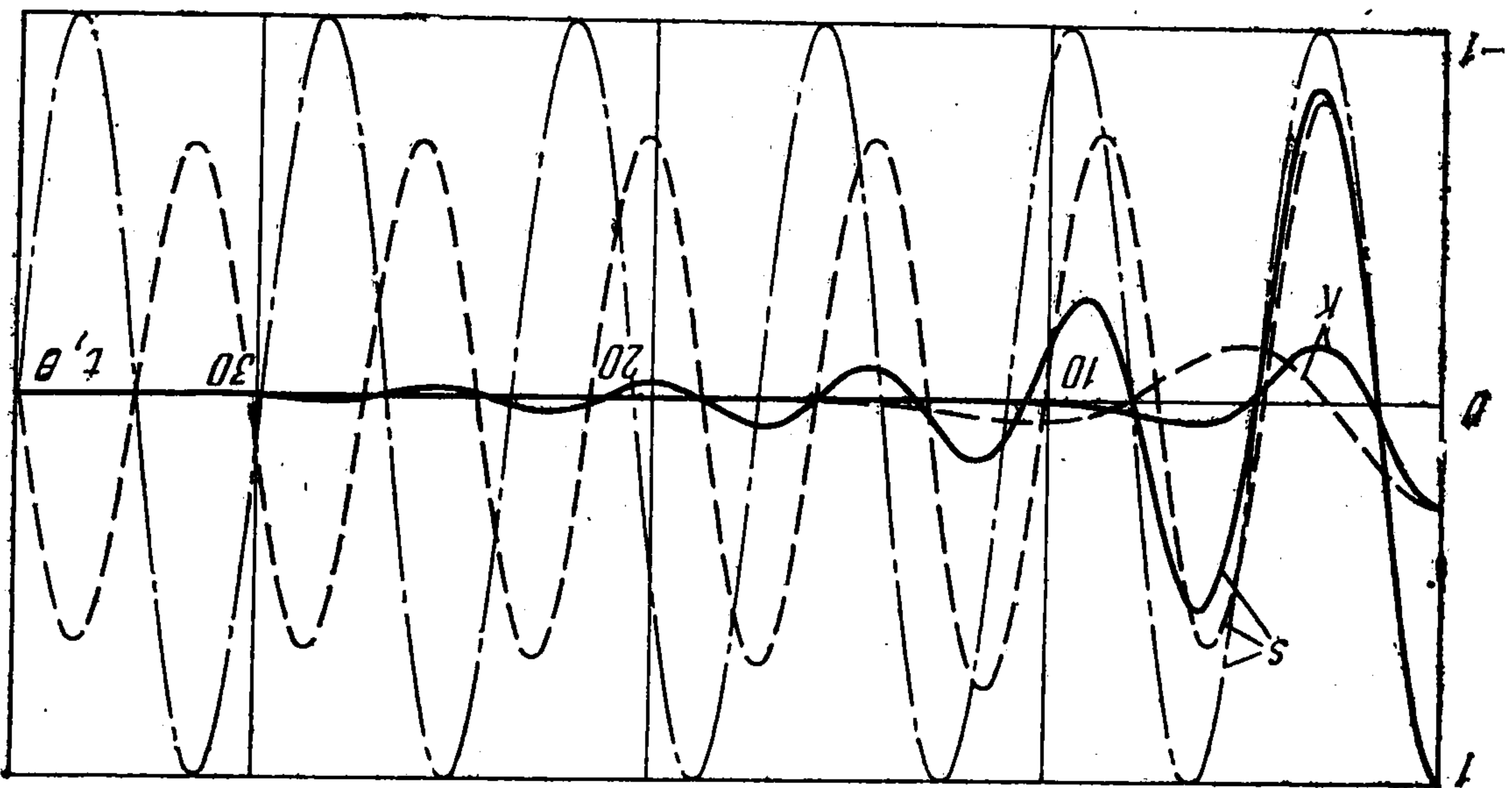
Из (4.6) следует, что резонансная частота $\alpha_0(\varepsilon)$ больше единицы, т. е. «собственной частоты» на величину $O(\varepsilon)$: $\alpha_0 \simeq 1 + 0,093\varepsilon$; это свойство сохраняется для значений $\gamma \sim 1$, мало отличающихся от $\gamma_0 = \gamma_0(\varepsilon)$. При фиксированном достаточно малом $\varepsilon > 0$, как следует из (4.6), АЧХ имеет стандартный вид унимодальной кривой (с единственным по α максимумом). Максимальное значение $A = A(\alpha, \gamma, \varepsilon)$ достигается при $\alpha^* \simeq 1 - 1/2 \varepsilon f(\gamma^{-2})$ и равно $A^* = A^*(\gamma, \varepsilon) = A_0(\varepsilon) + O(\varepsilon)$, см. (4.7), т. е. с относительной погрешностью $O(\varepsilon^2)$ не зависит от значения γ , $\gamma \sim 1$. Если существенно изменять параметр γ , то в предельных случаях $\varepsilon \gamma^{-6} \rightarrow 0$ и $\gamma \rightarrow \infty$ резонансные значения частоты $\alpha^*(\gamma, \varepsilon)$ равны соответственно: $\alpha^* \simeq 1 - \varepsilon^2 \gamma^{-2} g'(\gamma^{-2})$ и $\alpha^* \simeq 1 + \varepsilon / (8\gamma^2)$, а в пределе $\alpha^* = 1$ ($\gamma = 0$, $\varepsilon \gamma^{-6} = 0$; $\gamma = \infty$). Отметим, что в предельных случаях системе (4.1) отвечает дифференциальное уравнение без интегрального члена (т. е. без затухания) типа $S'' + S = \cos \alpha t$, для которой $A(\alpha, \gamma, \varepsilon) \rightarrow \infty$ при $\alpha \rightarrow 1$. Свободные колебания исходной консервативной системы (3.8) будут незатухающими и гармоническими: $s(t) = \text{const}$, $t \geq 0$. Расчет колебаний цилиндра, согласно ИДЗК (3.8), волновых движений жидкости на границе раздела по формуле (3.9) и АЧХ (4.4) для произвольных значений ε ($0 < \varepsilon \lesssim 1$), γ ($0 < \gamma < \infty$) предполагает разработку численных алгоритмов.

