

при  $R_0 \sim H/10$ , то для  $Fr \simeq 4$  и скоростей истечения  $V_0$  имеем  $H \sim 10^{-4} V_0 (\rho g)^{-1}$ , т. е. при умеренных значениях  $V_0$  глубины  $H$  будут весьма малы. По-видимому, разумнее было бы искать экспериментальные подтверждения не для решений этой однопараметрической задачи, а для аналогичной задачи с распределенным стоком и двумя параметрами —  $Fr$  и  $R_0/H$ , для которой нет ограничений на отношение  $R_0/H$  и такой жесткой связи между  $V_0$  и  $H$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев Н. Н. О неединственности возможных форм установившихся течений тяжелой жидкости при числах Фруда, близких к единице // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 6. С. 860—864.
2. Гузевский Л. Г. Обтекание препятствий потоком тяжелой жидкости конечной глубины. // Динамика сплошной среды с границами раздела. Чебоксары: Изд-е чуваш. ун-та, 1982. С. 61—69.
3. Котляр Л. М., Тропольская О. В. Истечение струй тяжелой жидкости из отверстия в горизонтальной стенке при наличии свободной поверхности. // Тр. семинара по краевым задачам. Изд-во Казан. ун-та, 1985. Вып. 22. С. 125—132.
4. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Т. 1. М.: Физматгиз, 1963. 584 с.
5. Иванов А. Н. Гидродинамика развитых кавитационных течений. Л.: Судостроение, 1980. 236 с.
6. Амромин Э. Л., Бушковский В. А., Дианов Д. И. Развитая кавитация за диском в вертикальной трубе. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 5. С. 181—185.
7. Заборейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А. и др. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 448 с.
8. Терентьев А. Г., Афанасьев К. Е. Численные методы в гидромеханике. Чебоксары: Изд-е чуваш. ун-та, 1987. 79 с.

Ленинград

Поступила в редакцию  
23.XI.1988

УДК 532.5 : 534.1

© 1990 г.

В. И. Тараканов

#### ОЦЕНКИ СНИЗУ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ В КАНАЛАХ ПРОИЗВОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Получены оценки снизу для первой собственной частоты колебаний жидкости в канале произвольного сечения, имеющего несколько участков свободной поверхности жидкости. Рассматривается случай, когда колебания происходят в плоскости сечения канала. При этом область, занятая сечением, может быть многосвязной, а ее граница кусочно-гладкой кривой. Вывод оценок не связан с необходимостью нахождения эталонных областей и не опирается на вариационные методы [1—3].

1. Рассматривается краевая задача на собственные значения

$$\Delta U \equiv U_{,xx} + U_{,yy} = 0, \quad x, y \in D \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \omega^2 U, \quad x, y \in \Gamma_\alpha; \quad \frac{\partial U}{\partial n} = 0, \quad x, y \in \Gamma/\Gamma_\alpha \quad (1.2)$$

для многосвязной области  $D \subset R^2(x, y)$ , ограниченной кусочно-гладкой кривой  $\Gamma$ , состоящей из нескольких отдельных замкнутых кривых. Кривая  $\Gamma$  имеет  $m$  участков  $\Gamma_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , на которых задаются краевые условия, соответствующие условиям на свободной поверхности жидкости.

$$\Gamma_j : y = h_j, \quad a_j < x < b_j, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad \Gamma_\alpha = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_m$$

Предполагается возможность расположения участков свободной поверхности жидкости на разных уровнях  $y = h_j$  (например, при поддержании разного давления газов над различными участками). В общем случае отрезки  $\Gamma_j$  могут принадлежать разным замкнутым кривым контура  $\Gamma$ . Величина  $\omega$  с точностью до размерного множителя сов-

падает с собственной частотой колебаний жидкости, поэтому далее она называется просто частотой собственных колебаний жидкости.

