

УДК 532.528

© 1990 г.

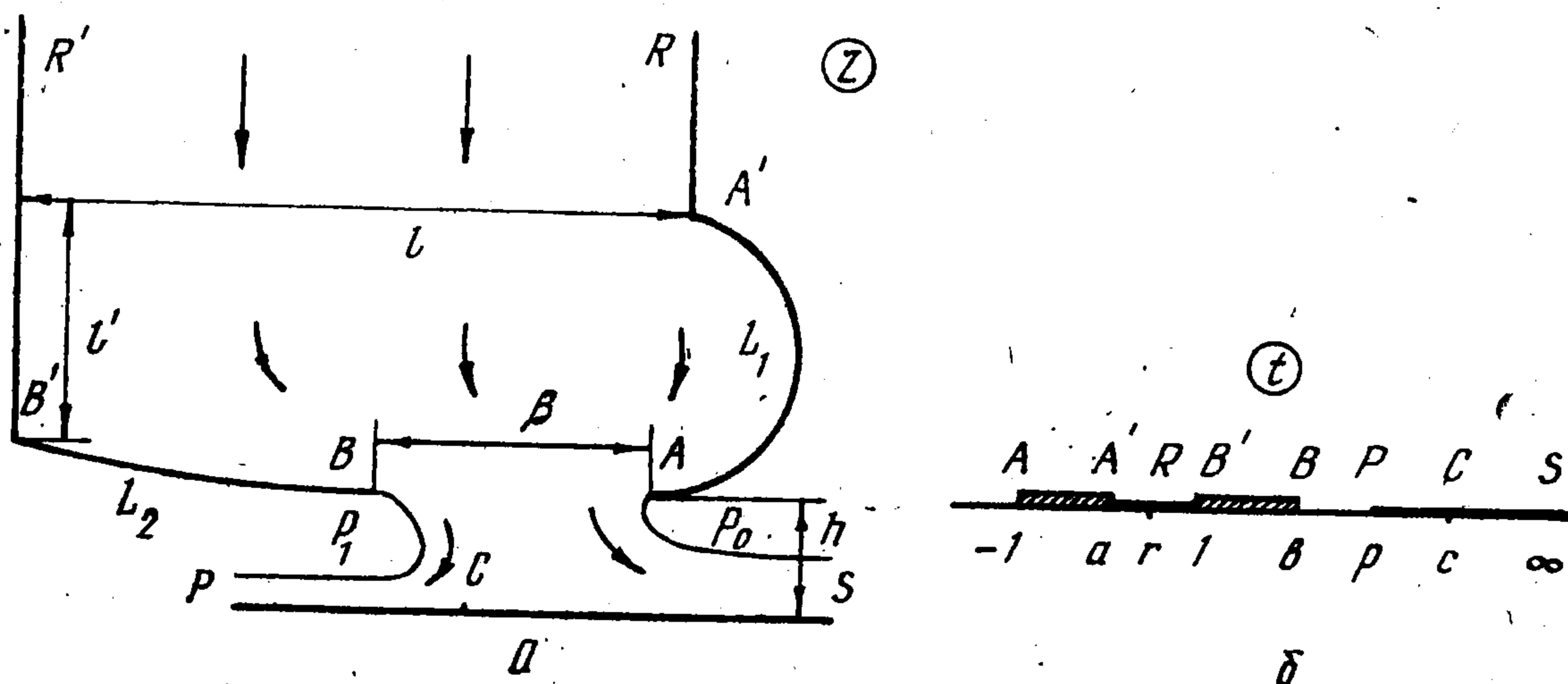
В. П. Житников

ИСТЕЧЕНИЕ ПЛОСКОЙ СТРУИ ЖИДКОСТИ ИЗ РЕЗЕРВУАРА С ГИБКИМИ СТЕНКАМИ ВБЛИЗИ ЭКРАНА

Рассматривается задача о струйной завесе, созданной струей, истекающей через отверстия в гибком ограждении. Численно исследуется взаимное влияние формы гибких стенок резервуара и параметров струи при различных соотношениях давлений и расстояниях до экрана.