5. Результаты расчетов и качественные выводы. Вычислениями по формуле (4.4) (фиг. 2) установлено, что при фиксированном достаточно малом $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon = 0, 1$)

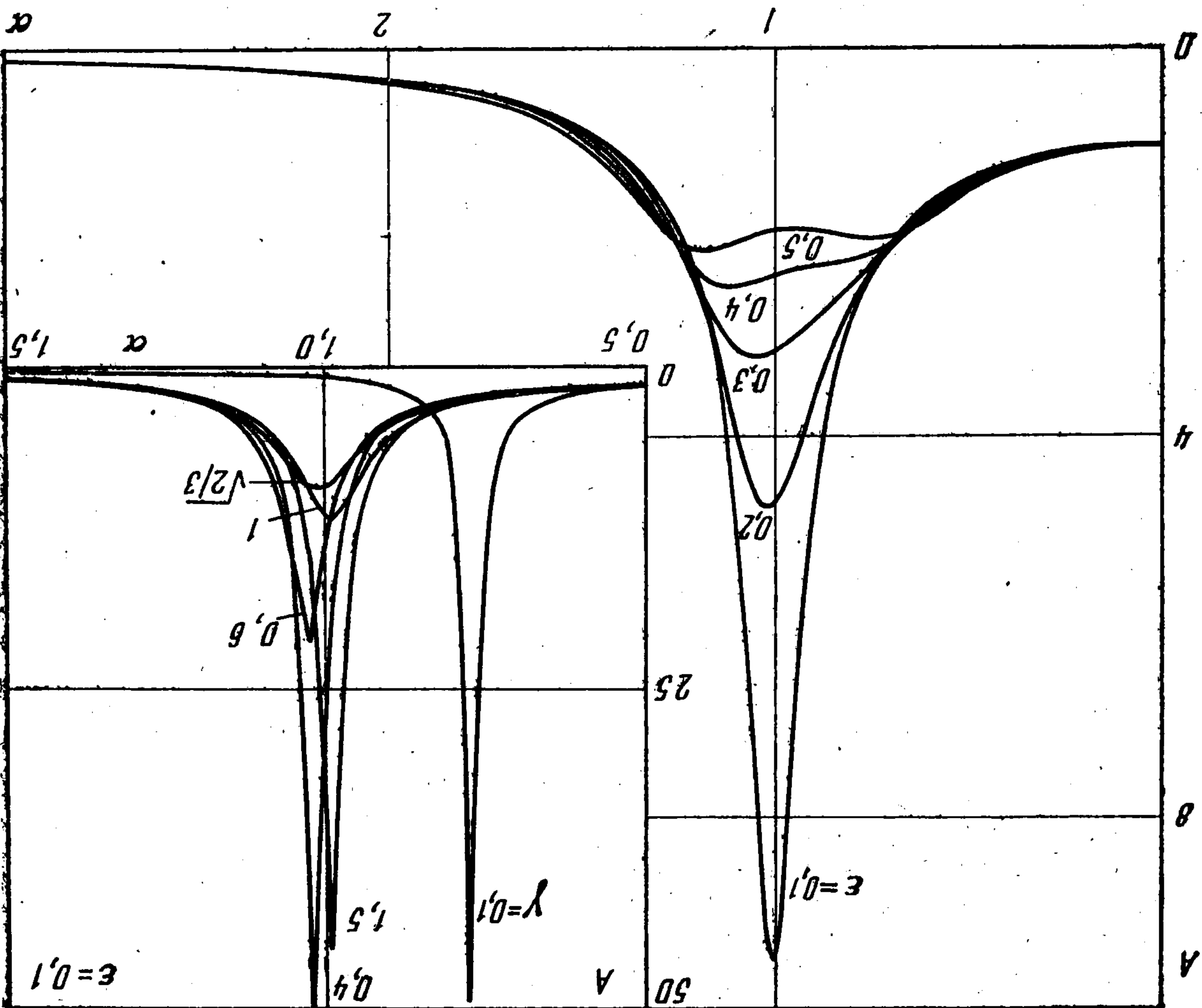
Фиг. 4

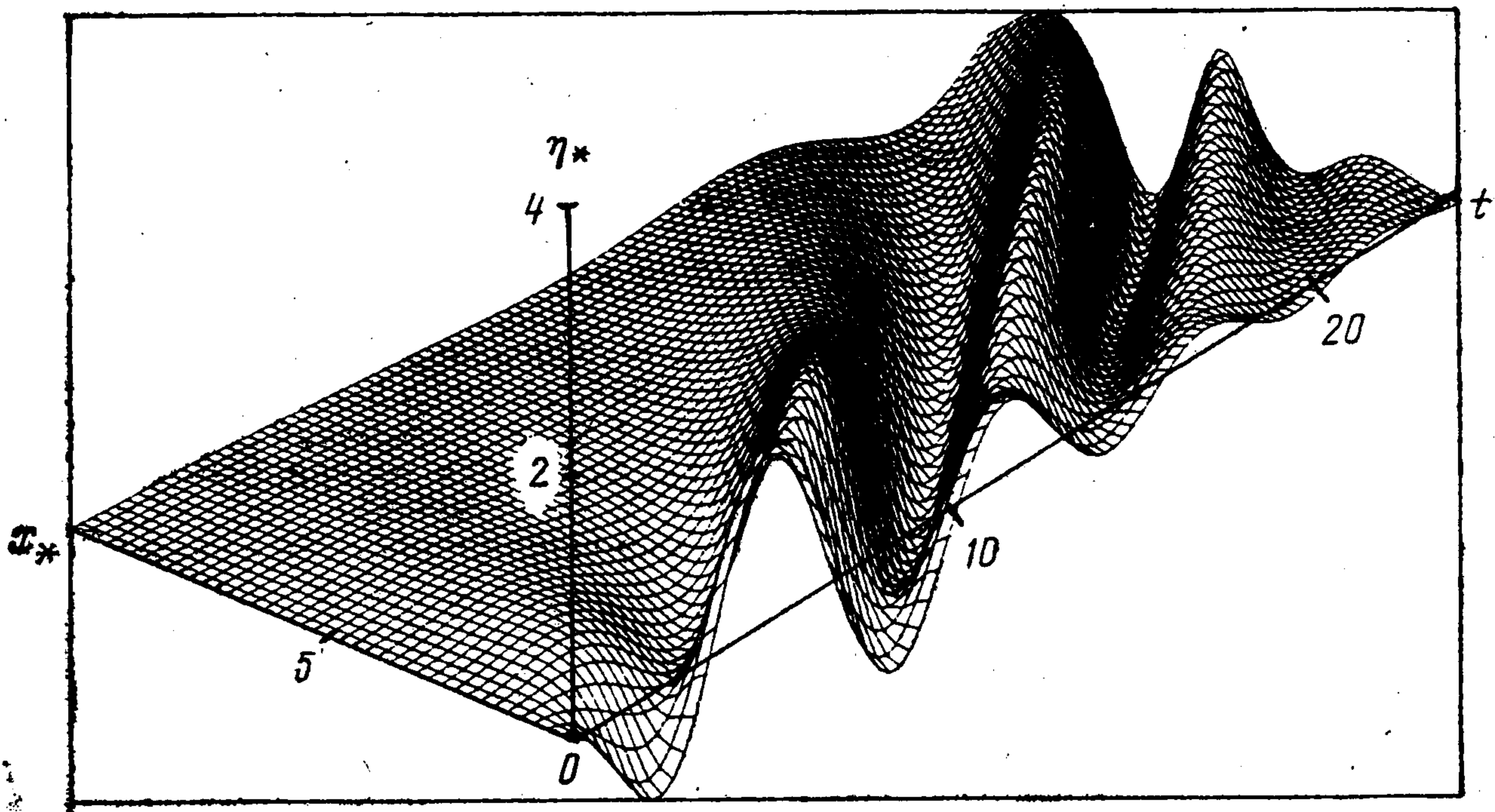


Фиг. 3



Фиг. 2





Фиг. 5

резонансная частота α^* (γ, ϵ) при возрастании γ ($\gamma \geq 0, 1$) увеличивается, переходит значение $\alpha^* (\gamma, \epsilon) = 1$, достигает максимума и затем уменьшается, стремясь к единице — собственной частоте. Таким образом, для всех $\gamma \sim 1$ вариации резонансной частоты порядка ϵ , $\epsilon \ll 1$. Максимальные значения амплитуд $A^* = A(\alpha^* (\gamma, \epsilon), \gamma, \epsilon)$ соответствуют формулам (4.6), (4.7) и анализу п. 4. Наблюдается очень высокая избирательная способность колебательной системы по отношению к частоте α при достаточно малом $\epsilon > 0$ и резкая зависимость от параметра γ вблизи значений $\gamma \simeq \gamma_0(\epsilon)$. Значению $\gamma = \gamma_0(\epsilon)$ отвечает минимум по γ максимальной по α амплитуды колебаний, что свидетельствует о максимальном затухании колебаний, т. е. максимальном взаимодействии осциллятора и жидкости.

Увеличение параметра ϵ приводит к уменьшению максимальной амплитуды согласно (4.6), (4.7), т. е. к росту возбуждения внутренних волн и затуханию колебаний осциллятора (фиг. 2). Для значений $\epsilon \geq 0,35$ наблюдается слева от точки максимума перегиб, который деформируется при увеличении ϵ так, что АЧХ имеет два локальных максимума и минимум в окрестности $\alpha = 1$. Такое поведение АЧХ соответствует двухчастотным линейным колебательным системам со значительным демпфированием.