Собственные функции задачи (1.1) ищутся в классе

$$U \in C^\infty(D) \cap C(D \cup \Gamma), \quad E \equiv \int_D (U_{,x}^2 + U_{,y}^2) d\sigma \equiv \int_\Gamma U U_{,n} ds < \infty \quad (1.3)$$

2. Рассмотрим предварительно частный случай, когда область  $D$  — звездная. Под звездной областью относительно точки  $Q(\xi, \eta) \in D$  подразумевается область, границы которой пересекаются лучом, выходящим из точки  $Q$ , только один раз и не по касательной к границе. Кроме декартовых координат вводится система полярных координат  $\rho, \varphi$  с центром в точке  $Q$ :  $x - \xi = \rho \cos \varphi, y - \eta = \rho \sin \varphi$ . Участок кривой  $\Gamma$ , заключенный между лучами  $\varphi = \beta$  и  $\varphi = \beta + \alpha$  обозначается  $\Gamma(\alpha, \beta)$ . Область  $D$  характеризуется следующими параметрами, выраженными через расстояние  $\rho$  между двумя точками  $M(x, y), Q(\xi, \eta)$ :

$$\begin{aligned} r &= \min_{x, y \in \Gamma} \rho, & R &= \max_{x, y \in \Gamma(\alpha, \beta)} \rho, & \rho &= \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \\ c &= \frac{1}{2} \frac{R}{r} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), & b &= c \frac{R}{r}, & a &= r \min_{x, y \in \Gamma(\alpha, \beta)} \rho^{-1} \cos n\rho \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\cos n\rho$  — косинус угла между нормалью к  $\Gamma$  и продолжением луча, соединяющего точки  $Q, M$ . В силу звездности области выполняется условие  $a > 0$ .

Пусть в  $D$  задана произвольная функция

$$\Phi(x, y) = U(x, y) - U(Q) \quad (2.2)$$

где  $U$  — функция из класса, определяемого соотношениями (1.1), (1.3).

*Теорема 1.* Для любой функции  $\Phi$  из класса, определяемого соотношениями (1.1), (1.3), (2.2), справедлива оценка на границе

$$\int_{\Gamma(\alpha, \beta)} \Phi^2 ds \leq \kappa E, \quad E \equiv \int_D (\Phi_{,x}^2 + \Phi_{,y}^2) d\sigma \quad (2.3)$$

$$\kappa \equiv \kappa(\alpha, \beta, Q) \equiv \frac{r}{a} \max \left\{ 3, 34 \frac{c+2b}{c+b} \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}; 4(b+c) \right\} \quad (2.4)$$

*Доказательство.* В области  $D$  выделяется круг  $\delta$  радиусом  $r$  с центром в точке  $Q$  и границей  $\gamma$ . Для производных  $|\Phi_{,x}|, |\Phi_{,y}|$  справедливо неравенство Куранта [4]

$$|\Phi_{,x}|, |\Phi_{,y}| \leq d^{-1} \sqrt{E_0/\pi}, \quad x, y \in \delta, \quad \xi, \eta \in \gamma \quad (2.5)$$

$$E_0 \equiv \int_\delta (\Phi_{,x}^2 + \Phi_{,y}^2) d\sigma \leq E$$

где  $d = d(x, y, \xi, \eta)$  — минимальное расстояние между точкой  $M(x, y)$  и кривой  $\gamma$ .

Так как неравенство (2.5) не зависит от поворота осей координат, то будет справедлива и оценка в полярных координатах

$$|\Phi_{,\rho}| \leq (r - \rho)^{-1} \sqrt{E_0/\pi}, \quad E_0 = \int_\delta (\Phi_{,\rho}^2 + \rho^{-2} \Phi_{,\varphi}^2) d\sigma \quad (2.6)$$

Из (2.6) следует оценка

$$|\Phi|^2 \equiv \left| \int_0^\rho \Phi_{,\rho} d\rho \right|^2 \leq \frac{E_0}{\pi} \ln^2 \left(1 - \frac{\rho}{r}\right), \quad 0 < \rho < r \quad (2.7)$$