Данная задача связана с расчетом течений в гибких ограждениях аппаратов на воздушной подушке. Ранее рассматривалось [1, 2] отрывное обтекание гибкой оболочки вблизи экрана, т. е. течение, характерное для камерной схемы образования воздушной подушки. Исследование течений в струйной схеме представляет значительную вычислительную сложность, и в связи с этим задача, как правило, упрощенно разделяется на две: расчет формы оболочки в предположении о ступенчатом распределении давления [3] и расчет истечения струи из соплового устройства заданной формы, при котором стенки соплового устройства обычно считаются прямолинейными [4, 5]. Остается неизвестным, насколько действительное распределение давлений влияет на форму оболочки, а форма — на параметры струи. Совместное рассмотрение этих двух задач, проведенное [6] для случая симметрии физической картины относительно вертикальной оси, показывает, что это влияние при реальных соотношениях ширины отверстия в оболочке и ее длины незначительно. Однако вопрос остается открытым при отсутствии симметрии, особенно при больших поперечных перепадах давления.

1. Работа посвящена численному решению задачи об истечении плоской струи, истекающей из отверстия в гибком ограждении, в точной нелинейной стационарной постановке при неравных давлениях p_1 и p_0 и разных длинах оболочки L_1 и L_2 от краев отверстия A и B до точек закрепления A' и B' (фиг. 1, а). Оболочка считается абсолютно гибкой (безмоментной), невесомой и нерастяжимой, а жидкость — невесомой,



Фиг. 1

невязкой и несжимаемой. Оболочка закреплена концами A' и B' к вертикальным стенкам канала, а концы A и B считаются связанными между собой тонкой нитью, не препятствующей движению потока. Тем самым нить удерживает концы оболочки на заданном расстоянии β и соответствует отрезку общей касательной к оболочке в точках A и B .

При указанных условиях задача сводится к определению аналитической функции, удовлетворяющей граничным условиям специального

вида. Область, соответствующая потоку на физической плоскости Z , конформно отображается на верхнюю полуплоскость комплексной переменной $t = x + iy$ (соответствие точек показано на фиг. 1, б). Комплексный потенциал равен

$$W(t) = \frac{Q}{\pi} \frac{r-p}{r-c} \int_{-1}^t \frac{t-c}{(t-r)(t-p)} dt \quad (1.1)$$

где Q — расход жидкости в струе. Граничные условия для функции Жуковского

$$\omega = i \ln \frac{1}{v_0} \frac{dW}{dZ} = \theta + i \ln \frac{v}{v_0}$$

(v , θ — модуль и угол наклона вектора скорости к горизонтальной оси, v_0 — скорость на свободной поверхности AS) запишутся в виде

$$\operatorname{Re} \omega(x) = \theta(x) = \begin{cases} -\pi/2, & a < x < 1 \\ -\pi, & p < x < c \\ 0, & c < x < \infty \end{cases}, \quad \operatorname{Im} \omega(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < -1 \\ \ln(v_1/v_0), & b < x < p \end{cases} \quad (1.2)$$

Здесь v_1 — скорость жидкости на свободной поверхности BP (согласно уравнению Бернулли $v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2(p_1 - p_0)/\rho}$).

На участках границы, соответствующих гибкой оболочке, мнимая и действительная части функции ω связаны условием Лапласа

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{ds} &= \frac{\rho v_0^2}{2T} \left(1 - \left(\frac{v}{v_0} \right)^2 \right), & x \in (-1, a) \\ \frac{d\theta}{ds} &= -\frac{\rho v_0^2}{2T} \left(\left(\frac{v_1}{v_0} \right)^2 - \left(\frac{v}{v_0} \right)^2 \right), & x \in (1, b) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь ρ — плотность жидкости, T — натяжение оболочки (одинаковое во всех точках), s — дуговая абсцисса, отсчитываемая, соответственно, от точек A и B .

