

УДК 531.38:534

© 1990 г.

А. С. Кельзон, А. А. Коваль

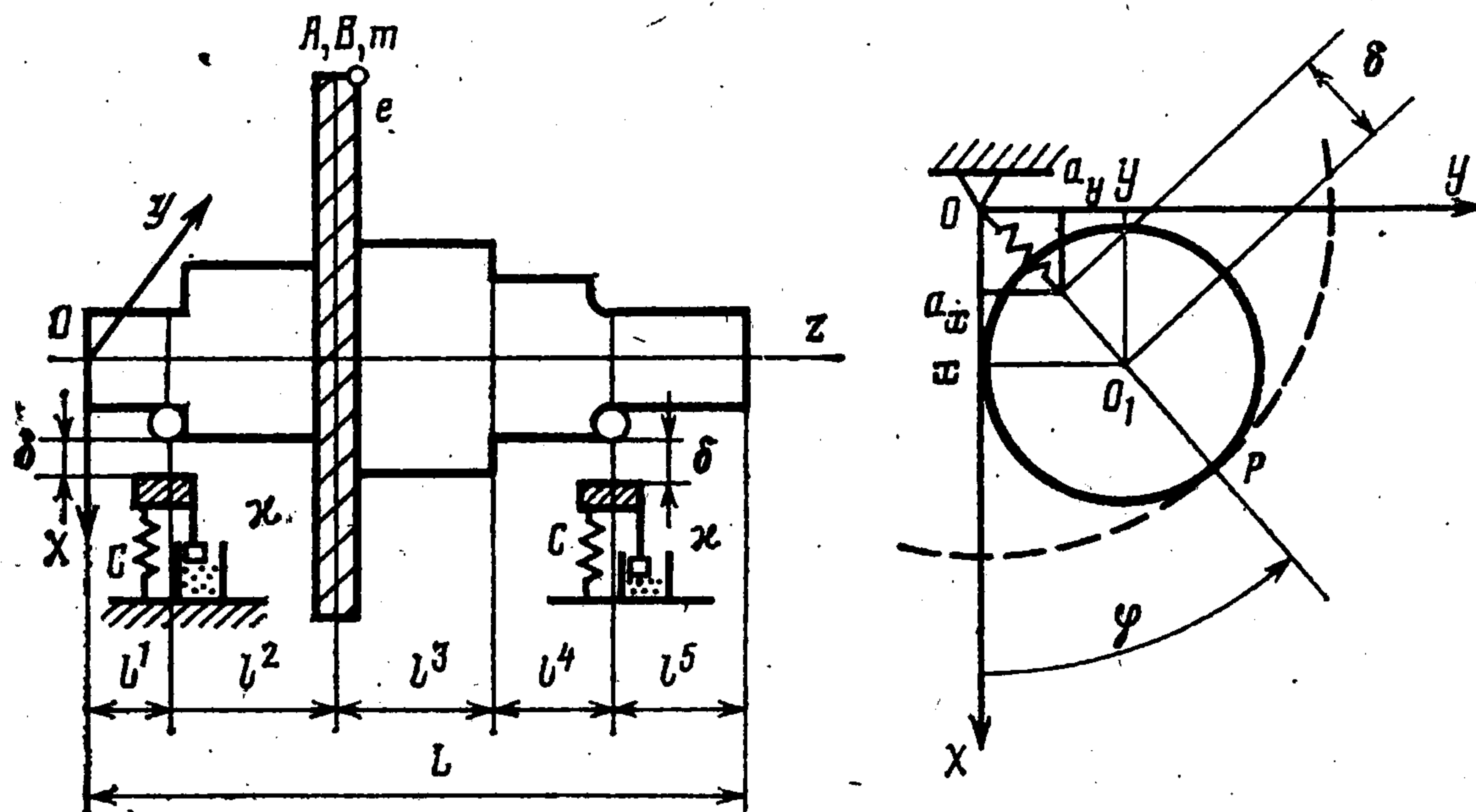
ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО РОТОРА В УПРУГИХ ОПОРАХ КАЧЕНИЯ С ЗАЗОРАМИ

Исследуется устойчивость движения горизонтального ротора в упругих опорах качения с радиальными зазорами как системы с распределенной массой. Разрабатывается алгоритм расчета уравнений граничных кривых для областей устойчивости и неустойчивости, который сводится к определению нулей определителей некоторых блочных матриц бесконечного порядка. Определяются в явном виде вершины зон параметрических резонансов, возможных в рассматриваемой нелинейной системе. Показано, что значения параметрических резонансов можно найти путем определения собственных частот соответствующих линейных систем с приведенными величинами жесткостей опор с зазорами.