Для кольцевого сектора  $\sigma \subset \delta$ ,  $\sigma: \varepsilon < \rho < r, \beta < \varphi < \beta + \alpha$  с границей  $\lambda$  можно записать интегральное тождество Грина

$$\int_\lambda \Psi_{,n} \Phi^2 ds = \int_\sigma [\Delta \Psi \Phi^2 + 2\Phi (\Psi_{,x} \Phi_{,x} + \Psi_{,y} \Phi_{,y})] d\sigma$$

где  $\Psi$  — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция. В случае, если  $\Psi$  зависит только от координаты  $\rho$ , это соотношение принимает вид

$$\int_{\gamma(\alpha, \beta)} \Psi_{,n} \Phi^2 ds + \int_{\gamma(\alpha, \beta, \varepsilon)} \Psi_{,n} \Phi^2 ds = \int_\delta [\Delta \Psi \Phi^2 + 2\Phi \Phi_{,\rho} \Psi_{,\rho}] d\sigma \quad (2.8)$$

$\gamma(\alpha, \beta) \subset \lambda, \gamma(\alpha, \beta, \varepsilon) \subset \lambda; \gamma(\alpha, \beta): \rho = r, \beta < \varphi < \beta + \alpha$   
 $\gamma(\alpha, \beta, \varepsilon): \rho = \varepsilon, \beta < \varphi < \beta + \alpha$

Полагая в соотношении (2.8)  $\Psi = \ln \rho$ , используя неравенство (2.7), соотношение (2.6) и переходя к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим оценку

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \int_{\gamma(\alpha, \beta)} \Phi^2 ds &\leq 2 \sqrt{E_0 \int \frac{1}{\rho^2} \Phi^2 d\sigma} \leq \\ &\leq 2 \sqrt{2} E_1 \left[ \int_0^1 x^{-1} \ln^2(1-x) dx \right]^{1/2} = 3,34 E_1, \quad E_1 = E_0 \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \end{aligned} \quad (2.9)$$

При выводе (2.9) используется неравенство Гельдера, а интеграл, входящий в правую часть, заменяется его численным значением.

Запишем далее интегральное тождество (2.8) для области  $G \subset D$ , ограниченной кривыми  $\Gamma(\alpha, \beta)$ ,  $\gamma(\alpha, \beta)$  и лучами  $\varphi = \beta$ ,  $\varphi = \beta + \alpha$

$$\int_{\Gamma(\alpha, \beta)} \Psi, n \Phi^2 ds + \int_{\gamma(\alpha, \beta)} \Psi, n \Phi^2 ds = \int_G [\Delta \Psi \Phi^2 + 2\Phi \Phi, \rho \Psi, \rho] d\sigma \quad (2.10)$$

При подстановке в это тождество в качестве  $\Psi$  функции  $1/4\rho^2 - 1/2r^2 \ln(\rho/r)$  и учете обозначений (2.1) имеем

$$I \leq br^2 \int_{\Gamma(\alpha, \beta)} \Phi^2 \frac{\cos n\rho}{\rho} ds + 2cr (E_2 I)^{1/2} \quad (2.11)$$

$$I = \int_G \Phi^2 d\sigma, \quad E_2 = \int_G (\Phi^2, \rho + \rho^{-2} \Phi^2, \varphi) d\sigma, \quad E_0 + E_2 \leq E \quad (2.12)$$

Если снова подставить в (2.10) в качестве  $\Psi$  функцию  $\ln \rho$  и учесть неравенство (2.9), получим

$$\int_{\Gamma(\alpha, \beta)} \Phi^2 \frac{\cos n\rho}{\rho} ds \leq 3,34 E_1 + \frac{2}{r} (E_2 I)^{1/2} \quad (2.13)$$

Из системы неравенств (2.11), (2.13) можно вывести неравенство

$$I \leq 3,34 br^2 E_1 + 2(b+c)r (IE_2)^{1/2}$$

Отсюда, решая квадратное уравнение, окончательно получим

$$I \leq (b+c)r \sqrt{E_2} + [r^2 (b+c)^2 E_2 + 3,34 br^2 E_1]^{1/2} \quad (2.14)$$