2. Решение краевой задачи (1.2), (1.3) может быть получено различными численными или численно-аналитическими методами, например методом, изложенным в [7]. Здесь целесообразно воспользоваться обобщением метода Леви-Чивиты [2].

Функция $\omega(t)$ ищется в виде суммы

$$\omega(t) = \omega_0(t) + \omega_1(t) + \omega_2(t) \quad (2.1)$$

Функция $\omega_0(t)$ удовлетворяет условиям (1.2); на интервалах $[-1, a]$ и $[1, b]$ имеет постоянные значения действительной части, равные предельным значениям $\theta(x)$ при движении вдоль оболочки к точкам закрепления A' и B' ($\theta_1 = \operatorname{Re} \omega(1+0)$, $\theta_2 = \operatorname{Re} \omega(a-0)$) и представляется при помощи видоизмененной формулы Келдыша — Седова [8]

$$\begin{aligned} \omega_0(t) &= \theta_1 + \frac{1}{i\pi} \int_{-1}^t \left\{ \frac{B_a}{(t+1)(t-a)} + \frac{B_1}{(t+1)(t-1)} + \frac{B_c}{(t-p)(t-c)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1/2 F - B_a - B_1 - B_c - (b+1) \partial F / \partial b}{(t+1)(t-p)} g_2(t) dt + \frac{1}{i\pi} \frac{\partial F}{\partial b} \int_{-1}^t \frac{dt}{g_1(t)} \right\} \quad (2.2) \end{aligned}$$

$$B_a = \frac{a+1}{|g_2(a)|} \left(\frac{\pi}{2} + \theta_1 \right), \quad B_1 = -\frac{2}{|g_2(1)|} \left(\frac{\pi}{2} + \theta_2 \right), \quad B_c = -\frac{c-p}{|g_2(c)|} \pi$$

$$F = \theta_1 I(-1, a) - \frac{\pi}{2} I(a, 1) + \theta_2 I(1, b) + \ln \frac{v_1}{v_0} I(b, p) - \pi I(p, c)$$

$$g_1(t) = \sqrt{\frac{(t-b)(t-p)}{t+1}}, \quad g_2(t) = \sqrt{\frac{(t+1)(t-p)}{t-p}}, \quad I(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{|g_2(x)|}$$

Функции $\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$ должны иметь нулевые значения действительной части на интервалах $(a, 1)$, (p, c) , (c, ∞) , мнимой части — на интервалах $(-\infty, -1)$ и (b, p) . Кроме того, потребуем, чтобы действительная часть ω_1 равнялась нулю при $x \in (1, b)$, а ω_2 — при $x \in (-1, a)$. Тогда эти функции можно представить в виде

$$\omega_k(t) = ig_k(t)\varphi_k(t), \quad k = 1, 2 \quad (2.3)$$

где $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ — функции, имеющие действительные значения на всей действительной оси, за исключением соответственно интервалов $(-1, a)$ и $(1, b)$.

Для построения функции $\varphi_1(t)$ отображим конформно верхнюю полуплоскость t на верхний полукруг ζ_1 единичного радиуса так, чтобы отрезок $[-1, a]$ перешел в полуокружность. Это отображение осуществляется при помощи преобразований

$$t_1 = (2t - a + 1)/(a + 1), \quad \zeta_1 = -t_1 + \sqrt{t_1^2 - 1}$$

Тогда, согласно методу Леви-Чивиты, функцию $\varphi_1(t(\zeta_1))$ можно искать в виде степенного ряда с действительными коэффициентами. Подставив $t(\zeta_1)$ в (2.3) и преобразовав, получим

$$\begin{aligned} \omega_1(t(\zeta_1)) &= \\ &= \sqrt{\zeta_1 + \frac{\zeta_1^2 + 1}{2} \frac{a + 1}{2b - a + 1}} \sqrt{\zeta_1 + \frac{\zeta_1^2 + 1}{2} \frac{a + 1}{2p - a + 1}} \frac{1}{\sqrt{\zeta_1}} \sum_{m=0}^{\infty} c_m \zeta_1^m \end{aligned} \quad (2.4)$$

