

Д. В. Лебедев

## ОБ УПРАВЛЕНИИ ДВИЖЕНИЕМ ВОКРУГ ЦЕНТРА МАСС ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Исследуются задачи управления сферическим движением вращающегося твердого тела, когда управляющие моменты, сообщаемые объекту исполнительными органами системы управления, не содержат  $x$ -компоненту и действуют относительно осей, не совпадающих с системой главных центральных осей инерции тела. Показано, что гашение поперечных составляющих вектора угловой скорости и управление процессом ориентации неглавной оси инерции твердого тела сопровождаются падением угловой скорости закрутки и потерей, в конечном счете, гироскопических свойств вращающегося тела. Управление же равномерным вращением твердого тела относительно главной оси инерции и ее ориентацией в инерциальном пространстве исключает отмеченный динамический эффект. Приводятся алгоритмы управления, гарантирующие устойчивость исследуемым режимам движения твердого тела при наличии ограничений на параметры управления. Результаты моделирования управляемого движения подтверждают эффективность предлагаемых решений.

1. Постановка задачи. Введем три правые декартовы системы координат, центр  $O$  которых совпадает с центром масс твердого тела: жестко связанную с ним систему  $xuz$ , оси которой не совпадают с системой  $x_*y_*z_*$

главных центральных осей инерции тела, и инерциальную систему координат  $XYZ$ .

Взаимное положение базисов  $xuz$  и  $x_*y_*z_*$  характеризуется углами  $\vartheta$ ,  $\psi$  и  $\varphi$  (фиг. 1). Связь представления  $\mathbf{r}$  вектора  $\mathbf{R}$  в базисе  $xuz$  с соответствующим представлением  $\mathbf{r}_*$  в базисе  $x_*y_*z_*$  задается соотношением

$$\mathbf{r} = B\mathbf{r}_*, \quad B = \{\beta_{ij}\} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

( $B$  — матрица направляющих косинусов).

Описывая в базисе  $xuz$  вращательное движение твердого тела динамическими уравнениями Эйлера

$$J\dot{\omega} + \omega \times J\omega = M, \quad \omega = \{\omega_x, \omega_y, \omega_z\} \quad (1.1)$$

отметим, что матрица инерции  $J$  связана с матрицей инерции  $J_* = \text{diag}\{J_1, J_2, J_3\}$  в базисе  $x_*y_*z_*$  выражением

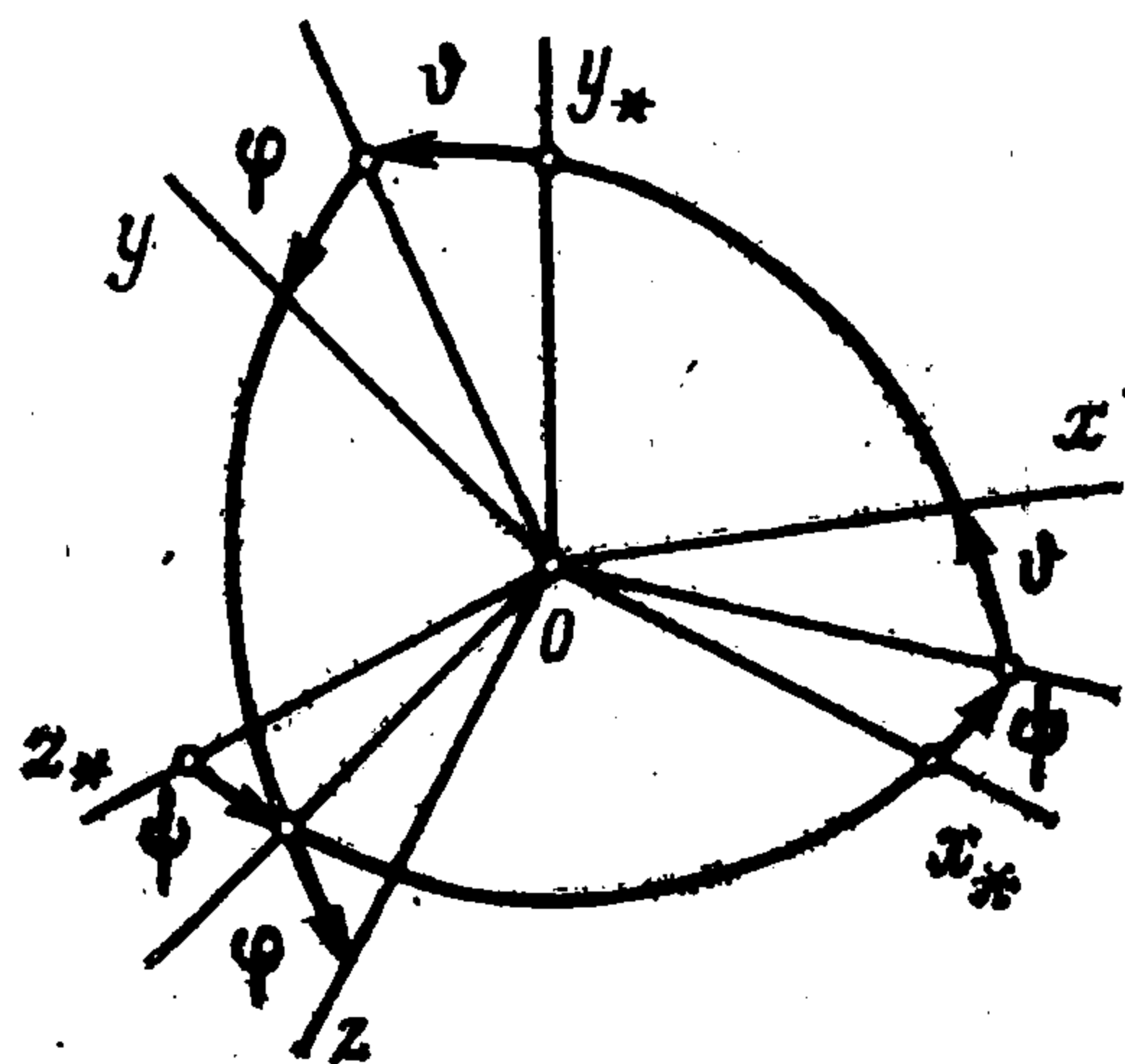
$$J = BJ_*B'$$

Для определенности считаем, что  $J_1 < J_2 \leq J_3$  (штрих означает операцию транспонирования).