Из (2.13), (2.14) при учете обозначений (2.1) следует

$$\begin{aligned} \frac{a}{r} \int_{\Gamma(\alpha, \beta)} \Phi^2 ds &\leq 3,34 E_1 + 2(b+c) E_2 + 2[(b+c)^2 E_2^2 + 3,34 b E_1 E_2]^{1/2} \leq \\ &\leq 2[(b+c)^2 E_2^2 + 3,34 b E_1 E_2 + (3,34)^2 8^{-1} b^2 (b+c)^{-2} E_1^2]^{1/2} + 3,34 E_1 + \\ &+ 2(b+c) E_2 = 3,34(c+2b)(b+c)^{-1} E_1 + 4(b+c) E_2 \end{aligned}$$

С использованием неравенства (2.12) при этом получается результат теоремы.

На основе соотношений (2.4) параметр  $\kappa$ , входящий в оценку (2.3), для любого участка границы произвольной звездной области подсчитывается достаточно просто из геометрических соображений. Так для квадрата со стороной  $l$ , сектора в виде четверти круга диаметром  $l$ , равностороннего треугольника со стороной  $l$ , прямоугольного равнобедренного треугольника с гипотенузой  $l$  параметры  $\kappa$  имеют соответственно значения

$$\kappa = 3,4l, \quad \kappa = 4,0l, \quad \kappa = 10,3l, \quad \kappa = 22,8l \quad (2.15)$$

если точки  $Q_i$  брать в центре вписанных окружностей, а в качестве участков  $\Gamma(\alpha, \beta)$  принимать сторону квадрата, радиальную сторону сектора, сторону равностороннего треугольника, гипотенузу прямоугольного треугольника соответственно.

3. Используя теорему 1, можно получить более общий результат для произвольной, не обязательно звездной области  $D$  с границей  $\Gamma$ . Через  $\Gamma_\alpha$  обозначается произвольная часть границы  $\Gamma$ :  $\Gamma_\alpha \subset \Gamma$ . Предполагается, что в области  $D$  можно выделить  $n$  произвольных точек  $Q_i$  ( $\xi_i, \eta_i$ )  $\subset D$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  и выделить  $n$  звездных относительно точек  $Q_i$  областей  $D_i \subset D$  с границей  $\Gamma_i$ , имеющих общие точки с  $\Gamma$ , так что выполняются соотношения

$$\Gamma_\alpha = \Gamma_{1\alpha} \cup \Gamma_{2\alpha} \cup \dots \cup \Gamma_{n\alpha}, \quad \Gamma_{i\alpha} = \Gamma_i \cap \Gamma_\alpha, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.1)$$

В области  $D$  произвольно задается центральная точка  $Q_0$ , которая соединяется кривыми  $\gamma_i \in D$ , лежащими в  $D$  и не касающимися границы  $\Gamma$ , со всеми точками  $Q_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Каждой области  $D_i$  сопоставляются три параметра  $\kappa_i, l_i, q_i$ , где  $\kappa_i$  определяется для каждой звездной области  $D_i$  с помощью соотношения (2.4), причем в качестве участка границы области  $D_i$ , который фигурирует при определении  $\kappa$ , выступает участок  $\Gamma_{i\alpha}$ , а параметры  $l_i, q_i$  задаются соотношениями

$$l_i = \int_{\Gamma_{i\alpha}} ds, \quad q_i = \int_{\gamma_i} \rho^{-1}(s) ds \quad (3.2)$$

Здесь  $ds$  — элемент дуги кривой, а  $\rho(s)$  — минимальное расстояние между точками  $x(s), y(s) \in \gamma_i$  и точками кривой  $\Gamma$ . Для каждой области вводится функция  $\Phi_i = U(x, y) - U(Q_i)$ , где функция  $U$  принадлежит классу, описываемому уравнениями (1.1), (1.3). Через  $E_i$  обозначается интеграл.