Аналогично для построения $\varphi_2(t)$ отображим t на полукруг ζ_2 так, чтобы отрезок $[1, b]$ перешел в полуокружность. Опять применяя метод Леви-Чивиты, запишем

$$\begin{aligned} \omega_2(t(\zeta_2)) &= \\ &= i \sqrt{\zeta_2 + \frac{\zeta_2^2 + 1}{b} \frac{b - 1}{-3 - b}} \sqrt{\zeta_2 + \frac{\zeta_2^2 + 1}{2} \frac{b - 1}{2p - b - 1}} \frac{1}{\sqrt{\zeta_2}} \sum_{m=0}^{\infty} d_m \zeta_2^m \end{aligned} \quad (2.5)$$

Действительные коэффициенты c_m и d_m выбираются из условий (1.3), которые при подстановке

$$ds = -\frac{Q}{\pi v} \frac{(r-p)(x-c)}{(r-c)(x-r)(x-p)} dx, \quad \lambda = \frac{\rho Q v_0}{\pi T} \frac{r-p}{r-c}$$

принимают вид

$$\frac{d}{dx} \operatorname{Re} \omega_k(x + i0) = \Lambda_k \frac{x-c}{(x-r)(x-p)}, \quad x \in (\alpha_k, \beta_k) \quad (2.6)$$

$$\Lambda_1 = -\frac{\lambda}{2} \left(\frac{v_0}{v} - \frac{v}{v_0} \right), \quad \Lambda_2 = \frac{\lambda}{2} \left(\frac{v_1^2}{vv_0} - \frac{v}{v_0} \right)$$

$$(\alpha_1 = -1, \beta_1 = a, \alpha_2 = 1, \beta_2 = b, v = v_0 \exp \{ \operatorname{Im} (\omega_0 + \omega_1 + \omega_2) \})$$

Функция $\omega(t)$ должна быть ограничена при $t \rightarrow \infty$; это условие приводит к равенству

$$\frac{2}{\pi} \frac{\partial F}{\partial b} + \frac{c_0 \sqrt{a+1}}{\sqrt{(2b-a+1)(2p-a+1)}} - \frac{d_0 \sqrt{b-1}}{\sqrt{(3+b)(2p-b-1)}} = 0 \quad (2.7)$$

При решении задачи задаются геометрические размеры $L_1, L_2, l, l', h, \beta$ (фиг. 1, а). Поэтому должны выполняться следующие уравнения:

$$\int_A^{A'} |dZ| = L_1, \quad \int_B^{B'} |dZ| = L_2, \quad \int_{A'}^{B'} dZ = -l - il'$$

$$\operatorname{Im} \int_A^c dZ = -h, \quad \exp(-i\theta_A) \int_A^B dZ = \beta + i0 \quad (2.8)$$

$$\left(\theta_A = \theta(-1), \quad dZ = \frac{Q}{\pi v_0} \frac{r-p}{r-c} \exp(i\omega) \frac{t-c}{(t-r)(t-p)} dt \right)$$

Условие связи точек A и B тонкой нитью, не препятствующей движению жидкости, запишется в виде

$$\theta(-1) = \theta(b) - \pi \quad (2.9)$$

Условия (2.6), заданные в конечном числе точек коллокаций x_m , совместно с уравнениями (2.7)–(2.9) при учете выражения (2.2) образуют замкнутую систему уравнений, которая решается модифицированным методом Ньютона относительно неизвестных постоянных c_m ($m = 0, \dots, N$), d_m ($m = 0, \dots, N$), $a, b, c, p, r, \lambda, \theta_1, \theta_2, Q$.

Тем самым решение задач по изложенному методу обеспечивает точное выполнение краевых условий (1.2) и приближенное — условий (1.3), причем степень приближения определяется числом N сохраняемых членов рядов. Для рассчитанных ниже вариантов при точности 0,1 ... 0,5% число N не превышало 7...12.