Анализ АЧХ позволяет выявить глобальные свойства колебательной системы, описываемой ИДЗК (3.8). Для численного решения этой задачи была разработана программа, включавшая трудоемкую процедуру построения ядра $K(\theta)$ интегрального оператора с высокой точностью на большом интервале времени t ($\theta = \gamma t$). Смещения $s(t, \gamma, \epsilon)$ рассчитывались на интервале времени, на котором происходило существенное уменьшение амплитуды колебаний и возбуждение внутренних волн. После построения решения ИДЗК (3.8) по формуле (3.9) проводился расчет пространственно-временной картины изменения границы раздела жидкостей $\eta_*(x_*, t, \gamma)$. Для большей наглядности значение ϵ бралось достаточно большим ($\epsilon = 0,5$), а значения параметра γ брались вблизи точки максимума $\gamma_0(\epsilon)$ ($\gamma \simeq \gamma^0 = \sqrt{2/3}$) и вдали ($\gamma = 0,5$).

На фиг. 3 приведены результаты расчетов $K(\theta)$ и $s(t, \gamma, \epsilon)$ для $\gamma = \gamma^0$ (сплошные кривые) и $\gamma = 0,5$ (пунктирные кривые); косинусоида $s_0 = s(t, \gamma, 0) = \cos t$ (штрихпунктирная линия) описывает колебания осциллятора при $\epsilon = 0$. Из вида графиков для разных γ следует вывод о существенном различии характера колебаний. При $\gamma \simeq \gamma^0$ колебания цилиндра затухают гораздо быстрее, чем для $\gamma = 0,5$, что согласуется с исследованиями АЧХ.