$$E_i = \int_{D_i} (\Phi_{i,x}^2 + \Phi_{i,y}^2) d\sigma \equiv \int_{D_i} (U_{,x}^2 + U_{,y}^2) d\sigma \quad (3.3)$$

$$\sum_{i=1}^n E_i \leq E = \int_D (U_{,x}^2 + U_{,y}^2) d\sigma$$

*Теорема 2.* Для функции  $\Phi = U(x, y) - U(Q_0)$ , принадлежащей классу, описываемому соотношениями (1.1), (1.3), справедлива оценка

$$\int_{\Gamma_\alpha} \Phi^2 ds \leq \kappa E \quad (3.4)$$

$$\kappa = \max_i \kappa_i + 2 \sqrt{n/\pi} \max_i q_i \sqrt{l_i \kappa_i} + \pi^{-1} \sum_1^n l_i q_i^2 \quad (3.5)$$

*Доказательство.* Используя неравенство Куранта (2.5) для области  $D$  и учитывая, что оно не зависит от поворота осей координат, можно записать

$$|\Phi_{,s}| \leq \rho^{-1}(s) \sqrt{E/\pi}, \quad x(s), y(s) \in \gamma_i$$

Отсюда, учитывая обозначения (3.2), имеем

$$|\Phi(Q_i)| = \left| \int_{\gamma_i} \Phi_{,s} ds \right| \leq \int_{\gamma_i} |\Phi_{,s}| ds \leq q_i \sqrt{E/\pi} \quad (3.6)$$

Учитывая неравенства (2.3) для функций  $\Phi_i \equiv \Phi(x, y) - \Phi(Q_i)$ , можно записать

$$\int_{\Gamma_{i\alpha}} \Phi_i^2 ds \leq \kappa_i E_i \quad (3.7)$$

На основании соотношений (3.6), (3.7) получается оценка

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_\alpha} \Phi^2 ds &= \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_{i\alpha}} \Phi^2 ds = \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_{i\alpha}} [\Phi_i + \Phi(Q_i)]^2 ds \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n [\kappa_i E_i + 2q_i (l_i \kappa_i E_i E/\pi)^{1/2} + l_i q_i^2 E/\pi] \end{aligned}$$

При использовании неравенства Гельдера для суммы величин  $\sqrt{E_1} + \dots + \sqrt{E_n}$  получается вывод теоремы.

Результат теоремы в частном случае, когда  $\Gamma_\alpha = \Gamma$ , доказан [5] с другим выражением для коэффициента и для области с гладкой границей. На практике оценку (3.4), (3.5) для произвольной области можно получить, используя некоторый набор стандартных звездных областей, для которых параметр  $\kappa$  вычисляется заранее по соотношениям, приведенным в теореме 1.

4. На основании теоремы 2 и при использовании обозначений этой теоремы получается оценка снизу для первой собственной частоты колебаний жидкости.

*Теорема 3.* Первая собственная частота колебаний жидкости  $\omega_1$ , определяемая из решения задачи (1.1), (1.2), ограничена снизу величиной

$$\omega_{10} = \kappa^{-1/2}, \quad \omega_1 \geq \omega_{10}$$

где параметр  $\kappa$  определяется из соотношения (3.5), а участок границы  $\Gamma_\alpha$  является свободной поверхностью жидкости.

*Доказательство.* Из (3.4) и краевых условий задачи следует

$$\int_{\Gamma_\alpha} \Phi^2 ds \leq \kappa \int_{\Gamma} \Phi \Phi_{,n} ds = \kappa \int_{\Gamma_\alpha} \Phi \Phi_{,n} ds \leq \kappa \sqrt{\int_{\Gamma_\alpha} \Phi^2 ds} \sqrt{\int_{\Gamma_\alpha} \Phi_{,n}^2 ds}$$

$$\int_{\Gamma_\alpha} \Phi^2 ds \leq \kappa^2 \int_{\Gamma_\alpha} \Phi_{,n}^2 ds = \kappa^2 \int_{\Gamma_\alpha} U_{,n}^2 ds = \kappa^2 \omega^4 \int_{\Gamma_\alpha} U^2 ds = \kappa^2 \omega^4 \int_{\Gamma_\alpha} [\Phi + U(Q)]^2 ds \quad (4.1)$$