Предполагается, что движение твердого тела наблюдается в жестко связанной с ним системе координат  $xuz$ , а управляющий момент  $M$  в этой же системе координат имеет следующую структуру:  $M = \{0, M_y, M_z\}$ .

Обозначим через  $\xi$  и  $\eta$  неподвижные орты в базисе  $xuz$  и инерциальном пространстве  $XYZ$  соответственно. Движение орта  $\eta$  в связанной с телом системе координат подчиняется уравнению

$$\dot{\eta} + \omega \times \eta = 0 \quad (1.2)$$



Фиг. 1

Пусть твердому телу сообщена угловая [скорость  $\omega_x = \Omega$  ( $|\omega_y|, |\omega_z| \ll \Omega$ ).

Специфика структуры управляющего момента  $M$  порождает ряд особенностей при управлении сферическим движением твердого тела.

Отсутствие у вектора  $M$   $x$ -компоненты не позволяет в базисе  $xuz$  стабилизировать равномерное вращение тела вокруг оси  $x$ .

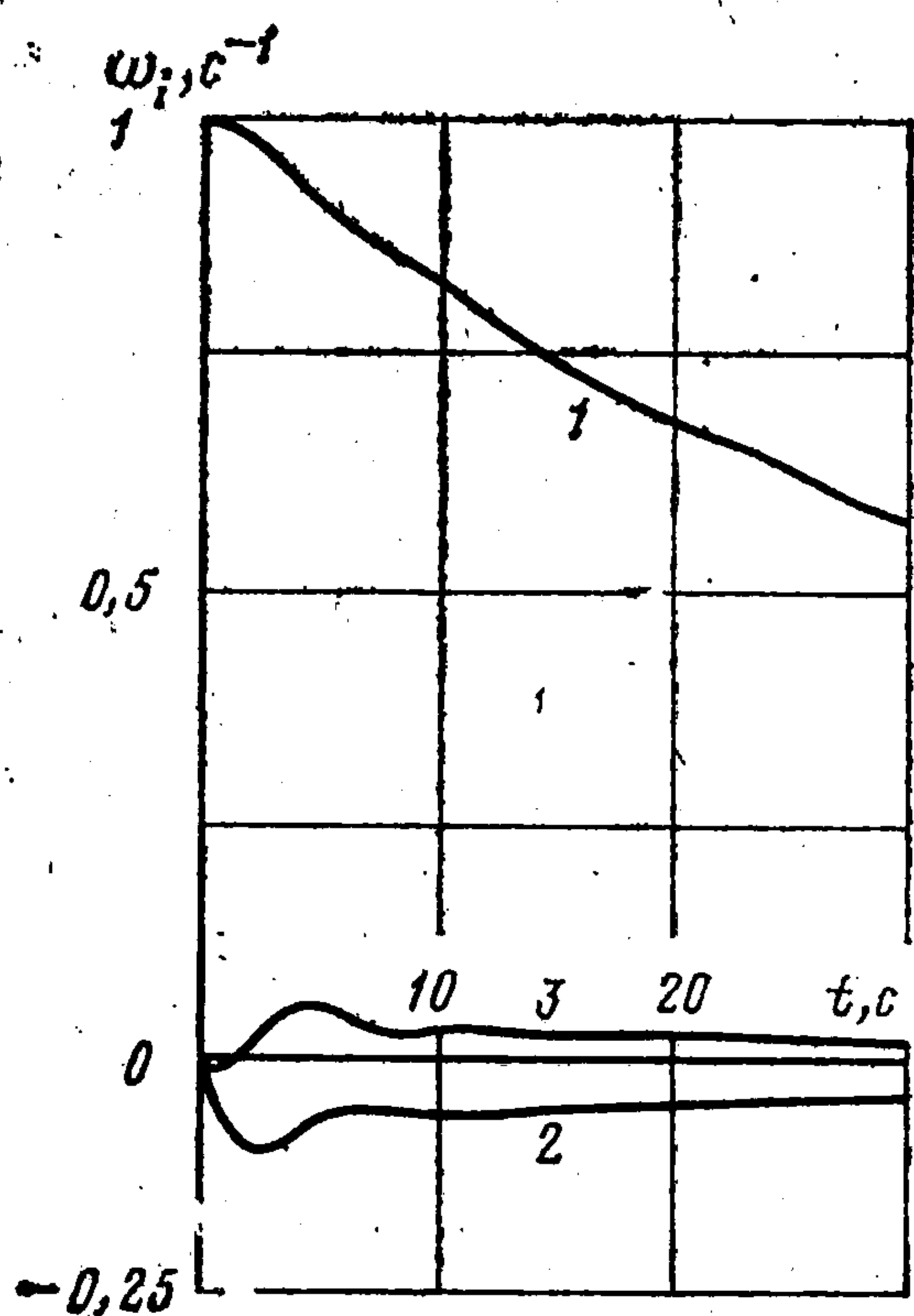
$$\omega^0 = \{\Omega, 0, 0\}, \Omega = \text{const} \quad (1.3)$$

