

Э. Л. Амромин, М. А. Басин, В. А. Бушковский

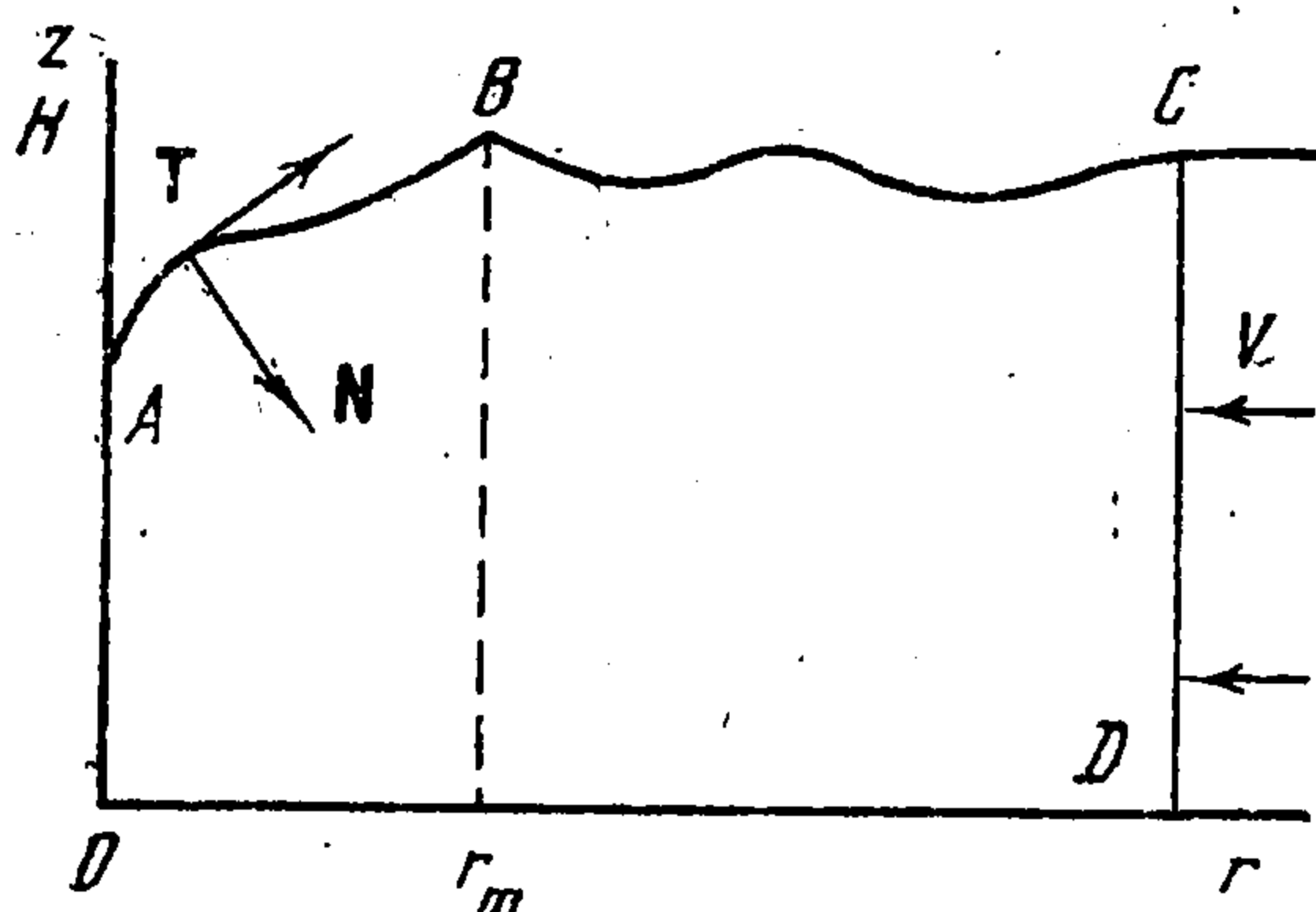
## ДВА РЕШЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ О ПРЕДЕЛЬНЫХ ВОЛНАХ НА ПОВЕРХНОСТИ ВЕСОМОЙ ЖИДКОСТИ

Приводится пример неединственности решения стационарной задачи о волнах в сосуде с источником или стоком на дне. Определен диапазон чисел Фруда, в котором существуют два решения; в одном из них имеются волны типа предельной стоксовской. Описан численный метод решения нелинейных волновых задач.