Возможность существенного влияния зазора в подшипнике на динамику системы впервые указывалась в [1, 2]. Проводился [3] подробный анализ движения вала в подшипниках с зазорами.

Ранее рассматривалась [1—3] задача об устойчивости ротора как точечной массы, вращающейся в упругой опоре с зазором. Подобная схема сильно идеализирована и не учитывает многих особенностей реального ротора как упругой системы с распределенной массой. Особенно актуальна эта задача для высокооборотных роторов, вращающихся с угловой скоростью, большей первой или второй критической скорости системы.

1. Для решения задачи о вынужденных колебаниях ротора как системы с распределенной массой можно использовать метод начальных параметров [4]. При этом реальный ротор разбивается на ряд ступенчатых участков постоянной погонной массы и жесткости на изгиб таким



Фиг. 1

образом, что различные детали, насаженные на вал (диски, сосредоточенные массы, дисбалансы, опоры), помещаются в концах соответствующих участков (фиг. 1).

Введем правую систему координат $OXYZ$, связанную с невращающимся ротором: O — центр левого сечения ротора, ось Z направлена вдоль оси ротора, X — вертикально вниз, Y — горизонтально (фиг. 1). Здесь же показано сечение ротора в плоскости опоры: O_1 — центр цапфы

ротора, x, y — проекции смещения цапфы на оси X, Y ; φ — угол прецессии; a_x, a_y — проекции вектора деформации на оси X, Y . Штриховой линией показана поверхность опоры.

Уравнения колебаний для однородного участка ротора с номером k имеют вид [4]

$$EJ^k u_{zzzz}^k + \mu^k u_{tt}^k + \mu^k g = 0 \quad (1.1)$$

где EJ^k — изгибная жесткость участка, μ^k — погонная масса участка, $u^k(z, t), v^k(z, t)$ — проекции смещения ротора на оси X и Y соответственно, индексы z и t означают дифференцирование по координате z и времени t .

Уравнения связи между параметрами колебаний для конца k -го и начала $(k+1)$ -го участка ротора в случае безотрывных колебаний (первый и третий типы движения) имеют вид [5] (аргумент t у функций u и v опускаем)

$$\begin{aligned} u^k(l^k) &= u^{k+1}(0), \quad u_z^k(l^k) = u_z^{k+1}(0) \\ EJ^k u_{zz}^k(l^k) &= EJ^{k+1} u_{zz}^{k+1}(0) + B^k u_{ttz}^{k+1}(0) + A^k \omega u_{tz}^{k+1}(0) \\ EJ_{zzz}^k(l^k) &= EJ^{k+1} u_{zzz}^{k+1}(0) + C^k a_x^k + m^k u_{tt}^{k+1}(0) + \kappa^k v^{k+1}(0) - m^k g - \\ &\quad - m^k e^k \omega^2 \cos(\omega t + \gamma^k) \end{aligned} \quad (1.2)$$

(для функции v уравнения связи аналогичны). Здесь l^k — длина k -го участка; B^k, A^k — экваториальный и полярный моменты инерции диска, расположенного в конце k -го участка; ω — частота вращения ротора; C^k, κ^k — жесткость и демпфирование опоры, расположенной в конце k -го участка; m^k — величина сосредоточенной массы; e^k — эксцентриситет массы m^k , $m^k e^k \omega^2$ — центробежная сила, вызванная эксцентриситетом массы e^k ; γ^k — угол между эксцентриситетом и осью X в начальный момент времени $t = 0$.

Уравнения движения (1.1), условия сопряжения (1.2) и условия защемления концов ротора (при $z = 0$ и $z = L$), которые, например, для ротора со свободными концами имеют вид

$$z = 0, L, \quad u_{zz} = u_{zzz} = v_{zz} = v_{zzz} = 0 \quad (1.3)$$

полностью определяют решение задачи о вынужденных изгибных колебаниях ротора.