Так, гашение угловых скоростей  $\omega_y$  и  $\omega_z$  управляющими моментами

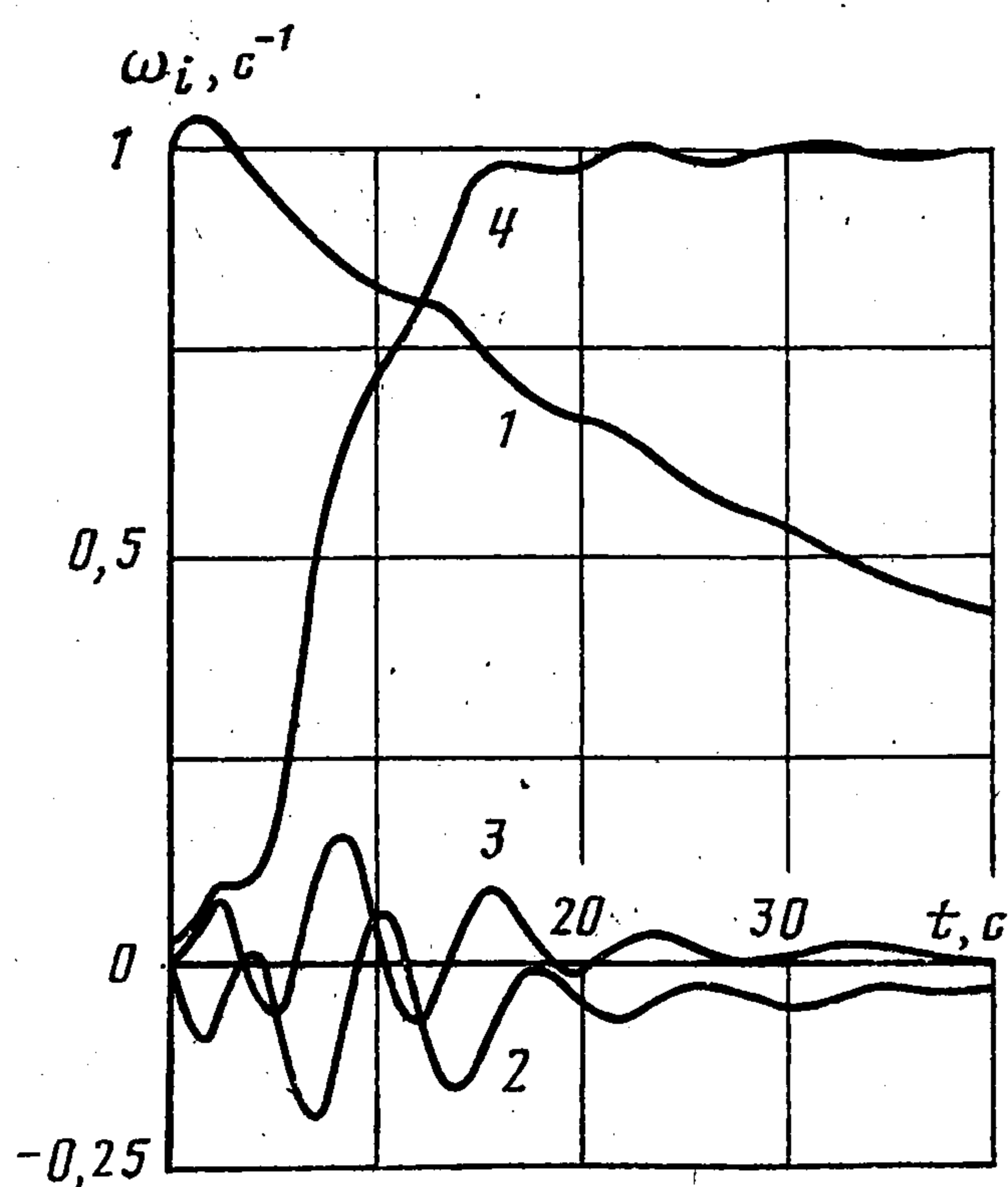
$$M_y = k\omega_y, M_z = k\omega_z, k < 0 \quad (1.4)$$

приводит к падению угловой скорости  $\omega_x$  и, в конечном счете, к потере гироскопических свойств вращающегося твердого тела.

Объясняется это тем, что вектор (1.3) не является положением равновесия системы (1.1). Управление же (1.4) обеспечивает асимптотическую устойчивость нулевому решению системы (1.1). В этом можно убедиться,



Фиг. 2



Фиг. 3

используя функцию Ляпунова  $2V = \omega' J \omega$  и теорему Барбашина — Крассовского [1].

Аналогичная ситуация имеет место при управлении одноосной ориентацией вращающегося твердого тела, когда в качестве неподвижного в системе  $xuz$  орта  $\xi$  принят вектор  $\xi = \{1, 0, 0\}$ , а управляющий момент формируется в виде

$$M_y = \mu\eta_3 + k\omega_y, M_z = -\mu\eta_2 + k\omega_z, \mu > 0, k < 0 \quad (1.5)$$

Управление (1.5) совпадает с  $y$ - и  $z$ -компонентами управляющего момента  $M = \mu\xi \times \eta + k\omega$ , решающего при наличии  $M_x$  в структуре момента  $M$  задачу одноосной ориентации твердого тела [2, 3].