Далее, сравнение пространственно-временных картин границ раздела для $\epsilon = 0,5$ и $\gamma = 0,5$ (фиг. 4), $\gamma = \gamma^0$ (фиг. 5) показывает, что случай $\gamma = 0,5$ отвечает относительно слабому взаимодействию осциллятора и жидкости. Внутренние волны в отдаленных по x_* точках поверхности возбуждаются незначительно, а затухание колебаний медленное. Для значений $\gamma = \gamma^0$ ($\gamma \simeq \gamma_0$) взаимодействие осциллятора и среды существенно более сильное: колебания быстро затухают. Внутренние волны возбуждаются и распространяются вдоль границы раздела жидкостей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука. 1977. 816 с.
2. Хаскинд М. Д. Гидродинамическая теория качки корабля. М.: Наука. 1973. 328 с.
3. Newman J. N. Transient axisymmetric motion of a floating cylinder // J. Fluid Mech. 1985. V. 157. P. 17—33.
4. Maskell S. J., Ursell F. The transient motion of a floating body // J. Fluid Mech. 1970. V. 44. Pt. 2. P. 303—313.
5. Акуленко Л. Д., Нестеров С. В. Колебания твердого тела на поверхности раздела двух жидкостей // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 34—40.
6. Акуленко Л. Д., Михайлов С. А., Нестеров С. В., Чайковский А. А. Численно-аналитическое исследование колебаний твердого тела на границе раздела двух жидкостей // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 4. С. 59—66.
7. Лаурентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.

Москва

Поступила в редакцию
31.X.1988