Отметим, что в случае линейных опор, при величине радиального зазора $\delta = 0$ деформации опоры совпадают с перемещениями цапфы ротора: $a_x^k = u^k, a_y^k = v^k$.

Отыскивая решение линейной задачи в виде

$$u^k = R_1^k \cos \omega t + R_2^k \sin \omega t, \quad v^k = R_3^k \cos \omega t + R_4^k \sin \omega t \quad (1.4)$$

Из (1.1)–(1.3) получим матричное уравнение связи между параметрами колебаний, относящихся к началам двух последовательных участков ротора

$$\begin{aligned} \Pi \times (R_1^k, R_2^k, R_3^k, R_4^k)^T &= (R_1^{k+1}, R_2^{k+1}, R_3^{k+1}, R_4^{k+1})^T \\ R_i^k &= (R_i^k(0), R_{iz}^k(0), R_{izz}^k(0), R_{izzz}^k(0)), \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned} \quad (1.5)$$

(Π — квадратная матрица 16×16).

Записывая уравнения (1.5) последовательно для всех участков ротора и используя условия для концов ротора (1.3), получим

$$\begin{aligned} AA(\omega, EJ^k, B^k, A^k, C^k, m^k, \kappa^k) (p_1, p_2, p_3, p_4)^T &= \\ = BB(\omega, m^k, e^k, \gamma^k), \quad p_i &= (R_i(0), R_{iz}(0), R_i(L), R_{iz}(L)) \end{aligned} \quad (1.6)$$

(AA — матрица 8×8 , BB — восьмимерный вектор).

2. Нелинейность задачи заключается в нелинейных силах реакций опор с зазорами. Учитывая, что для опоры качения точка касания, центр сечения вращающегося ротора O_1 и центр недеформированной опоры O (фиг. 1) лежат на одной прямой, проекции вектора деформации a_x и a_y можно представить в виде (индекс номера участка k для краткости опускаем)

$$\begin{aligned} a_x &= u - \delta \cos \varphi = u (1 - \delta / (u^2 + v^2)^{1/2}) \\ a_y &= v - \delta \sin \varphi = v (1 - \delta / (u^2 + v^2)^{1/2}) \end{aligned} \quad (2.1)$$

где δ — радиальный зазор в опоре (фиг. 1).

Рассмотрим малые маятниковые колебания вала в опоре с зазорами. В этом случае постоянная составляющая колебаний цапфы вала примерно равна величине полной статической просадки вала с учетом зазора и много больше остальных составляющих колебаний

$$u = l_0 + x = r_0 + \delta + x, \quad v = y; \quad l_0 \gg |x|, |y| \quad (2.2)$$

(r_0 — статическая просадка вала в опоре).

Для малых маятниковых колебаний угол φ мал, поэтому

$$\sin \varphi \approx y / l_0, \quad \cos \varphi \approx 1 - y^2 / (2l_0^2) \quad (2.3)$$

Воспользовавшись условиями (2.2), разложим выражения (2.1) в степенные ряды по малым величинам x/l_0 , y/l_0 . Подставляя затем полученные выражения в формулы (1.2) и отбрасывая члены порядка малости выше, чем $(x/l_0)^3$ и $(y/l_0)^3$, получим условия для скачка перерезывающей силы при переходе через сечения с опорой

$$\begin{aligned} F_x &= -Cx + mx_{tt} + \kappa x_t - C\delta y / (2l_0^2) + C\delta y^2 x / l_0^3 \\ F_y &= -C(1 - \delta/l_0)y + my_{tt} + \kappa y_t + C\delta xy / l_0^2 + C\delta x^2 y / l_0^3 \end{aligned} \quad (2.4)$$

В первом приближении решение задачи о вынужденных маятниковых колебаниях вала можно принять в виде (1.4), причем величины R_i^k определяются из решения соответствующей линейной задачи для вала в опорах без зазоров и с двойкой жесткостью в горизонтальной и вертикальной плоскостях

$$C_x = C, \quad C_y = C_M = C(1 - \delta/l_0) \quad (2.5)$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} F_x &= -C_x + mx_{tt} + \kappa x_t - x(b_1 \cos 2\omega t + c_1 \sin 2\omega t) \\ F_y &= -C_M y + my_{tt} + \kappa y_t - y(b_2 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t) \\ b_1 &= \frac{R_3^2}{2l_0^2} \Delta, \quad c_1 = \frac{R_3 R_4}{2l_0^2} \Delta, \quad b_2 = \frac{R_1}{l_0} \Delta, \quad c_2 = \frac{R_2}{l_0} \Delta, \quad \Delta = \frac{C\delta}{l_0} \end{aligned} \quad (2.6)$$