Отмеченные особенности процессов управления иллюстрируют фиг. 2 и 3, кривыми 1—3 на которых показаны изменения во времени угловых скоростей  $\omega_x, \omega_y$  и  $\omega_z$  ( $\omega_x(0) = \Omega = 1 \text{ s}^{-1}$ ). Кривая 4 на фиг. 3 — изменение в процессе управления косинуса угла между осью  $x$  (вектор  $\xi$ ) и требуемым направлением (вектор  $\eta$ ). Графики построены при следующих значениях параметров эллипсоида инерции твердого тела:

$$J_1 = 0,1 \cdot 10^n, J_2 = 10^n, J_3 = 1,2 \cdot 10^n \text{ (кгм}^2\text{)}; \vartheta = 5^\circ, \psi = 0, \varphi = 45^\circ$$

В алгоритме (1.4)  $k = -0,3 \cdot 10^n$  Нмс, а в (1.5) —  $k = -0,313 \cdot 10^n$  Нмс,  $\mu = 0,05 \cdot 10^n$  Нм. При  $\vartheta = 1^\circ$  и тех же значениях углов  $\psi$  и  $\varphi$  наблюдается менее интенсивное падение величины  $\omega_x$  ( $\sim$  на 4% за 40 с движения).

Специфика структуры управляющего момента требует иного подхода к задачам управления вращающимся твердым телом.

Отметим, что вращение тела с угловой скоростью

$$\omega = \omega_* = \Omega_* \xi, \quad \xi = \{\beta_{11}, \beta_{21}, \beta_{31}\}, \quad \Omega_* = \text{const} \quad (1.6)$$

является положением равновесия системы (1.1) (в базисе  $x_* y_* z_*$  ему отвечает перманентное вращение относительно оси  $x_*$  с угловой скоростью  $\Omega_*$ ).

При малом рассогласовании между осями  $x$  и  $x_*$  базисов  $xuz$  и  $x_* y_* z_*$  (угол  $\varphi$  может принимать произвольные значения) вращение твердого тела с угловой скоростью (1.6) мало отличается от режима (1.3). Поэтому моментом  $M = \{0, M_y, M_z\}$  целесообразно стабилизировать вращение (1.6). При управлении же одноосной ориентацией в качестве неподвижного в базисе  $xuz$  орта  $\xi$  следует принять орт  $\xi = \{\beta_{11}, \beta_{21}, \beta_{31}\}$  (орт главной центральной оси инерции  $x_*$  в базисе  $xuz$ ).

Сформулируем теперь две задачи управления.

**Задача 1.** Располагая в системе координат  $xuz$  информацией о векторе  $\omega$  угловой скорости вращения твердого тела и орте  $\xi$ , синтезировать управление  $M = \{0, M_y, M_z\}$ , обеспечивающее устойчивость режима (1.6) перманентного вращения твердого тела.

**Задача 2.** Считая, что в базисе  $xuz$  измерению доступны векторы  $\omega$  и  $\eta$ , синтезировать управляющий момент  $M = \{0, M_y, M_z\}$ , гарантирующий устойчивость режиму одноосной ориентации твердого тела:

$$\xi = \eta, \quad \omega = \omega_* \quad (1.7)$$

**2. Управление вращением твердого тела.** По формуле

$$\omega = X + \Omega_* \xi, \quad X = \{X_i\} \quad (i = 1, 2, 3)$$

введем новые переменные  $X_i$  и, используя (1.1), запишем уравнение возмущенного движения твердого тела в виде

$$JX' + \Omega_* \xi \times JX + X \times J(\Omega_* \xi + X) = M \quad (2.1)$$

Момент  $M$ , гарантирующий устойчивость тривиальному решению уравнения (2.1), решает задачу 1.

Выберем управляющий момент в форме

$$M_y = k(X_2 - \beta_{21}(\xi'X)), \quad M_z = k(X_3 - \beta_{31}(\xi'X)) \quad (2.2)$$

или в матричном виде

$$M = kQX \quad (2.3)$$

$$Q = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\beta_{11}\beta_{21} & 1 - \beta_{21}^2 & -\beta_{21}\beta_{31} \\ -\beta_{11}\beta_{31} & -\beta_{21}\beta_{31} & 1 - \beta_{31}^2 \end{vmatrix}$$

и покажем, что управление (2.2) решает поставленную задачу.

Уравнение (2.1) возмущенного движения в базисе  $x_* y_* z_*$  имеет вид

$$J_* x' + \Omega_* \xi_* \times J_* x + x \times J_* (\Omega_* \xi_* + x) = M_* \quad (2.4)$$

$$\xi_* = \{1, 0, 0\} = B' \xi, \quad x = \{x_i\} = B' X$$

а управляющий момент  $M_*$  в соответствии с (2.3) определяется соотношением

$$M_* = kQ_*x \quad (2.5)$$

$$Q_* = B'QB = \begin{vmatrix} 0 & -\beta_{11}\beta_{12} & -\beta_{11}\beta_{13} \\ 0 & 1 - \beta_{12}^2 & -\beta_{12}\beta_{13} \\ 0 & -\beta_{12}\beta_{13} & 1 - \beta_{13}^2 \end{vmatrix}$$

Введем определенно-положительную относительно  $x_2$  и  $x_3$  функцию

$$2V_1 = J_2(J_2 - J_1)x_2^2 + J_3(J_3 - J_1)x_3^2 \quad (2.6)$$

являющуюся при  $M_* = 0$  первым интегралом системы (2.4) [4].