Кроме того, из (4.1) получаются следующие соотношения:

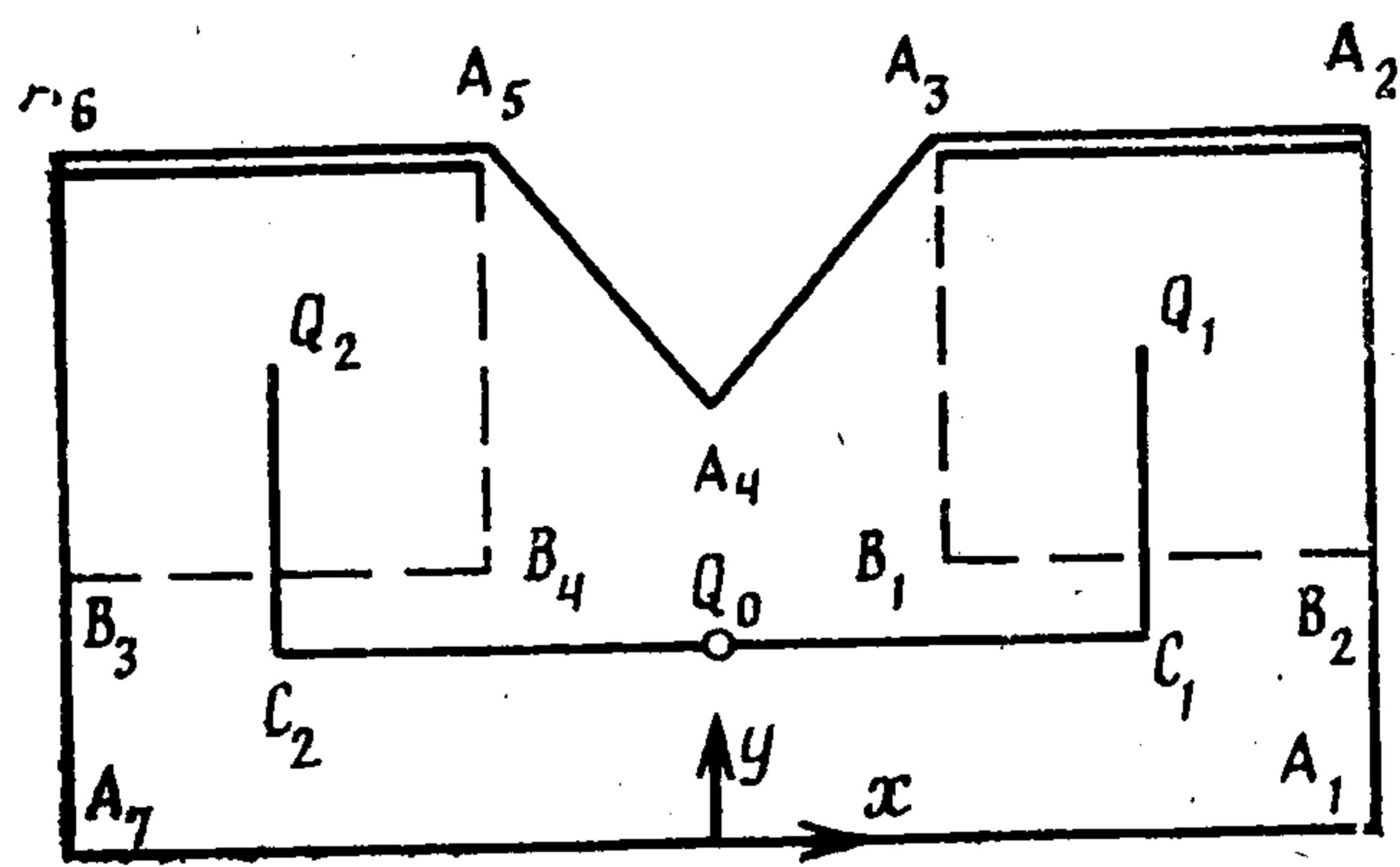
$$\int_{\Gamma} U_{,n} ds = 0, \quad \int_{\Gamma_\alpha} U ds = 0, \quad \int_{\Gamma_\alpha} \Phi ds + U(Q) \int_{\Gamma_\alpha} ds = 0$$

$$\int_{\Gamma_\alpha} [\Phi + U(Q)]^2 ds = \int_{\Gamma_\alpha} \Phi^2 ds - U^2(Q) \left( \int_{\Gamma_\alpha} ds \right)^2 \leq \int_{\Gamma_\alpha} \Phi^2 ds$$