Неединственность решений некоторых нелинейных задач о волнах на поверхности весоной жидкости конечной глубины предсказывалась еще в [1]. Позднее был найден пример такой плоской задачи: рассчитано [2] образование уединенных волн при обтекании выступа на дне канала, причем одному и тому же числу Фруда  $Fr$ , построенному по глубине невозмущенного потока, соответствовали два решения; но зависимости характеристик потока от другого параметра — скорости на гребне волны  $v_m$  — однозначны.

В настоящей работе удалось построить пример неединственности решения для предельного случая нелинейности волн ( $v_m \equiv 0$ ) в некотором диапазоне  $Fr$ .

1. В качестве модельных задач теории течений со свободными границами осесимметричные наиболее предпочтительны, поскольку сочетают примерно такие же малые, как и в плоских задачах, объемы вычислений с более быстрым (пространственным)



Фиг. 1

затуханием возмущений. Здесь рассматривается стационарная модельная задача о течении в сосуде весоной идеальной несжимаемой жидкости, вытекающей через расположенное на оси симметрии отверстие.

Схему течения поясняет фиг. 1, на которой изображена полуплоскость  $z, r$  меридионального сечения сосуда. Сила тяжести направлена параллельно оси  $z$ ; жидкость занимает сосуд с дном и боковой поверхностью, имеющими сечения  $OD$  и  $DC$  соответственно; сверху жидкость ограничена свободной поверхностью с сечением заранее

неизвестной формы. Сосредоточенный сток обильности  $Q^*$  расположен в начале координат — точке  $O$ ; его компенсирует кольцо источников на  $DC$ , вследствие чего течение стационарно.

Эта гидродинамическая задача сводится к типичной в теории волн нелинейной краевой задаче для гармонической функции — потенциала скорости  $\Phi$

$$\Delta\Phi = 0, (\nabla\Phi, N)|_S = V \quad (1.1)$$

$$(\nabla\Phi, \nabla\Phi) + 2gz|_{AC} = \text{const} \quad (1.2)$$

Здесь  $g$  — ускорение свободного падения,  $N$  — нормаль к границе потока  $S$ , скорость протекания жидкости через эту границу  $V$  отлична от нуля только в точке  $O$  и на  $DC$ .

2. Изображенная на фиг. 1 схема соответствует лишь одному из решений задачи (1.1), (1.2). Наряду с таким решением с «воронкой» и угловой точкой при вершине волны наибольшей амплитуды возможны и другие. Второй схеме соответствует поднятие свободной поверхности на высоту  $H$  на оси симметрии и затухание  $U = |\nabla\Phi|$  при росте  $r$ . В третьей схеме это поднятие сочетается с неубыванием скорости при  $r \rightarrow \infty$ , но, в отличие от плоской задачи [3], в осесимметричной задаче для этой схемы  $z \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ .

Рассматривая форму свободной поверхности с изломом, надо знать угол при вершине волны. Поскольку из интеграла Бернулли следует

$$U = \sqrt{2g(H - z)} \quad (2.1)$$

то в окрестности вершины при  $|z - H| \ll H/2, r \sim H$

$$\left| \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right| < \frac{U}{r} = \frac{\sqrt{2g(H - z)}}{r} \ll \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2(H - z)}} = \frac{\partial U}{\partial z} \sim \left| \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \right|$$

Поэтому можно для качественного анализа течения вблизи вершины использовать аппарат плоской теории — конформное отображение. При отображении угла  $\alpha$  с вершиной в точке  $\{z = H, r = r_m\}$  на полуплоскость  $\zeta$  имеет место [4]  $z_1^\pi \sim \zeta^\alpha$ , а для комплексной скорости  $dW/dz_1 = (dW/d\zeta) (dz_1/d\zeta)^{-1} \sim (H - z)^\pi/\alpha - 1$ . Вследствие же (2.1)  $dW/dz_1 \sim (H - z)^{1/2}$ ,  $\alpha = 2\pi/3$ .

