$h/l = 1$, $h/l = 0{,}25$ будут соответственно

$$\omega_{10} = 0{,}54 l^{-1/2}, \quad \omega_{10} = 0{,}43 l^{-1/2}$$

Сравнение с точным значением показывает, что собственная частота в оценках занижается примерно в три раза. Для канала цилиндрической формы диаметра l с глубиной жидкости $h = l/2$ приближенное расчетное значение первой собственной частоты $\omega_1 \approx 1{,}4 l^{-1/2}$ [2]. Оценка снизу получается, если взять в качестве вспомогательных звездных областей два сектора радиусом $l/2$ с центральным углом $\pi/2$. Тогда на основании (2.15), (3.5) $\varkappa = 6{,}57 l$ и оценка снизу для частоты равна $\omega_{10} = 0{,}4 l^{-1/2}$.

Выбирая более оптимальным образом систему звездных областей, на которые разбивается данная область, можно уменьшить значение величины $\varkappa$ и тем самым приблизить оценку снизу к величине самой частоты.

Практическое использование указанных оценок может быть целесообразным, когда рассматриваемая область имеет сложную форму, а величина первой собственной частоты выступает в качестве одного из ограничений (не обязательно главного) при проектировании конструкции. При этом оптимальный вариант конструкции можно выбирать, вводя ограничение не для самой частоты, а для ее оценки снизу. Это существенно упрощает проведение оптимальных расчетов, так как для оценки получаются несложные алгебраические формулы, а разница между частотой и ее оценкой снизу может обеспечивать запас устойчивости конструкции. Оценку снизу можно также использовать при проведении предварительных приближенных расчетов и тестировании программ численного решения задач о колебаниях жидкости, которые должны давать значение первой собственной частоты, превышающее ее оценку, полученную по теореме 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 439 с.
2. *Моисеев Н. Н., Петров А. А.* Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости. М.: ВЦ АН СССР, 1966. 269 с.
3. *Луковский И. А., Барняк М. Я., Комаренко А. Н.* Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости. Киев: Наук. думка, 1984. 228 с.
4. *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. М.: Наука, 1968. 648 с.
5. *Тараканов В. И.* О значениях постоянных в неравенствах, дающих априорные оценки в L_2 решения краевой задачи Неймана для уравнения Лапласа // Изв. вузов. Математика. 1986. № 5. С. 68—73.

Томск

Поступила в редакцию 21.VI.1988

УДК 539.3

М. А. Рвачев

О СТАТИЧЕСКИ ВОЗМОЖНЫХ ПОЛЯХ В ОДНОСВЯЗНЫХ ОБЪЕМАХ

Определяется общее непрерывно-дифференцируемое решение системы уравнений

$$\nabla \cdot \mathrm{T} = 0 \text{ в } V \subset R^3, \quad \nu \cdot \mathrm{T} = 0 \text{ на } \partial V \tag{0.1}$$

где ν — нормаль к ∂V (граница ∂V односвязна). Если T — вектор, то полученное решение представляет общий вид поля скоростей при течении несжимаемой жидкости в замкнутом объеме. Если же T — симметричный тензор второго ранга, то это решение дает общий вид статически возможного поля напряжений в теле, поверхность которого свободна от нагрузок (например, температурных или остаточных напряжений). Полученное решение может быть использовано также для построения допускаемых вариаций поля напряжений при численном решении краевых задач теории упругости в напряжениях. Все рассматриваемые далее тензорные, векторные и скалярные функции предполагаются гладкими, т. е. имеющими непрерывные производные всех используемых порядков.

1. Пусть $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ — векторное поле, определенное на $V_1 \supset V$ и функция $\omega = \omega(\mathbf{x})$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\omega(\mathbf{x}) > 0,\ \mathbf{x} \in \operatorname{int} V;\ \omega(\mathbf{x}) = 0,\ \partial\omega/\partial\nu \neq 0,\ \mathbf{x} \in \partial V;\ \omega(\mathbf{x}) < 0,\ \mathbf{x} \overline{\in} V \cup \partial V \quad (1.1)$$

Можно показать существование функций ω, удовлетворяющих условию (1.1) для области V с гладкой границей ∂V. Однако с точки зрения конструктивности приводимых ниже общих решений важно иметь формулы для вычисления ω. Методы построения таких формул для областей практически произвольной формы рассмотрены в [1].

Лемма. Пусть ограниченная на V_1 функция $f = f(\mathbf{x})$ такова, что

$$\nabla^k f = \underbrace{\nabla(\ldots\nabla}_{k\ \text{раз}}(\nabla f)\ldots) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

(где $\nabla^0 f = f$) на гладкой поверхности ∂V, и функция ω удовлетворяет условиям (1.1). Тогда $f = \omega^{n+1} g$, где функция g также ограничена в V_1.