Производная по времени от  $V_1$  в силу уравнений (2.4), (2.5)

$$V_1' = y'Sy, \quad y = \{x_2, x_3\}$$

$$S = k \begin{vmatrix} (J_2 - J_1)(1 - \beta_{12}^2) & 1/2(2J_1 - J_2 - J_3)\beta_{12}\beta_{13} \\ 1/2(2J_1 - J_2 - J_3)\beta_{12}\beta_{13} & (J_3 - J_1)(1 - \beta_{13}^2) \end{vmatrix}$$

при выполнении условий

$$k < 0, \quad (J_2 - J_1)(J_3 - J_1)\beta_{11}^2 - 1/4(J_3 - J_2)^2\beta_{12}^2\beta_{13}^2 > 0 \quad (2.7)$$

будет определенно-отрицательной относительно вектора  $y$  квадратичной формой. Отсюда вытекает асимптотическая устойчивость по отношению к переменным  $x_2$  и  $x_3$ .

Из анализа первого уравнения системы (2.4) и момента  $M_1$  в (2.5) следует, что при асимптотическом стремлении к нулю переменных  $x_2$  и  $x_3$  переменная  $x_1$  стремится к  $c = \text{const}$ .

Таким образом, при выполнении условий (2.7) тривиальное решение уравнения (2.4) по терминологии работы [5] асимптотически  $y$  — устойчиво. Это влечет за собой устойчивость нулевого решения системы (2.1).

Итак, управление (2.2), которому удобно придать вид

$$M_y = k(\omega_y - \beta_{21}(\xi'\omega)), \quad M_z = k(\omega_z - \beta_{31}(\xi'\omega)) \quad (2.8)$$

решает задачу 1.

3. Управление одноосной ориентацией. Представим уравнения (1.1), (1.2) в виде

$$JX' = M - \Omega_*\xi \times JX - X \times J(X + \Omega_*\xi) \quad (3.1)$$

$$Z' = Z \times (X + \Omega_*\xi) + \xi \times X$$

$$X = \omega - \Omega_*\xi, \quad Z = \eta - \xi$$

Если бы управляющий момент  $M$  имел  $x$ -компоненту, то управление, например, вида [2, 3]

$$M = \mu\xi \times Z + KX, \quad \mu > 0, \quad K = \text{diag}\{k_1, k_2, k_3\} \quad (3.2)$$

при  $k_i < 0, k_2k_3 - 1/4\Omega_*^2(J_3 - J_2)^2 > 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) обеспечило бы асимптотическую устойчивость режиму (1.7) одноосной ориентации твердого тела.

Формируя управляющий момент  $M$  в виде суммы первого слагаемого соотношения (3.2), из которого исключена  $x$ -компонента, и выражения (2.3), покажем, что полученное таким образом управление

$$M = \mu PZ + kQX, \quad \mu > 0 \quad (3.3)$$

$$P = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta_{31} & 0 & -\beta_{11} \\ -\beta_{21} & \beta_{11} & 0 \end{vmatrix}$$

решает поставленную задачу.

Запишем уравнения (3.4) возмущенного движения в базисе  $x, y, z$

$$\begin{aligned} J_1 \dot{x}_1 &= (J_2 - J_3)x_2 x_3 + M_1 \\ J_2 \dot{x}_2 &= (J_3 - J_1)(x_1 + \Omega_*)x_3 + M_2 \\ J_3 \dot{x}_3 &= (J_1 - J_2)(x_1 + \Omega_*)x_2 + M_3 \\ \dot{z}_1 &= x_3 z_2 - x_2 z_3, \quad \dot{z}_2 = (x_1 + \Omega_*)z_3 - x_3(z_1 + 1) \\ \dot{z}_3 &= x_2(z_1 + 1) - (x_1 + \Omega_*)z_2 \\ M_* &= \{M_i\} = \mu P_* z + k Q_* x, \quad z = \{z_i\} = B'Z \\ &\quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$P_* = B'PB = \begin{vmatrix} 0 & -\beta_{11}\beta_{13} & \beta_{11}\beta_{12} \\ 0 & -\beta_{12}\beta_{13} & -(1 - \beta_{12}^2) \\ 0 & 1 - \beta_{13}^2 & \beta_{12}\beta_{13} \end{vmatrix}$$

и введем новые переменные

$$Y_1 = kx_2 - \mu z_3, \quad Y_2 = kx_3 + \mu z_2, \quad Y_{i+2} = z_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.5)$$

Система уравнений (3.4) при учете обозначений (3.5) и выражения

$$M_* = \begin{vmatrix} -\beta_{11}\beta_{12}Y_1 - \beta_{11}\beta_{13}Y_2 \\ (1 - \beta_{12}^2)Y_1 - \beta_{12}\beta_{13}Y_2 \\ -\beta_{12}\beta_{13}Y_1 + (1 - \beta_{13}^2)Y_2 \end{vmatrix}$$