3. С учетом действия в некоторых сечениях ротора при $z = z^k$ сосредоточенных моментов от дисков и сосредоточенных сил, определяемых по формулам (2.4), уравнения движения можно записать в виде

$$\begin{aligned} (EJ(z) x_{zz})_{zz} - \sum_k ((B^k x_{ztt} - A^k \omega y_{zt}) h(z - z^k))_z + \\ + \mu(z) x_{tt} + \sum_k (f_x^k(t) x + m^k x_{tt} + \kappa^k x_t) h(z - z^k) = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Уравнения для функции $y(t, z)$ имеют аналогичный вид, причем

$$\begin{aligned} f_x^k(t) &= C^k + b_1^k \cos 2\omega t + c_1^k \sin 2\omega t \\ f_y^k(t) &= C^k (1 - \delta^k / l_0^k) + b_2^k \cos \omega t + c_2^k \sin \omega t \end{aligned} \quad (3.2)$$

Суммирование по k ведется от 1 до M , где M — общее число всех дисков и опор вала, $h(z)$ — дельта-функция.

Рассмотрим решение в виде разложения по собственным функциям (суммирование по i ведется от 1 до N , интегрирование по z — от нуля до L)

$$x = \sum_i x_i(z) q_i(t), \quad y = \sum_i y_i(z) g_i(t) \quad (3.3)$$

$$\int x_i(z) x_j(z) \mu(z) dz = \Delta_{ij}$$

$$\int (EJ(z) x_{izz}(z))_{zz} x_j(z) dz = p_i^2 \Delta_{ij} - \sum_k C^k x_i^k x_j^k$$

Здесь Δ_{ij} — символ Кронекера, p_i — собственные частоты линейной системы при всех $\delta^k = 0$ (аналогичные соотношения для функций $y_i(z)$ не выписаны).

Подставляя ряды (3.3) в уравнение (3.1) и аналогичные ему уравнения для функции $y(t, z)$, затем умножая эти уравнения на $x_j(z)$ и $y_j(z)$ соответственно и интегрируя от нуля до L , получим

$$p_j^2 q_j(t) + q_{jtt}(t) - \sum_k \sum_i \int ((B^k x_{iz} q_{itt} x_j - A^k \omega y_{iz} g_{it} x_j) h(z - z^k))_z dz + \\ + \sum_k \sum_i (f_x^k(t) q_i x_i^k x_j^k + m^k q_{itt} x_i^k x_j^k + \kappa^k q_{it} x_i^k x_j^k) = 0 \quad (3.4)$$

и аналогичные уравнения, соответствующие замене в (3.4)

$$q_j(t) \leftrightarrow g_j(t), \quad x_i \leftrightarrow y_j, \quad f_x^k(t) \leftrightarrow f_y^k(t), \quad A^k \leftrightarrow -A^k.$$

Так как [6]

$$\int (B^k x_{iz} x_j h(z - z^k))_z dz = - \int B^k x_{iz} x_{jz} h(z - z^k) dz$$

и аналогичные соотношения выполняются для остальных членов, обусловленных в (3.4) наличием дисков, то указанные выше системы уравнений можно записать в матричном виде

$$MQ_{tt} + P_x(t)Q - AG_t + SQ_t = 0 \\ MG_{tt} + P_y(t)G + AQ_t + SG_t = 0 \quad (3.5)$$

$$Q = Q(t) = (q_1, \dots, q_N)^T, \quad G = G(t) = (g_1, \dots, g_N)^T$$

причем M, P_x, P_y, A, S — симметричные матрицы $N \times N$.