3. Форму оболочки, полученную в результате решения задачи в точной постановке, целесообразно сравнить с приближенной, которая получается при допущении, что скорость жидкости в потоке внутри оболочки равна нулю. Тогда AA' и BB' — дуги окружностей с радиусами R_1 и R_2 . В этом случае значения радиусов, углов $\theta_1, \theta_2, \theta_A, \theta_B$ и натяжения T можно получить из системы уравнений

$$\begin{aligned} R_1(\theta_1 - \theta_A) = L_1, \quad R_2(\theta_B - \theta_2) = L_2, \quad \theta_A = \theta_B - \pi \\ x_A - x_B = \beta \cos \theta_B, \quad y_A - y_B = \beta \sin \theta_B, \quad R_1 v_0^2 = R_2 v_1^2 = T/\rho \end{aligned} \quad (3.1)$$

где x_A, y_A, x_B, y_B — координаты точек A и B , которые определяются по формулам

$$\begin{aligned} x_A = l - R_1(\sin \theta_A - \sin \theta_1), \quad y_A = l' + R_1(\cos \theta_A - \cos \theta_1) \\ x_B = R_2(\sin \theta_B - \sin \theta_2), \quad y_B = -R_2(\cos \theta_B - \cos \theta_2) \end{aligned}$$

(здесь полагаем, что начало координат находится в точке B').

4. Результаты расчетов приведены на фиг. 2, где

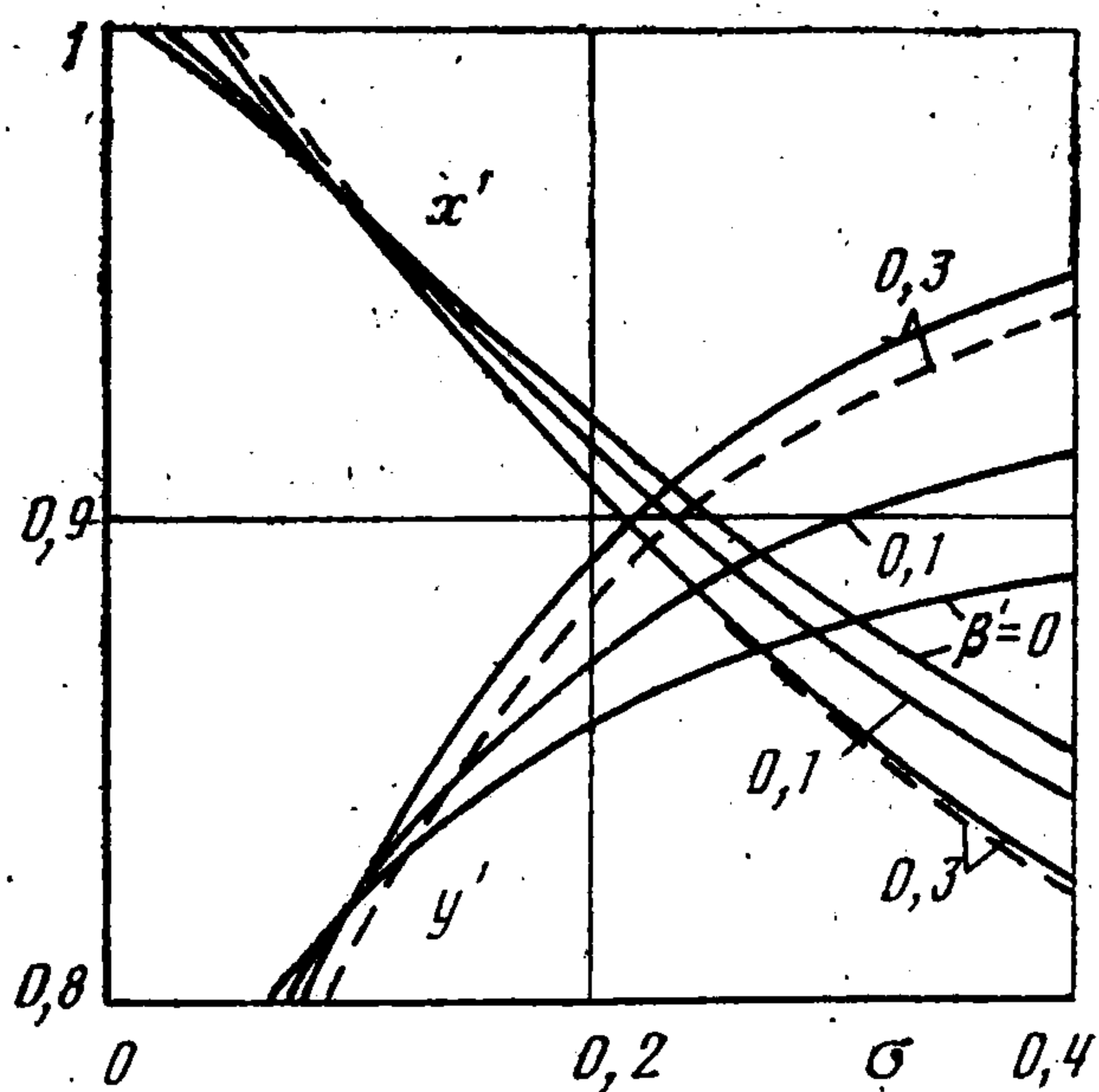
$$\begin{aligned} \sigma = (v_1/v_0)^2, \quad x' = x_B/(l - \beta), \quad y' = -y_B/(l - \beta) + 0,5, \\ \beta' = \beta/(l - \beta) \end{aligned}$$