для управляющего момента  $M_* = \{M_i\}$  принимает вид

$$\begin{aligned} J_1 \dot{x}_1 &= -\beta_{11}\beta_{12}Y_1 - \beta_{11}\beta_{13}Y_2 + k^{-2}(J_2 - J_3)(Y_1 + \mu Y_5)(Y_2 - \mu Y_4) \\ J_2 \dot{Y}_1 &= \alpha_{11}Y_1 + \alpha_{12}Y_2 + \alpha_{13}Y_4 + \alpha_{14}Y_5 + f_1(Y) \\ J_3 \dot{Y}_2 &= \alpha_{21}Y_1 + \alpha_{22}Y_2 + \alpha_{23}Y_4 + \alpha_{24}Y_5 + f_2(Y) \\ \dot{Y}_3 &= k^{-1}(Y_2 Y_4 - Y_1 Y_5) - \mu k^{-1}(Y_4^2 + Y_5^2) \\ \dot{Y}_4 &= -k^{-1}Y_2 + \mu k^{-1}Y_4 + (\Omega_* + x_1)Y_5 - k^{-1}(Y_2 - \mu Y_4)Y_3 \\ \dot{Y}_5 &= k^{-1}Y_1 - (\Omega_* + x_1)Y_4 + \mu k^{-1}Y_5 + k^{-1}(Y_1 + \mu Y_5)Y_3 \\ \alpha_{11} &= k(1 - \beta_{12}^2) - J_2 \mu k^{-1}, \quad \alpha_{12} = (J_3 - J_1)(\Omega_* + x_1) - k\beta_{12}\beta_{13} \\ \alpha_{13} &= (J_1 + J_2 - J_3)(\Omega_* + x_1)\mu, \quad \alpha_{14} = -J_2 \mu^2 k^{-1} \\ \alpha_{21} &= (J_1 - J_2)(\Omega_* + x_1) - k\beta_{12}\beta_{13}, \quad \alpha_{22} = k(1 - \beta_{13}^2) - J_3 \mu k^{-1} \\ \alpha_{23} &= J_3 \mu^2 k^{-1}, \quad \alpha_{24} = (J_1 - J_2 + J_3)(\Omega_* + x_1)\mu \\ f_1(Y) &= -J_2 \mu k^{-1}(Y_1 + \mu Y_5)Y_3, \quad f_2(Y) = -J_3 \mu k^{-1}(Y_2 - \mu Y_4)Y_3 \\ Y &= \{Y_j\} \quad (j = 1, 2, \dots, 5) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Рассмотрим положительно-определенную относительно вектора  $Y$  функцию

$$2V_2 = J_2 Y_1^2 + J_3 Y_2^2 + \nu(Y_3^2 + Y_4^2 + Y_5^2), \quad \nu > 0 \quad (3.7)$$

производную по времени от которой в силу уравнений (3.6) представим в форме

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \zeta' S \zeta + R(Y), \quad S = \frac{1}{2}(T + T') \\ \zeta &= \{Y_1, Y_2, Y_4, Y_5\}, \quad R(Y) = Y_1 f_1(Y) + Y_2 f_2(Y) \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$T = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} + \alpha_{21} & \alpha_{13} & \alpha_{14} + \nu k^{-1} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} - \nu k^{-1} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \mu \nu k^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \nu k^{-1} \end{vmatrix}$$

Поскольку знакоопределенность аналитических функций определяется совокупностью членов наименьшего порядка в разложениях этих функций [4], то правая часть соотношения (3.8) как функция вектора  $\zeta$  будет определено-отрицательной, если таковой является квадратичная форма  $\zeta' S \zeta$ .

Пусть коэффициенты  $\mu$ ,  $\nu$  и  $k$  выбраны таким образом, что выполняются условия отрицательной определенности функции  $\zeta'S\zeta$ . Тогда первое слагаемое в (3.8) как функция вектора  $Y$  знакопостоянно отрицательна, так как, учитывая первый интеграл

$$Y_3^2 + Y_4^2 + Y_5^2 + 2Y_3 = 0$$

системы (3.6), принимает нулевое значение не только при  $Y = 0$ , но и в точке

$$N = \{Y: \zeta = 0, Y_3 = -2\}$$

Анализ уравнений первого приближения, составленных относительно точки  $N$ , свидетельствует о том, что  $N$  — неустойчивое положение равновесия системы (3.6).

Таким образом, при  $S < 0$  вектор  $Y$  асимптотически стремится к нулю. При этом, исходя из структуры первого уравнения системы (3.6) и момента  $M_1$ , координата  $x_1$  стремится к  $c_1 = \text{const}$ . Тривиальное решение системы (3.6) асимптотически  $Y$  — устойчиво, что отвечает асимптотической  $Z$ -устойчивости положения равновесия  $X = 0, Z = 0$  системы уравнений (3.1).

Управление (3.3), компоненты  $M_y$  и  $M_z$  которого запишем в виде

$$\begin{aligned} M_y &= \mu (\beta_{31}\eta_1 - \beta_{11}\eta_3) + k (\omega_y - \beta_{21} (\xi' \omega)) \\ M_z &= \mu (\beta_{11}\eta_2 - \beta_{21}\eta_1) + k (\omega_z - \beta_{31} (\xi' \omega)) \end{aligned} \quad (3.9)$$

обеспечивая заданную ориентацию оси вращения твердого тела, решает задачу 2.

4. Учет ограничений на параметры управления. Распространим полученные в пп. 2, 3 результаты на случай, когда моменты  $M_y$  и  $M_z$ , связанные с параметрами управления  $u_1$  и  $u_2$  соотношениями

$$M_y = m_y u_1, \quad M_z = m_z u_2$$

( $m_y, m_z > 0$  — постоянные коэффициенты), подчиняются ограничению вида

$$M \in G = \{M: |u_i| \leq 1, i = 1, 2\}$$

Воспользуемся для этого подходом, изложенным в [6]. Найдем наибольшее значение  $M^\circ$  управляющего момента  $M$  относительно заданного на плоскости  $yz$   $n$ -направления с ортом  $n = \{\alpha, \beta\}$ , и реализующие его значения  $u_1^\circ$  и  $u_2^\circ$  параметров управления.