Полагая демпфирование в опорах равным нулю (т. е. $S = 0$), получим из (3.5)

$$L \times R_{tt} + D \times R_t + P(t) \times R = 0 \quad (3.6)$$

$$R = \begin{Bmatrix} Q \\ G \end{Bmatrix}, \quad L = \begin{Bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{Bmatrix}, \quad D = \begin{Bmatrix} 0 & -A \\ A & 0 \end{Bmatrix}$$

$$P(t) = \begin{Bmatrix} P_x(t) & 0 \\ 0 & P_y(t) \end{Bmatrix}, \quad P(t+T) = P(t), \quad T = 2\pi/\omega$$

причем, очевидно, D — антисимметричная, L и $P(t)$ — симметричные матрицы $2N \times 2N$.

Введем $4N$ -мерный вектор $Z = (R, LR_t)^T$ тогда уравнение (3.6) примет вид (I — единичная матрица $2N \times 2N$)

$$\begin{Bmatrix} -D & -1 \\ I & 0 \end{Bmatrix} Z_t = \begin{Bmatrix} P(t) & 0 \\ 0 & L^{-1} \end{Bmatrix} Z \quad (3.7)$$

Уравнение (3.7), по определению, каноническое [7], поэтому для него верна теорема из [7], согласно которой вершинами зон параметрических резонансов на диаграмме устойчивости в осях ω (частота вращения),

ε (какой-либо параметр системы) являются частоты

$$\omega = (\omega_i + \omega_j)/n, \quad i, j, n = 1, 2, \dots \quad (3.8)$$

где ω_i — собственные частоты соответствующей невозмущенной системы, т. е. собственные частоты системы, для которой в формулах (3.2) $b_i = c_i = 0$. Поэтому $\{\omega_i\} = \{p_{Mi}, p_i\}$, а вершинами зон параметрических резонансов будут значения

$$\omega = 2p_{Mi}/n, 2p_i/n, (p_{Mi} + p_j)/n, (p_i + p_j)/n, (p_{Mi} + p_{Mj})/n \quad (3.9)$$

где p_{Mi} — в отличие от p_i — собственные маятниковые частоты невозмущенной (линеаризованной) системы с жесткостями, определяемыми по формулам (2.5) (для p_i имеем $C_x^k = C_y^k = C^k$).

Исследование устойчивости в случае круговых вынужденных колебаний проводится аналогичным образом и дает значения для вершин зон параметрических резонансов

$$\omega = 2p_i/n, (p_i + p_j)/n \quad (3.10)$$

4. Для зон основного резонанса, т. е. при $i = j$ в соотношениях (3.9) и (3.10) области устойчивости и неустойчивости могут быть построены на основании теории Флоке [8]. Так как границам этих зон соответствуют значения мультипликаторов [7] $\rho = \exp(i\lambda t) = \pm 1$, то на границе области динамической неустойчивости имеется либо T -периодическое ($\rho = 1$), либо T -антипериодическое ($\rho = -1$) нетривиальное решение уравнения (3.7), т. е. решения вида

$$x^k = \sum_{n=0}^{\infty} (A_{xn}^k \cos n\omega t + B_{xn}^k \sin n\omega t) \quad (4.1)$$

$$x^k = \sum_{n=1}^{\infty} (E_{xn}^k \cos((2n-1)\omega t/2) + F_{xn}^k \sin((2n-1)\omega t/2)) \quad (4.2)$$

и аналогичного вида для y^k .

Подставим эти разложения в уравнения движения (1.1), условия сопряжения (1.2) и (2.6) и граничных условия (1.3) и проведем процедуру решения методом начальных параметров для всех гармоник в разложениях (4.1), (4.2). Получим, приравнявая коэффициенты при различных гармониках, две системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами бесконечного порядка. Матрицы этих систем имеют блочный вид

$$\begin{pmatrix} X_1^M & M_{12} & M_{13} & O & O & \dots \\ M_{21} & X_2^M & M_{23} & M_{24} & O & \dots \\ M_{31} & M_{31} & X_3^M & M_{34} & M_{35} & \dots \\ O & M_{42} & M_{43} & X_4^M & M_{45} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

$$\begin{pmatrix} X_{1/2}^M & M_{12} & M_{13} & O & O & \dots \\ M_{21} & X_{3/2}^M & M_{23} & M_{24} & O & \dots \\ M_{31} & M_{32} & X_{5/2}^M & M_{34} & M_{35} & \dots \\ O & M_{42} & M_{43} & X_{7/2}^M & M_{45} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Здесь $X_{n/m}^M$ и M_{ij} — матрицы 8×8 , O — нулевая матрица 8×8 . Матрицы M_{ij} в случае всех $\delta^k = 0$, как ясно из формул (2.6), будут нулевыми.