При подстановке этого неравенства в (4.1) получается результат теоремы 3.

5. В качестве примера на рисунке показана область  $D$ , ограниченная кусочно-гладкой кривой  $A_1 A_2 \dots A_7$  с двумя участками, соответствующими свободной поверхности жидкости  $A_2 A_3$  и  $A_5 A_6$ , выделенными двойной линией. Область  $D$  симметрична относительно оси  $x = 0$ .

Точки  $A_i$  имеют координаты  $A_1 (1/2, 0)$ ,  $A_2 (1/2, h)$ ,  $A_3 (1/2 - \lambda, h)$ ,  $A_4 (0, \mu)$ ,  $A_5 (\lambda - 1/2, h)$ ,  $A_6 (-1/2, h)$ ,  $A_7 (-1/2, 0)$ . Из геометрических соображений следует  $\lambda < 1/2$ ,  $h > \mu$ . Для определенности положим  $h > \lambda$ . В области  $D$  выделяются две звездные области  $D_i$ ,  $i = 1, 2$ , являющиеся квадратами  $B_1 B_2 A_2 A_3$  и  $B_3 B_4 A_5 A_6$ , с центрами в точках  $Q_i$ :



$Q_1 (1/2 - \lambda/2, h - \lambda/2)$ ,  $Q_2 (\lambda/2 - 1/2, h - \lambda/2)$ . Характеристическая точка  $Q_0$  имеет координаты  $Q_0 (0, \mu/2)$ .

В качестве кривых  $\gamma_i$ , соединяющих точки  $Q_0$  и  $Q_i$  ( $i = 1, 2$ ), берутся кривые  $Q_0 C_1 Q_1$  и  $Q_0 C_2 Q_2$ . На основании (2.15), (3.2) и геометрических соображений получаются следующие выражения для геометрических параметров:

$$\kappa_1 = \kappa_2 = 3,4\lambda, \quad l_1 = l_2 = \lambda, \quad q_1 = q_2 = \frac{1 - \lambda}{\mu} + \frac{2h - \mu - \lambda}{\lambda}$$

Подставляя эти значения параметров в выражение (3.5), можно получить следующее алгебраическое выражение для оценки снизу первой собственной частоты:

$$\omega_1 \geq \omega_{10}, \quad \omega_{10} = \kappa^{-1/2}$$

$$\kappa = \lambda \left[ 3,4 + \frac{5,2}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1 - \lambda}{\mu} + \frac{2h - \lambda - \mu}{\lambda} \right) + \frac{2}{\pi} \left( \frac{1 - \lambda}{\mu} + \frac{2h - \lambda - \mu}{\lambda} \right)^2 \right]$$

Представляет интерес, насколько заниженной является оценка первой собственной частоты по сравнению с точным значением. Такое сравнение можно провести в задачах, для которых значение первой собственной частоты известно точно. Для канала прямоугольной формы глубиной  $h$  и шириной  $l$  точное значение первой собственной частоты равно

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\pi}{l} \operatorname{th} \frac{\pi}{l} h}$$