Доказательство леммы следует из обобщенной формулы Тейлора [1]. Отметим, что лемма верна и в случае, когда f, g — векторные или тензорные функции.

Теорема 1. Пусть поверхность ∂V гладкая и односвязная, функция ω удовлетворяет условиям (1.1). Тогда $\mathbf{u} = \mathbf{T}$ — решение системы (0.1) в том и только том случае, когда

$$\mathbf{u} = \nabla \times (\omega \mathbf{p}) \quad (1.2)$$

для некоторого векторного поля $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{x})$.

Доказательство. Если функция $\mathbf{u}$ определена формулой (1.2), то выполнение равенств (0.1) проверяется подстановкой.

Докажем необходимость. В силу первого равенства (0.1) функция $\mathbf{u}$ представляется в виде $\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{q}$ для некоторого $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{x})$. Из второго равенства (0.1) находим: $\nu \cdot (\nabla \times \mathbf{q}) = 0$ на ∂V. Интегрируя это равенство по поверхности $S \subset \partial V$ и применяя теорему Стокса, получаем

$$0 = \iint_S \nu \cdot \mathbf{u}\, ds = \iint_S \nu \cdot (\nabla \times \mathbf{q})\, ds = \iint_S d\mathbf{s} \cdot (\nabla \times \mathbf{q}) = \oint_L d\mathbf{x} \cdot \mathbf{q} \quad (1.3)$$

где последний интеграл берется по контуру L, ограничивающему S. Из этого и односвязности ∂V следует, что $\oint d\mathbf{x} \cdot \mathbf{q} = 0$ для любого замкнутого контура, лежащего на ∂V. Поэтому интеграл

$$h(M_1) = \int_{MM_1} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{q} \quad (1.4)$$

по кривой MM_1, лежащей на ∂V, зависит только от положения начала M и конца M_1 кривой MM_1; при фиксированной точке M формула (1.4) определяет однозначную функцию $h(M_1)$ на ∂V.

Продолжим $h(M_1)$ до функции, определенной на всей области V_1, так чтобы

$$\partial h/\partial \nu = \nu \cdot \mathbf{q} \text{ на } \partial V \quad (1.5)$$

и положим $\mathbf{r} = \mathbf{q} - \nabla h$. Из (1.4), (1.5) следует, что $\nabla h = \mathbf{q}$ на ∂V, поэтому $\mathbf{r} = 0$ на ∂V, и по лемме $\mathbf{r} = \omega \mathbf{p}$. Кроме того, $\nabla \times (\omega \mathbf{p}) = \nabla \times \mathbf{r} = \nabla \times (\mathbf{q} - \nabla h) = \nabla \times \mathbf{q} = \mathbf{u}$, что и требовалось.

Формула (1.2) при произвольном $\mathbf{p}$ дает общее выражение для скорости течения несжимаемой жидкости в объеме V, ограниченном непроницаемыми стенками ∂V, при условии односвязности и гладкости ∂V. Как видно из доказательства, в случае многосвязной границы ∂V в виде (1.2) можно получить те и только те поля скоростей, для которых выполняется условие (1.3), т. е. поток жидкости через любой лежащий на ∂V замкнутый контур равен нулю.

Предположим, что поверхность ∂V двусвязна, L — замкнутая кривая на ∂V, не стягиваемая по ∂V в точку, $S \subset V$ — натянутая на L поверхность, и что известно частное решение $\mathbf{u}_0$ системы (0.1), такое, что $\iint_S d\mathbf{s} \cdot \mathbf{u}_0 \neq 0$. Общее решение системы (0.1) в этом случае можно получить в виде $C\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}$, где C — произвольная постоянная, а функция $\mathbf{u}$ определена по (1.2).

Например, скорость несжимаемой жидкости, текущей в замкнутом торе $V = \{\mathbf{x} \mid \omega(\mathbf{x}) \geqslant 0\}$, где $\omega(\mathbf{x}) = 1 - x_3^2 - (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2)^2$, может быть получена в виде $\mathbf{u} = C\mathbf{u}_0 + \nabla \times (\omega\mathbf{p})$, где $\mathbf{u}_0 = (-x_2, x_1, 0)$, постоянная C и векторная функция $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ произвольны.

Формулировка и доказательство теоремы 1 полностью сохраняются в случае, когда $\mathbf{u}$ и $\mathbf{p}$ — тензоры второго ранга.