Из построения матриц (4.3), (4.4) и уравнения (1.6) видно, что

$$X_{n/m}^M(\omega) = AA^M(\omega n/m)$$

причем матрица $AA^M(\omega)$ получается из матрицы соответствующей линейной задачи (формулы (1.6)) при замене коэффициентов жесткостей опор, в которых происходит маятниковые колебания в горизонтальном направлении на приведенные жесткости

$$C_M^k = C^k (1 - \delta^k/l_0^k) \quad (4.5)$$

Составив определители матриц (4.3) и (4.4) и приравняв их к нулю, получим условия существования нетривиальных решений вида (4.1), (4.2) и, следовательно, уравнения граничных кривых для областей неустойчивости. По мере увеличения числа членов в разложениях (4.1), (4.2) увеличивается и порядок определителей матриц (4.3), (4.4). Вместе с тем увеличивается число определяемых граничных кривых и точность их положения на диаграмме устойчивости. Понятно, что при ненулевом демпфировании определители матриц AA^M в нуль не обращаются. В этом случае потеря устойчивости происходит лишь при некотором достаточно большом уровне параметра δ и ненулевых матрицах M_{ij} .

Таким образом, значения параметрических резонансов в рассматриваемой нелинейной системе могут быть найдены в явном виде путем определения собственных частот соответствующих линейных систем.

5. Для иллюстрации предложенного метода рассмотрим построение граничных кривых на диаграмме устойчивости на примере простого ротора в виде однородного стержня, опирающегося концами на шарнирную (при $z = 0$) и упругую опору жесткости C с зазором δ (при $z = L$) и вращающегося с частотой ω .

Граничные условия для данной системы имеют вида

$$x(0) = 0, \quad x_{zz}(0) = 0, \quad x_{zz}(L) = 0. \quad (5.1)$$

$$EJx_{zzz}(L) = C(1 - \delta/(x^2(L) + y^2(L))^{1/2})x(L) \quad (5.2)$$

(аналогичные условия выполняются для функции $y(z)$).

Рассмотрим область круговых колебаний. Решение в первом приближении таково

$$x_0 = l_0(z) + r_1(z) \cos \omega t, \quad y_0 = r_1(z) \sin \omega t$$

где $l_0(z)$ — форма статического прогиба от силы тяжести, $r_1(z)$ — форма колебаний, вызванная действием дисбаланса ротора.

Для круговых колебаний считаем

$$|r_1(L)| \gg l_0(L), \delta \quad (5.3)$$

Условие (5.2) после линеаризации при учете (5.3) и пренебрежении величиной $\delta/r_1(L)$ по сравнению с единицей принимает вид

$$EJx_{zzz}(L) = C(1 + \delta l_0(L) \cos \omega t / r_1^2(L))x(L) \quad (5.4)$$

В данном случае уравнения для функций x и y разделяются, что приводит к уменьшению размерности блоков в определителях матриц (4.3) и (4.4) вдвое. Задача сводится к исследованию устойчивости нулевого решения однородных уравнений колебаний (1.1) при нулевых нагрузках от силы веса и дисбаланса

$$EJx_{zzzz} + \mu x_{tt} = 0 \quad (5.5)$$

удовлетворяющего граничным условиям (5.1) и (5.4).

Согласно предыдущим рассуждениям на границах областей динамической неустойчивости существуют решения вида

$$x = A_1(z) \sin \frac{\omega t}{2} + B_1(z) \cos \frac{\omega t}{2} + A_3(z) \sin \frac{3\omega t}{2} + \dots \quad (5.6)$$

$$x = B_0(z) + A_1(z) \sin \omega t + B_1(z) \cos \omega t + A_2(z) \sin 2\omega t + \dots \quad (5.7)$$

В дальнейшем рассмотрим лишь кривые, определяемые разложением (5.6), причем удержим в нем только два первых члена. Подставляя это разложение в уравнение (5.5), получим

$$A_1(z) = a_1 S_0^+(\rho z) + a_2 S_s^+(\rho z) + a_3 S_c^-(\rho z) + a_4 S_s^-(\rho z)$$

$$S_c^\pm(x) = (\operatorname{ch} x \pm \cos x)/2, \quad S_s^\pm(x) = (\operatorname{sh} x \pm \sin x)/2$$

$$\rho = (\mu\omega^2/(4EJ))^{1/4}$$

и аналогичное выражение для $B_1(z)$ (при замене a_i на b_i), где a_i, b_i — произвольные постоянные.