при выполнении следующих соотношений между геометрическими параметрами:

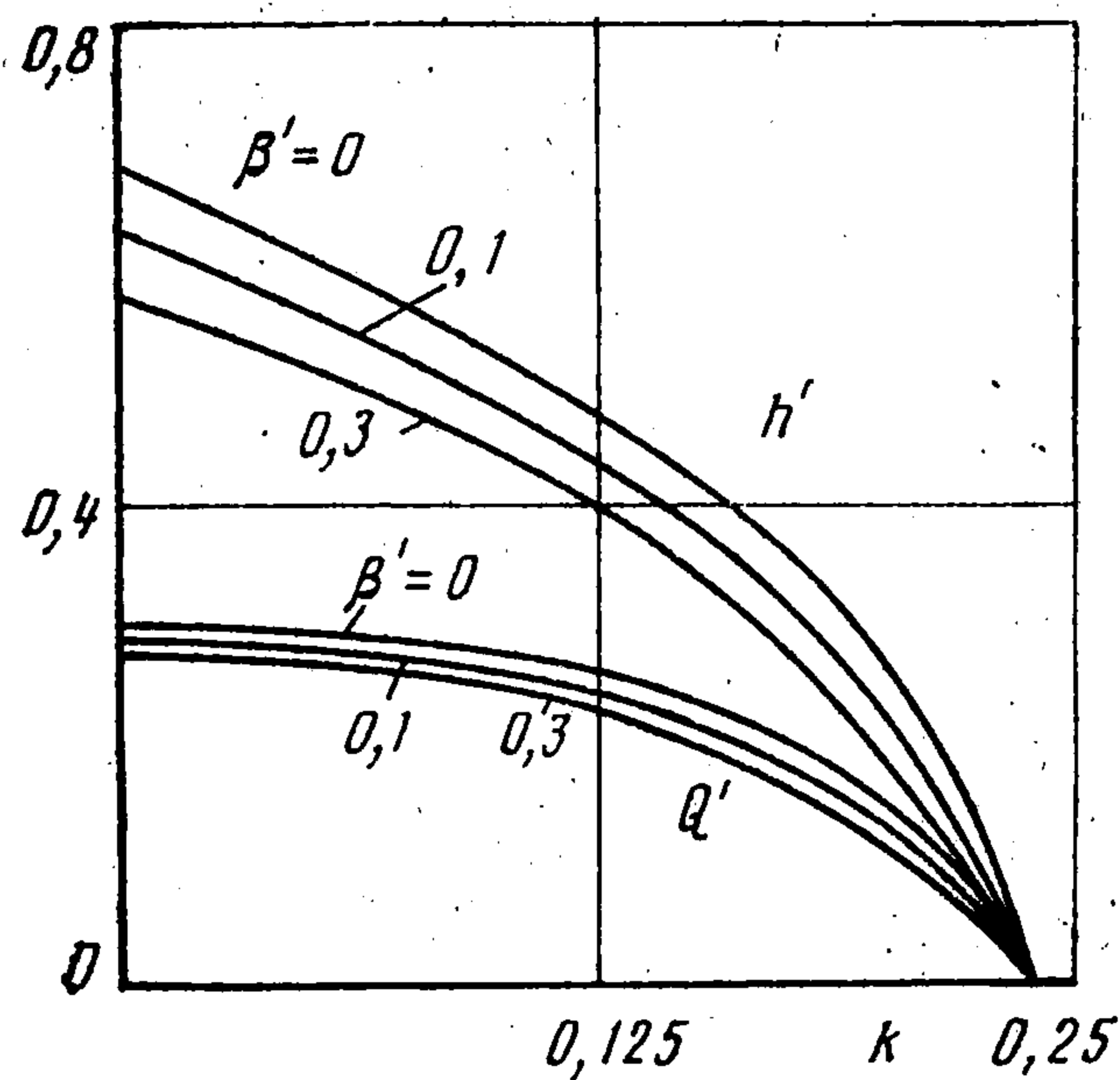
$$l' = 0, \quad (L_1 + L_2)/(l - \beta) = 1,5, \quad L_1/(l - \beta) = 0,473$$