Если  $|\alpha| \geq m_y m_z^{-1} |\beta|$ , то

$$M^\circ = \frac{m_y}{|\alpha|}, \quad u_1^\circ = \frac{\alpha}{|\alpha|}, \quad u_2^\circ = \frac{m_y}{m_z} \frac{\beta}{|\alpha|}$$

При  $|\alpha| < m_y m_z^{-1} |\beta|$

$$M^\circ = \frac{m_z}{|\beta|}, \quad u_1^\circ = \frac{m_z}{m_y} \frac{\alpha}{|\beta|}, \quad u_2^\circ = \frac{\beta}{|\beta|}$$

Если при управлении вращательным движением твердого тела рассчитанный по алгоритму (2.8) управляющий момент не принадлежит множеству  $G$ , то в качестве управления принимается момент с компонентами

$$M_y^\circ = m_y u_1^\circ, \quad M_z^\circ = m_z u_2^\circ$$

в которых  $u_1^\circ$  и  $u_2^\circ$  — параметры управления, реализующие наибольшее значение  $M^\circ$  располагаемого момента относительно  $n$ -направления с ортом

$$n = \{M_y / \|M\|, M_z / \|M\|\}$$

Отметим, что при  $M_y = M_y^0$ ,  $M_z = M_z^0$

$$V_1 = \gamma_* y' S y, \quad \gamma_* = M^0 / \|M\|$$

что при  $S < 0$  гарантирует стремление системы к положению равновесия (1.6).

Управляя процессом одноосной ориентации вращающегося твердого тела, алгоритм (3.3) представим в виде суммы двух слагаемых

$$M = M_1(Z) + M_2(X)$$

Предполагается, что первое из них при произвольной ориентации объекта удовлетворяет условию

$$M_1(Z) = \mu P Z \in G$$

Вторую составляющую момента (4.1) будем вычислять по формуле

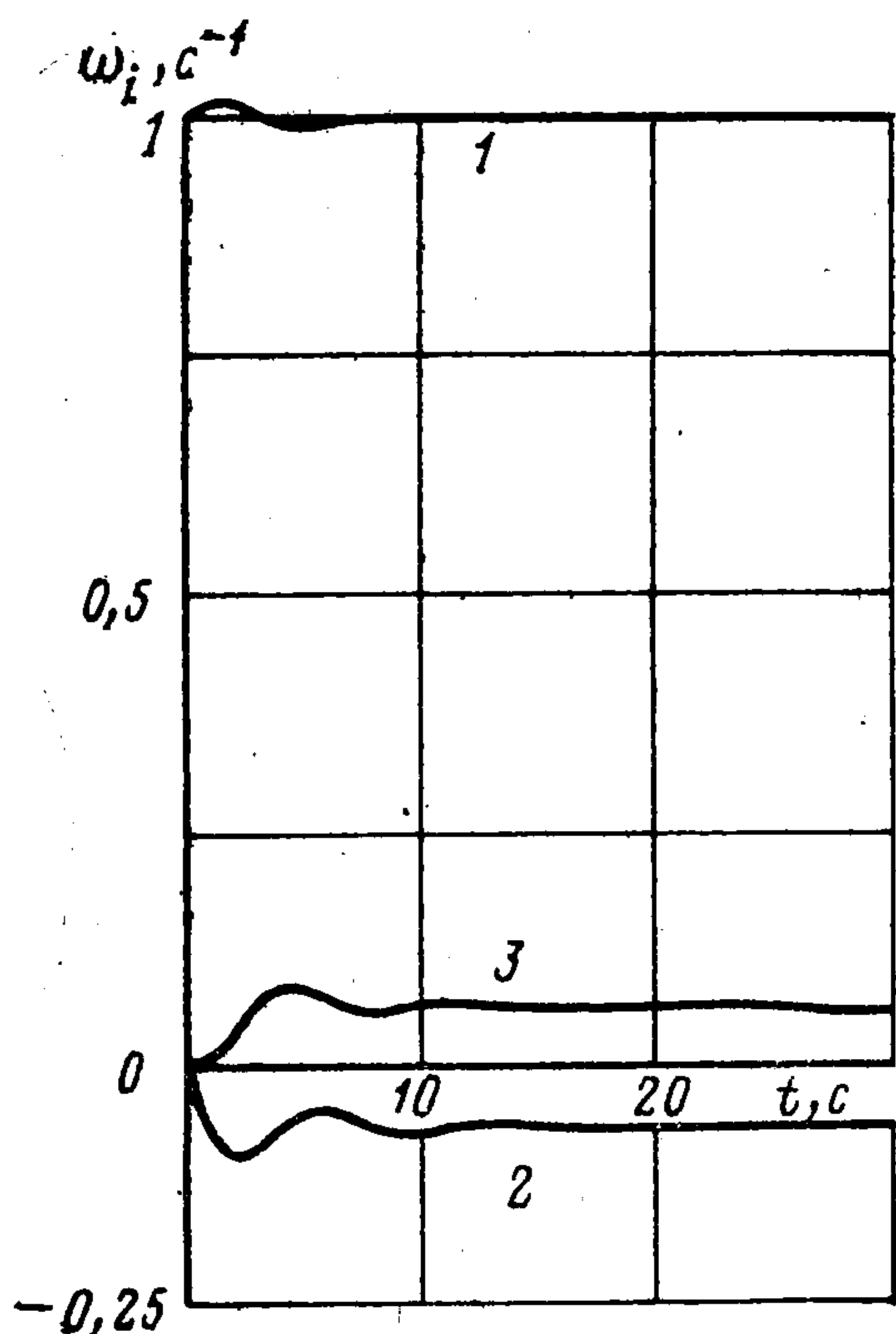
$$M_2(X) = \kappa_* k Q X$$

где  $\kappa_*$  — наибольшее значение параметра  $\kappa$  из диапазона  $0 < \kappa \leq 1$ , при котором