Подставив этот результат в граничные условия (5.1), (5.4), найдем, что $a_1 = a_3 = b_1 = b_3 = 0$. Для остальных произвольных постоянных получим, приравняв коэффициенты при $\sin(\omega t/2)$ и $\cos(\omega t/2)$, систему линейных уравнений четвертого порядка. Эта система разделяется на две независимые подсистемы второго порядка относительно неизвестных a_2, a_4 и b_2, b_4 . Условием существования нетривиального решения является условие равенства нулю определителя какой-либо из этих подсистем

$$I^-(\omega)I^+(\omega) = 0 \quad (5.8)$$

$$I^\pm(\omega) = \begin{vmatrix} \rho^2 S_s^- & \rho^2 S_s^+ \\ p^\pm S_s^+ - \rho^3 S_c^- & p^\pm S_s^- - \rho^3 S_c^+ \end{vmatrix}$$

$$I^\pm = C(1 \pm \delta l_0(L)/(2r_1^2(L)))/EJ$$

(аргумент $z = \rho L$ у функций S_c^\pm, S_s^\pm опускаем).

При $\delta = 0$ отсюда следует обычное частотное уравнение для рассматриваемого ротора в линейных опорах. Его корнями будут, очевидно, значения $\omega = 2p_i$ ($i = 1, 2, \dots$), где p_i — собственные частоты соответствующей линейной системы. Это и есть значения параметрических резонансов на диаграмме устойчивости в осях $\omega - \delta$.

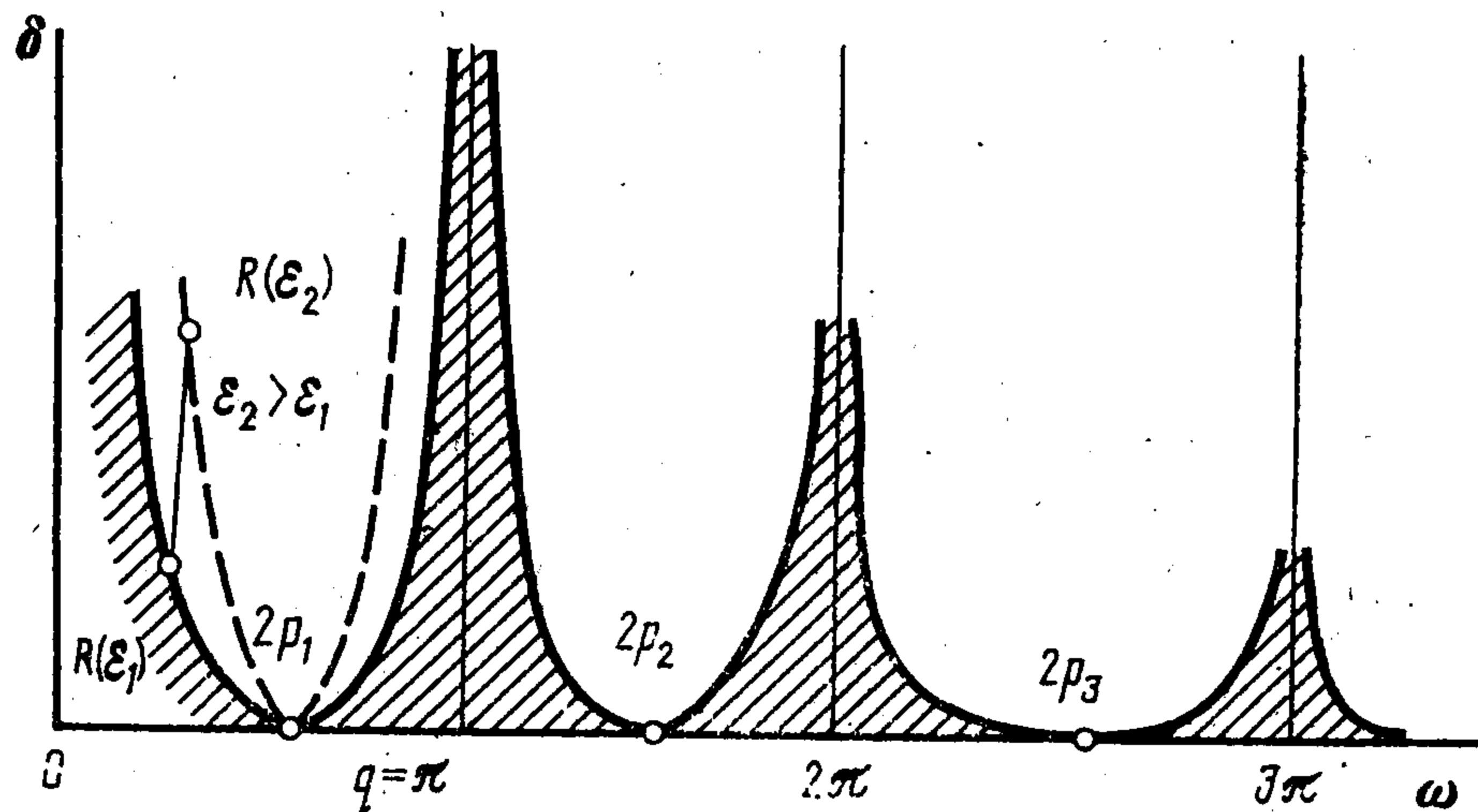
Разрешая уравнения (5.8) относительно δ , получим уравнения границ областей динамической неустойчивости в виде