При отношении глубины к ширине  $h/l = 1$ ,  $h/l = 0,25$  первая собственная частота равна соответственно

$$\omega_1 = 1,77l^{-1/2}, \quad \omega_1 = 1,44l^{-1/2}$$

Для варианта  $h/l = 1$  в качестве вспомогательной звездной области можно взять квадрат со стороной  $l$  и на основании (2.15) будет выполняться:  $\kappa = 3,4l$ . Для варианта  $h/l = 0,25$  в качестве вспомогательных звездных областей можно взять четыре квадрата со сторонами  $l/4$ , точку  $Q_0$  в центре прямоугольника, точки  $Q_i$  в центре квадратов, а в качестве кривых  $\gamma_i$  — прямолинейные отрезки, соединяющие точки  $Q_0$  и  $Q_i$ . При этом  $\kappa = 5,44l$ . Таким образом, оценки снизу для собственных частот при отношениях

$h/l = 1$ ,  $h/l = 0,25$  будут соответственно

$$\omega_{10} = 0,54l^{-1/2}, \quad \omega_{10} = 0,43l^{-1/2}$$

Сравнение с точным значением показывает, что собственная частота в оценках занижается примерно в три раза. Для канала цилиндрической формы диаметра  $l$  с глубиной жидкости  $h = l/2$  приближенное расчетное значение первой собственной частоты  $\omega_1 \approx 1,4l^{-1/2}$  [2]. Оценка снизу получается, если взять в качестве вспомогательных звездных областей два сектора радиусом  $l/2$  с центральным углом  $\pi/2$ . Тогда на основании (2.15), (3.5)  $\kappa = 6,57l$  и оценка снизу для частоты равна  $\omega_{10} = 0,4l^{-1/2}$ .

Выбирая более оптимальным образом систему звездных областей, на которые разбивается данная область, можно уменьшить значение величины  $\kappa$  и тем самым приблизить оценку снизу к величине самой частоты.

Практическое использование указанных оценок может быть целесообразным, когда рассматриваемая область имеет сложную форму, а величина первой собственной частоты выступает в качестве одного из ограничений (не обязательно главного) при проектировании конструкции. При этом оптимальный вариант конструкции можно выбирать, вводя ограничение не для самой частоты, а для ее оценки снизу. Это существенно упрощает проведение оптимальных расчетов, так как для оценки получаются несложные алгебраические формулы, а разница между частотой и ее оценкой снизу может обеспечивать запас устойчивости конструкции. Оценку снизу можно также использовать при проведении предварительных приближенных расчетов и тестировании программ численного решения задач о колебаниях жидкости, которые должны давать значение первой собственной частоты, превышающее ее оценку, полученную по теореме 3.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 439 с.
2. Моисеев Н. Н., Петров А. А. Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости. М.: ВЦ АН СССР, 1966. 269 с.
3. Луковский И. А., Барняк М. Я., Комаренко А. Н. Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости. Киев: Наук. думка, 1984. 228 с.
4. Гурлиц А., Курант Р. Теория функций. М.: Наука, 1968. 648 с.
5. Тараканов В. И. О значениях постоянных в неравенствах, дающих априорные оценки в  $L_2$  решения краевой задачи Неймана для уравнения Лапласа // Изв. вузов. Математика. 1986. № 5. С. 68—73.

Томск

Поступила в редакцию  
21.VI.1988

УДК 539.3

© 1990

М. А. Рвачев

#### О СТАТИЧЕСКИ ВОЗМОЖНЫХ ПОЛЯХ В ОДНОСВЯЗНЫХ ОБЪЕМАХ

Определяется общее непрерывно-дифференцируемое решение системы уравнений

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = 0 \text{ в } V \subset R^3, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} = 0 \text{ на } \partial V \quad (0.1)$$

где  $\mathbf{v}$  — нормаль к  $\partial V$  (граница  $\partial V$  односвязна). Если  $\mathbf{T}$  — вектор, то полученное решение представляет общий вид поля скоростей при течении несжимаемой жидкости в замкнутом объеме. Если же  $\mathbf{T}$  — симметричный тензор второго ранга, то это решение дает общий вид статически возможного поля напряжений в теле, поверхность которого свободна от нагрузок (например, температурных или остаточных напряжений). Полученное решение может быть использовано также для построения допускаемых вариаций поля напряжений при численном решении краевых задач теории упругости в напряжениях. Все рассматриваемые далее тензорные, векторные и скалярные функции