В рассматриваемой задаче находящиеся вблизи свободной поверхности частицы жидкости движутся относительно различных фаз неподвижной в пространстве волны, подобно тому, как это происходит с корабельными волнами за неподвижной моделью судна в гидротомке. Течение здесь, вообще говоря, зависит от двух параметров: числа Фруда  $Fr = Q^* H^{-5/2} (2g\rho)^{-1/2}$  и отношения  $\xi_c = r_c/H$  ( $\rho$  — плотность жидкости,  $r_c$  — радиус сосуда), но во всех представленных расчетах фиксировалась величина  $1/\xi_c = 0,06$ , т. е. фактически решалась однопараметрическая задача.

3. Ниже реализовано предложение [5] модифицировать для волновых задач успешно применяемые в нелинейной теории кавитационных течений численные методы [5, 6]: здесь нелинейность задачи также обусловлена наличием заранее неизвестной свободной границы жидкости. При любой форме  $AC$  задача (1.1) имеет единственное решение, но, чтобы, кроме того, удовлетворить (1.2), надо подобрать соответствующую форму  $AC$ . Для этого здесь используется процесс последовательных приближений, аналогичный методу Ньютона для систем трансцендентных уравнений: решив для некоторого начального приближения к свободной границе  $AC$  задачу (1.1), вычисляют невязку в (1.2); выбрав независимые переменные для описания формы свободной границы, ищут обращающие в нуль невязку предположительно малые возмущения переменных; по возмущенным значениям воссоздают новую границу, снова решают для нее задачу (1.1) и так до тех пор, пока невязка (1.2) не станет всюду на  $AC$  пренебрежимо малой.

В процессе последовательных приближений решение задачи (1.1) не связано с принципиальными трудностями — при соответствующем увеличении используемых ресурсов ЭВМ, производные  $\Phi$  на  $S$  могут быть определены с большой точностью. Для этого удобно свести их вычисление к двум операциям: отысканию плотности  $Q$  потенциала простого слоя  $\Phi_1 = \Phi - Q^* (2\pi R^*)^{-1}$  из интегрального уравнения Фредгольма второго рода [7], имеющего вне угловых точек  $S$  вид

$$Q + \frac{1}{2\pi} \iint_S Q \frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{R} dS = - \frac{Q^*}{2\pi} \frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{R^*} \quad (3.1)$$

и зависящий от угла коэффициент при первом члене (3.1) в этих точках [8], и вычислению компонент скорости по формуле Кулона

$$\nabla\Phi = \frac{1}{4\pi} \nabla \left( \frac{Q^*}{R} + \iint_S \frac{Q}{R} dS \right). \quad (3.2)$$

Здесь  $R^*$  — расстояние от контрольной точки на  $S$  до начала координат,  $R$  — расстояние от контрольной до произвольной точки  $S$ .

При коррекции формы  $S$  следует связать направленные вдоль  $N$  ее деформации  $h$  с определяющими невязку (1.2) возмущениями компонент  $\nabla\Phi$ . Пусть  $S_1$  — исходная, а  $S_2$  — откорректированная форма  $AC$ . Возмущение компонент скорости происходит как из-за оттеснения линий тока от  $S_1$  на расстояние  $h$  и поворота нормали к ним (т. е. изменения орта  $N$  на малую величину  $n$ ), так и вследствие возмущения плотности  $Q$  потенциала простого слоя  $\Phi_1$  на малую величину  $q$  (источники обильностей  $Q$  и  $q$  распределены по известной поверхности  $S_1$ ). Можно записать разложения для компонент  $\nabla\Phi$  на  $S_2$ , сохраняя в них только члены не выше первого порядка малости и обозначив через  $T$  орт касательной к  $S_1$

$$\begin{aligned} (\nabla\Phi, N) &= \frac{\partial\Phi}{\partial N} \{Q + q\} |_{S_1} + h \frac{\partial^2\Phi}{\partial N^2} \{Q\} |_{S_1} \\ (\nabla\Phi, T) &= \frac{\partial\Phi}{\partial T} \{Q + q\} |_{S_1} + h \frac{\partial^2\Phi}{\partial N\partial T} \{Q\} |_{S_1} \end{aligned} \quad (3.3)$$