$$\delta(\omega) = \pm \frac{\sqrt{2}r_1^2(L)}{l_0(L)} \left(\frac{\rho^3 E J}{C} \frac{S_c^- S_s^+ - S_c^+ S_s^-}{(S_s^-)^2 - (S_s^+)^2} + 1 \right)$$

Положив $\rho L = q$, где q — безразмерная частота вращения ($\omega = 2q^2 L^{-2} (EJ/\mu)^{1/2}$), получим

$$\delta(q) = \pm r_1^2(L)/l_0(L) (EJL^{-3}q^3 (\operatorname{ctg} q - \operatorname{cth} q) + 2) \quad (5.9)$$

Примерный вид этих кривых изображен на фиг. 2. Области устойчивости заштрихованы.



Фиг. 2

Можно сделать следующие выводы.

Увеличение δ приводит к расширению зон неустойчивости.

Области неустойчивости, соответствующие различным параметрическим резонансам, расширяются вместе с ростом частоты вращения.

Увеличение параметра $\varepsilon = r_1^2/l_0$ (т. е. рост динамической или снижение статической нагрузки) приводит к росту ординаты точки R на кривой $\delta(\omega)$ и сужению зоны неустойчивости для области круговых колебаний. Можно показать, что для области маятниковых колебаний изменение ε приводит к прямо противоположному изменению ширины зоны неустойчивости.

Увеличение зазора вызывает смещение маятниковых резонансов p_{Mi} в сторону меньших частот вращения (это видно из формул (4.5)) и смещение зон неустойчивости, соответствующим этим резонансам.

Зоны неустойчивости для параметрических резонансов $\omega = 2p_{Mi}/n$ и $\omega = 2p_i/n$ ($n > 1$) можно получить, удерживая в уравнениях (5.7) и (5.8) необходимое число членов и рассматривая соответствующий тип движения (маятниковые или круговые колебания).

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорьев Н. В. Движение нагруженного ротора, имеющего нелинейные элементы в системе «ротор — статор» // Тр. ЛКВВИА. 1958. Вып. 203. С. 44—67.
2. Григорьев Н. В. Об учете нелинейных элементов при расчете колебаний системы «ротор — корпус» ГТД // Тр. ЛКВВИА. 1958. Вып. 251. С. 3—27.
3. Мусаев А. К. Влияние зазоров в подшипниках на критические скорости вращающихся валов // Тр. ЛКВВИА. 1960. Вып. 323. С. 20—49.
4. Бабаков И. М. Теория колебаний. М.: Наука, 1965. 560 с.
5. Вибрации в технике / Под ред. Диментберга Ф. М. и Колесникова К. С. М.: Машиностроение, 1980. Т. 3. 544 с.
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1973. 832 с.
7. Якубович В. Н., Старжинский В. М. Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987. 328 с.
8. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1987. 304 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
16.III.1989