Эти соотношения выбраны таким образом, чтобы угол наклона θ_B в приближенном решении (3.1) равнялся нулю при $\sigma = 0,1$, а конфигурация оболочки оставалась неизменной для всех β . Сплошные кривые соответствуют приближенному решению (3.1), штриховые — точному решению при $\beta' = 0,3$. Видно, что отличие формы частей оболочки от дуг окружностей незначительно (порядка 1...3%), даже для размеров щели β , сравнимых с длинами L_1 и L_2 . Это можно объяснить высокой степенью устойчивости и, следовательно, малой подвижностью оболочки, обтекаемой со стороны ее вогнутости (по схеме «парус» [9]).

Таким образом, и в случае несимметричной оболочки приближенный расчет ее формы вполне оправдан и может быть использован в практи-



Фиг. 2



Фиг. 3

ческих целях (в гибких ограждениях аппаратов на воздушной подушке величина β' обычно не превышает 0,1...0,2).

Величина зазора h в задачах натекания струи на экран является независимым (задаваемым) параметром и при прочих равных условиях определяет режим течения струи, который можно характеризовать коэффициентом расщепления струи $k = (c - p)/(c - r)$, равным отношению расхода потока, поступающего в область с повышенным давлением p_1 , к общему расходу Q . При $k = 0$ ($c = p$) вся струя течет вправо, соответствующая величина зазора $h = h_0$ при этом зависит от σ и геометрических размеров β , L_1 , L_2 , l , l' .

Приведенные на фиг. 2 результаты точного решения соответствуют $h = h_0(\sigma)$, т. е. $k = 0$. При $h < h_0$ струя, истекающая из сопла, не успевает под действием поперечной силы давления полностью развернуться направо до натекания на экран, поэтому при натекании она разделяется на две струи, текущие вдоль экрана в противоположных направлениях (фиг. 1, а).