На  $AC$  выполнены граничные условия из (1.1) для  $\Phi \{Q\}$ ,  $n = -dh/\partial T$ . После подстановки (3.3) в граничные условия (1.1) и (1.2) на  $S_2$  с учетом возмущения архимедовой силы получим

$$\frac{\partial\Phi}{\partial N} = -\partial(hU)/\partial T \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial T} + N_z \sqrt{gh} / \sqrt{2(H-z)} + \kappa Uh = \sqrt{2g(H-z)} - U \quad (3.5)$$

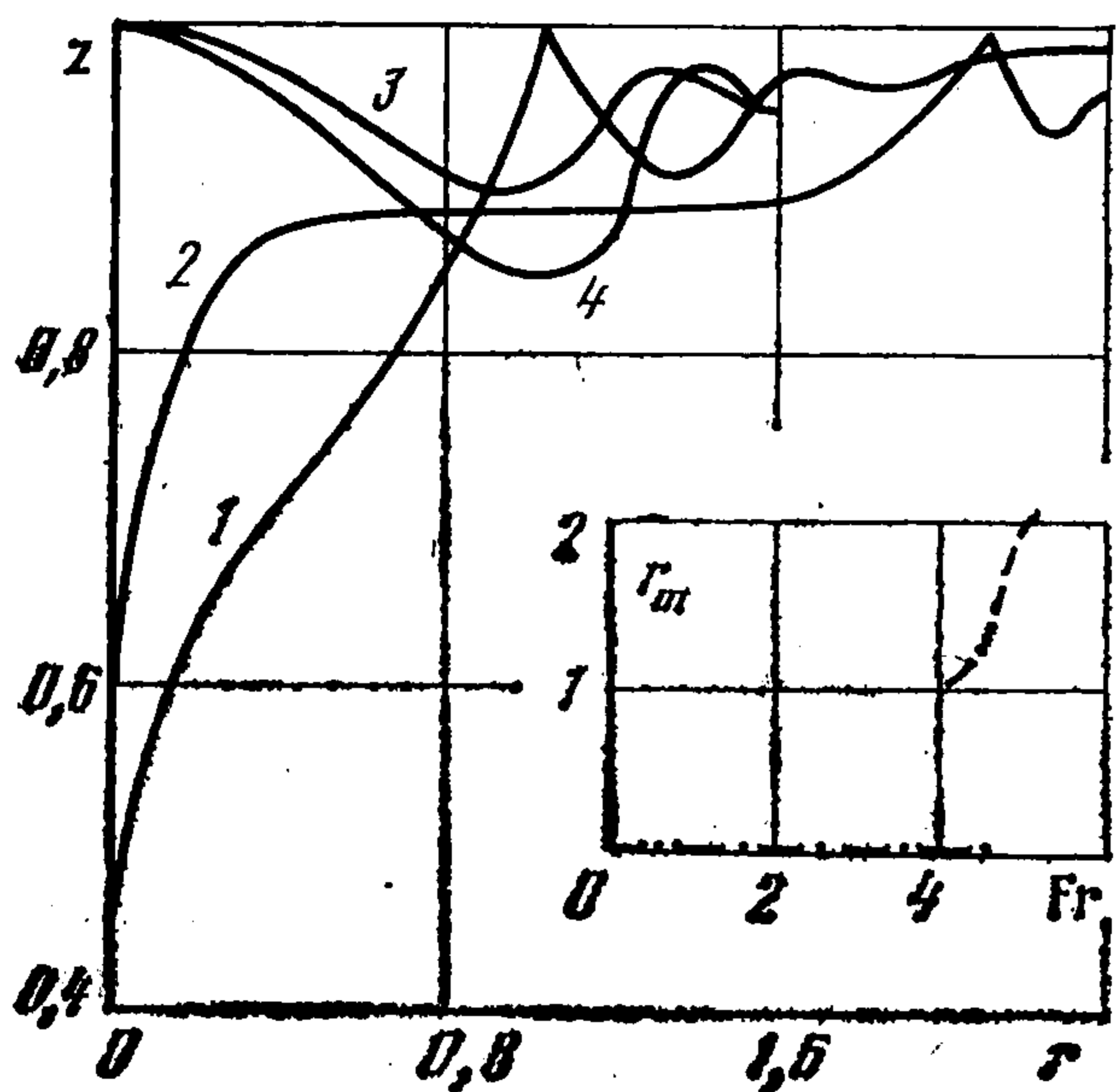
Здесь  $\varphi = \Phi\{q\}$ ,  $\kappa$  — кривизна  $AC$ ,  $N_z$  — компонента  $N$  (от связанных с нормалью декартовых координат к криволинейным координатам (3.4), (3.5) можно преобразовать по известным [4] правилам). Соотношения (3.4), (3.5) дают после исключения  $q$  линейную связь между невязкой (1.2) и  $h$ , причем используемые в (3.4), (3.5) линейные операторы на  $S_1$  вычислены уже при определении  $Q$  и  $U$  с помощью формул (3.1), (3.2). При коррекции  $AC$  сначала определяется  $q$  из (3.5), а затем отыскивается  $h$  из обыкновенного дифференциального уравнения (3.4).