2. Пусть $\mathbf{T} = \mathbf{T}^* = \mathbf{T}(\mathbf{x})$ — симметричный тензор второго ранга, определенный для $\mathbf{x} \in V_1$. Рассматривается задача об отыскании общего решения системы уравнений (0.1).

Симметричный тензор $\mathbf{T}$ можно рассматривать как тензор напряжений в сплошной среде, тогда первое уравнение (0.1) является дифференциальным уравнением равновесия среды, а второе уравнение (0.1) означает отсутствие поверхностных нагрузок.

Теорема 2. Пусть поверхность ∂V гладкая и односвязная, функция ω удовлетворяет условию (1.1). Тогда $\mathbf{T}$ — решение системы (0.1) в том и только том случае, когда

$$\mathbf{T} = \operatorname{Ink}(\omega^2\mathbf{R}) = \nabla \times (\nabla \times (\omega^2\mathbf{R}))^* \tag{2.1}$$

для некоторого симметричного тензорного поля $\mathbf{R}$.

Доказательство. Симметричное тензорное поле $\mathbf{T}$ является решением первого уравнения (0.1) тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{T} = \operatorname{Ink} \mathbf{Q} \tag{2.2}$$

для некоторого симметричного тензора $\mathbf{Q}$ [2]. Поэтому, если тензор $\mathbf{T}$ определен формулой (2.1), то первое равенство (0.1) выполнено. Кроме того, вычисляя тензор (2.1) при учете условий (1.1), получаем

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{T} = \mathbf{v}\cdot(-2\nabla\omega \times (\mathbf{R}^* \times \nabla\omega)) = 0 \quad \text{на} \quad \partial V$$

так как $\mathbf{v} \parallel \nabla\omega$.

Таким образом, достаточность доказана.

Докажем необходимость. Пусть $\mathbf{T}$ удовлетворяет уравнениям (0.1) и тензор $\mathbf{Q}$ определен из (2.2). Из (2.2) и второго уравнения (0.1), применяя формулу Стокса, получаем

$$\oint_L d\mathbf{x}\cdot(\nabla \times \mathbf{Q})^* = \iint_S d\mathbf{s}\cdot(\nabla \times (\nabla \times \mathbf{Q})^*) = \iint_S ds\mathbf{v}\cdot\mathbf{T} = 0$$

$$\begin{aligned}\oint_L d\mathbf{x}\cdot(\mathbf{Q} - (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}) \times (\nabla \times \mathbf{Q}))^* &= \iint_S d\mathbf{s}\cdot(\nabla \times (\mathbf{Q} - (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}) \times (\nabla \times \mathbf{Q}))^*) = \\ &= \iint_S d\mathbf{s}\cdot(\nabla \times \mathbf{Q}^* + (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{Q})^*) \times (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}) - \nabla \times \mathbf{Q}) = \\ &= \iint_S ds\mathbf{v}\cdot(\mathbf{T} \times (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x})) = \iint_S ds\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{T}) \times (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}) = 0\end{aligned} \tag{2.3}$$

где L — замкнутый контур, ограничивающий поверхность $S \subset \partial V$, $\mathbf{x}_1$ — фиксированная, а $\mathbf{x}$ — текущая точка (по которой идет интегрирование). В силу (2.3) и односвязности ∂V интегралы

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(\mathbf{x}_1) &= \int_{MM_1} d\mathbf{x}\cdot(\nabla \times \mathbf{Q})^* \\ \mathbf{q}(\mathbf{x}_1) &= \int_{MM_1} d\mathbf{x}\cdot(\mathbf{Q} - (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}) \times (\nabla \times \mathbf{Q}))^*\end{aligned} \tag{2.4}$$

по кривой $MM_1 \subset \partial V$, где $M_1 = M_1(\mathbf{x}_1)$, при фиксированной точке M определяют однозначные векторные функции $\mathbf{p}(\mathbf{x}_1)$ и $\mathbf{q}(\mathbf{x}_1)$ на ∂V. Если бы формулы (2.4) определяли $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ всюду в V_1, то производная $\mathbf{q}$ по любому направлению $\mathbf{l}$ вычислялась бы дифференцированием второго интеграла (2.4):

$$\frac{\partial\mathbf{q}}{\partial\mathbf{l}} = \mathbf{l}\cdot\mathbf{Q}^* + \Big(\int_{MM_1} d\mathbf{x}\cdot(\nabla \times \mathbf{Q})^*\Big) \times \mathbf{l} = \mathbf{l}\cdot\mathbf{Q} + \mathbf{p} \times \mathbf{l} = \mathbf{l})\cdot(\mathbf{Q} - \mathbf{E} \times \mathbf{p})$$

где $\mathbf{E}$ — единичный тензор, и имели бы место формулы

$$\nabla\mathbf{q} = \mathbf{Q} - \mathbf{E} \times \mathbf{p}, \quad \nabla(\nabla\mathbf{q}) = \nabla(\mathbf{Q} - \mathbf{E} \times \mathbf{p}) \tag{2.5}$$

Но поскольку формулы (2.4) определяют $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ только на ∂V, то равенства (2.5)) вообще говоря, не верны при произвольном продолжении $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$.