При $h > h_0$ струйная завеса приподнимается, и под ней появляется струя, направленная слева направо (из области с повышенным давлением p_1), расход в этой струе увеличивается с возрастанием разности $h - h_0$. Параметры самой струйной завесы (например, расход Q , давления на стенках и срезе сопла) для сопла с прямолинейными стенками зависят достаточно слабо от h при $h \geq h_0$ [5].

Эти свойства струи, натекающей на экран, являются следствием законов сохранения и имеют место для струй, истекающих из различных сопловых устройств с прямолинейными и криволинейными стенками, в частности для рассматриваемого гибкого сопла.

Параметры струйной завесы для сопла с гибкими стенками при $h \leq h_0$ приведены на фиг. 3 в сравнении с результатами расчетов струи, истекающей из сопла с прямолинейными стенками, расположенными под теми же углами θ_A и θ_B , что и концевые участки оболочки A и B в приближенном решении. На фиг. 3 показаны зависимости относительных величин: зазора $h' = h/\beta$ и расхода $Q' = Q/(\beta v_0)$ от коэффициента расщепления струи k . Геометрические параметры выбраны такими же, как и выше, величина $\sigma = 0,1$. При $\beta' \rightarrow 0$ относительные параметры Q' и h' для гибкой оболочки соответствуют соплу с прямолинейными стенками. При $\beta' = 0,3$ величина расхода уменьшается на 10...20%, зазора — на

20...30%. Причиной этого является поворот вектора средней скорости жидкости, истекающей из сопла на его срезе, обусловленный несимметричным искривлением стенок сопла.

Таким образом, при $\beta' > 0,1$ в практических расчетах струйных завес необходимо учитывать реальную конфигурацию оболочки. Как было показано выше, форма оболочки при этом может быть рассчитана приближенно. Однако замена уравнений Лапласа (1.3) условиями $d\theta/ds = R_k$ не приводит к упрощению алгоритма решения задачи, поэтому для расчета параметров струи следует пользоваться точными формулами (2.2) — (2.5).

Автор благодарит А. Г. Терентьева за внимание к работе и обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галина И. Л. Истечение струи из канала с гибким ограждением // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 1. С. 91—98.
2. Житников В. П. Численные методы решения задач обтекания гибких оболочек // Динамика сплошной среды с границами раздела. Чебоксары: Изд-е Чуваш. ун-та, 1982. С. 76—87.
3. Магула В. Э. Чудовые эластичные конструкции. Л.: Судостроение, 1978. 263 с.
4. Кличко В. В. Расчет параметров истечения воздуха из элементов гибких ограждений воздушной подушки // Гидроаэромеханика судов с динамическими принципами поддержания: Тр. НТО судостроительной промышленности. Л.: Судостроение, 1972. Вып. 186. С. 221—232.
5. Житников В. П., Комаров С. С., Куреленкова Т. В. Истечение из сопла с произвольным расположением стенок вблизи экрана // Динамика сплошной среды со свободными поверхностями. Чебоксары: Изд-е Чуваш. ун-та, 1980. С. 70—83.
6. Житников В. П., Комаров С. С., Цвилленева Н. Ю. Истечение идеальной жидкости из сопловых устройств с гибкими стенками вблизи экрана // Седьмая Дальневост. конф. по мягким оболочкам. Владивосток: Изд-е ДВМУ, 1983. С. 91—94.
7. Вишневский В. А., Котляр Л. М., Терентьев А. Г. Влияние сил тяжести в задачах кавитационного обтекания препятствий // Вопросы прикладной математики и механики: Чебоксары: Изд-е Чуваш. ун-та, 1974. Вып. 3. С. 9—24.
8. Житников В. П. К численному методу решения смешанных краевых задач для ограниченных функций // Динамика сплошной среды со свободными поверхностями. Чебоксары: Изд-е Чуваш. ун-та, 1980. С. 61—69.
9. Киселев О. М., Федяев В. Л. О струйном течении жидкости при наличии гибкого ограждения // Тр. семинара по краевым задачам. Вып. 11. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1974. С. 73—82.

Уфа

Поступила в редакцию
12.VII.1988