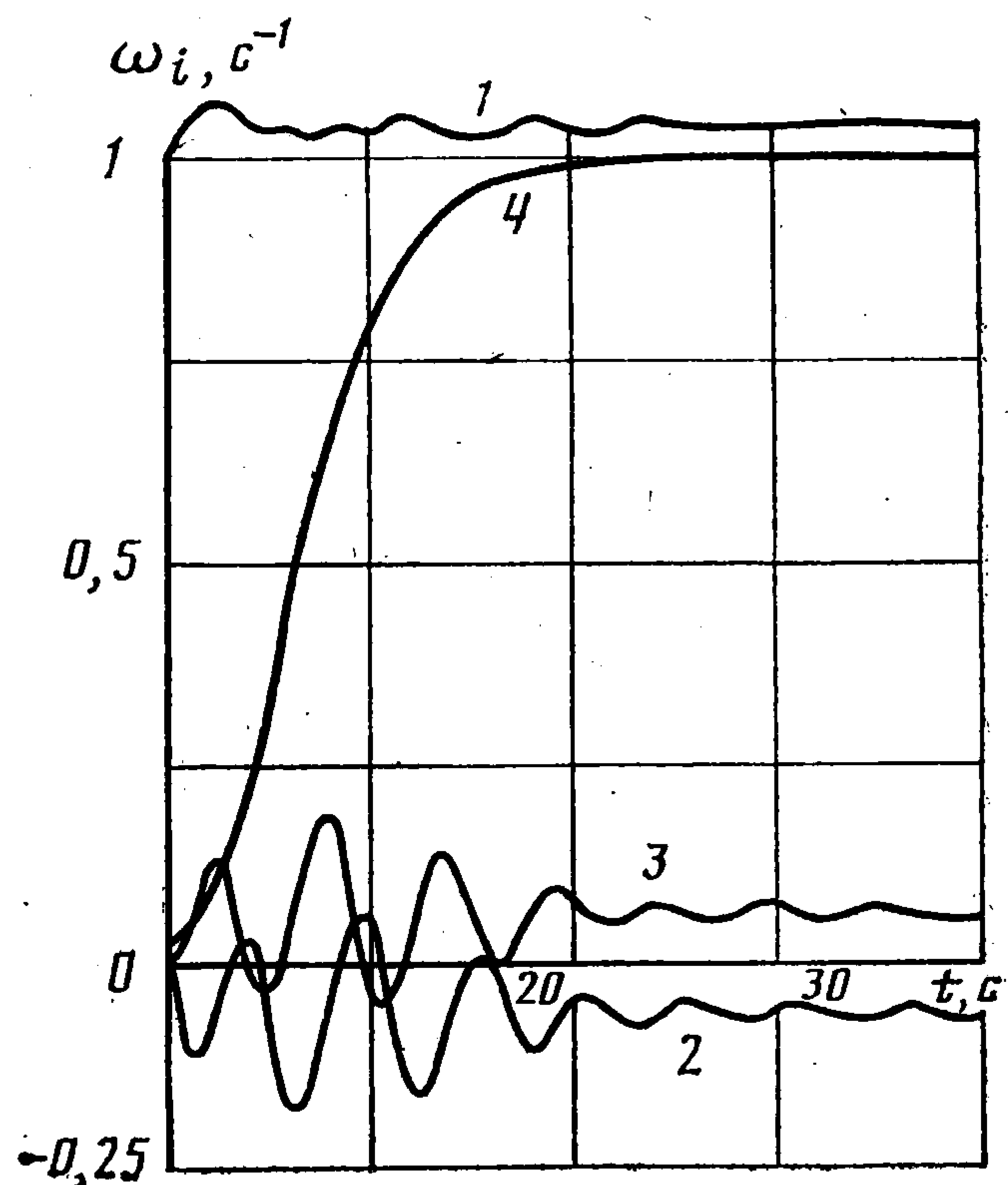
$$M = M_1(Z) + \kappa_* k Q X \in G$$

Повторяя приведенные в п. 3 рассуждения, можно утверждать, что при таком формировании управляющего воздействия система (1.1), (1.2) стремится к положению равновесия (1.7).

5. Примеры. Типичны характер изменения угловых скоростей  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  и косинуса угла между осями  $\xi$  и  $\eta$  при управлении равномерным вращением твердого тела относительно главной оси инерции и одноосной ориентацией объекта по алгоритмам (2.8) и (3.9) можно проследить на фиг. 4 и 5 соответственно (обозначения соответствуют принятым на фиг. 2 и 3).



Фиг. 4



Фиг. 5

Моделирование проводилось при тех же значениях параметров эллипсоида инерции, что и в п. 1. Углом  $\theta = 5^\circ$ ,  $\varphi = 45^\circ$ ,  $\psi = 0$  отвечает орт

$$\xi = \{\beta_{i1}\} = \{0,996196, -0,061617, 0,061617\}$$

главной оси инерции  $x_*$ . В выражениях (2.8), как и в алгоритме (1.4),  $k = -0,3 \cdot 10^n$  Нмс. При управлении процессом одноосной ориентации управляющие воздействия формировались при следующих значениях входящих в (3.9) параметров:  $k = -0,313 \cdot 10^n$  Нмс,  $\mu = 0,05 \cdot 10^n$  Нм.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Барбашин Е. А. Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 240 с.
2. Зубов В. И., Ермолин В. С., Сергеев С. Л., Смирнов Е. Я. Управление вращательным движением твердого тела. Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. 200 с.
3. Лебедев Д. В. О переводе твердого тела в режим установившегося вращения с заданной ориентацией оси вращения // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 3. С. 562—565.
4. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
5. Румянцев В. В., Озиранер А. С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 253 с.
6. Лебедев Д. В. К управлению трехосной ориентацией твердого тела при наличии ограничений на параметры управления // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 3. С. 545—551.

Киев

Поступила в редакцию  
12.VII.1988