Продолжим $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ на V_1 так, чтобы

$$\begin{gathered}\partial\mathbf{p}(\mathbf{x}_1)/\partial\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot(\nabla \times \mathbf{Q})^*, \quad \partial\mathbf{q}(\mathbf{x}_1)/\partial\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot(\mathbf{Q} - \mathbf{E} \times \mathbf{p}) \\ \partial^2\mathbf{q}(\mathbf{x}_1)/\partial\mathbf{v}^2 = \mathbf{v}\cdot(\mathbf{v}\cdot(\nabla(\mathbf{Q} - \mathbf{E} \times \mathbf{p})))\end{gathered} \tag{2.6}$$

при $\mathbf{x}_1 \in \partial V$. Так как производные $\mathbf{p}(\mathbf{x}_1)$, $\mathbf{q}(\mathbf{x}_1)$ по направлениям, ортогональным $\mathbf{v}$, при $\mathbf{x}_1 \in \partial V$ вполне определены интегралами (2.4), а производные (2.6) согласованы с равенствами (2.5), то при таком продолжении правила дифференцирования (2.5) справедливы на ∂V.

Рассмотрим теперь симметричный тензор $\operatorname{def} \mathbf{q} = {}^1/_2 (\nabla \mathbf{q} + (\nabla \mathbf{q})^*)$ и положим $\mathbf{N} = \mathbf{Q} - \operatorname{def} \mathbf{q}$. В силу (2.5) на ∂V имеем

$$\mathbf{N} = \mathbf{Q} - {}^1/_2 (\nabla \mathbf{q} + (\nabla \mathbf{q})^*) = \mathbf{Q} - {}^1/_2 (\mathbf{Q} - \mathbf{E} \times \mathbf{p} + \mathbf{Q}^* - (\mathbf{E} \times \mathbf{p})^*) = 0$$

$$\nabla \mathbf{N} = \nabla \mathbf{Q} - {}^1/_2 (\nabla (\mathbf{Q} - \mathbf{E} \times \mathbf{p}) + \nabla (\mathbf{Q} - \mathbf{E} \times \mathbf{p})^*) = 0$$

поэтому по лемме $\mathbf{N} = \omega^2 \mathbf{R}$. Далее

$$\operatorname{Ink} (\omega^2 \mathbf{R}) = \operatorname{Ink} (\mathbf{Q} - \operatorname{def} \mathbf{q}) = \operatorname{Ink} \mathbf{Q} = \mathbf{T}$$

что и требовалось.

Формула (2.1) может быть использована при построении допускаемых вариаций поля напряжений при решении краевых задач механики деформируемого твердого тела на основании принципа Кастильяно. Однако при ее применении возникают затруднения, связанные с ограничениями на гладкость и связность границы ∂V и избыточностью представления (2.1): тензор $\mathbf{R}$ в правой части равенства (2.1) содержит шесть произвольных компонент, в то время как шесть компонент тензора $\mathbf{T}$ связаны тремя уравнениями (первое равенство (0.1)).

Для решения плоских и осесимметричных задач теории упругости разработан пакет программ, использующий вариации вида (2.1); для этих типов задач указанные затруднения удалось обойти. Проведенные вычислительные эксперименты показывают, что при решении задач в напряжениях на основании (2.1) приближенное решение сходится в напряжениях быстрее, чем при решении задач в перемещениях (также основанном на функции (1.1) и R-функциях).

Если рассматривать $\mathbf{Q}$ как тензор малых деформаций, то второе уравнение (0.1) и уравнение (2.2) будут условиями совместности деформаций на поверхности ∂V. Векторное поле $\mathbf{q}$, определенное формулами (2.4), (2.6), является при этом полем перемещений, связанным на ∂V с деформациями $\mathbf{Q}$ уравнениями Коши.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рвачев В. Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев: Наук. думка, 1982. 551 с.
2. *Лурьев А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.

Винница

Поступила в редакцию 19.I.1989