Свободная поверхность для схемы с изломом делится на две части — «воронку»  $AB$  и «зеркало»  $BC$ . При отыскании  $q$  из (3.5) на  $AB$  используется описанный в [5, 6] метод: из  $\partial\varphi/\partial T$  выделяется определенный на  $AB$  интеграл Коши плотности  $q/2$ , и после его обращения [7] в классе ограниченных на концах дуги функций (3.5) преобразуется в удобное для численного решения интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно  $q$ . Затем из необходимого для существования ограниченного решения условия [7] извлекается соответствующее значение параметра  $Fr$ . Для такого решения  $q(A) = q(B) = 0$ .

Надо также учесть, что в окрестности точки  $B$  вследствие равенства (2.1) должно быть  $h(B) = 0$ . Поэтому интегрирование уравнения (3.4) на  $AB$  производится от точки  $B$ , и в ее малой окрестности для  $U$  используется асимптотика (2.1), а не вычисленное по (3.2) значение. Из (3.4) в общем случае получается  $h(A) \neq 0$ , и во избежание разрыва  $S$  дуга  $AC$  перед началом следующего приближения переносится параллельно оси  $z$  на расстояние  $h(A)$ , т. е. в последовательных приближениях фиксируется глубина воронки, а ее ширина и число  $Fr$  постепенно уточняются.

Коррекция «зеркала» осуществляется в каждом приближении после коррекции  $AB$ . На этом участке  $q$  из (3.5) ищется при помощи неограниченного [7] при больших  $r$  обращения упоминавшегося интеграла Коши, интегрирование (3.4) ведется с использованием (2.1) и условия  $h(B) = 0$ . Неограниченность  $q$  в точке  $C$  ( $r \gg H$ ) несущественна в этой задаче, поскольку  $h(c) \simeq 0$ . Для второй схемы вся свободная граница состоит только из «зеркала».

Для обеспечения сходимости вычислений здесь, как и в [6], приняты две согласованные модификации уравнений (3.4), (3.5): опущен пропорциональный  $\kappa$  член в (3.5) и введен множитель  $\alpha_p < 1$  в левую часть (3.4). Дело в том, что численное определение



Фиг. 2

$\kappa$  с такими же малыми погрешностями, как и у других используемых в (3.5) величин, затруднительно; исключение же слагаемого  $\kappa Uh$  из (3.5) влечет за собой завышение по модулю значений  $q$ , что необходимо компенсировать коэффициентом релаксации  $\alpha_p > 0$ .

4. Результаты проведенных расчетов приведены на фиг. 2. Кривые 1 и 2, соответствующие  $Fr = 4,07$  и  $Fr = 5,39$  — это меридиональные сечения свободных поверхностей с самой узкой и самой широкой воронками; вне диапазона  $4,07 \leq Fr \leq 5,39$  подобных решений нет, внутри — все схожи с приведенными здесь. Кривыми 3 и 4 представлены формы  $S$  без воронок для  $Fr = 3,71$  и  $Fr = 4,23$ ; такие решения существуют только для  $Fr \leq 4,23$ . На «зеркале» во всех решениях имеются волны убывающей

с расстоянием от оси симметрии амплитуды, однако их гребни не поднимаются до невозмущенного уровня  $z = H$ . В правой нижней части фиг. 2 приведены зависимости координаты  $r_m$  вершины наибольшей волны от  $Fr$ , штриховая кривая соответствует решению с воронкой, штрихпунктирная — без нее. Диапазон существования двух решений хоть и узок, но много больше погрешностей численного определения  $Fr$ .

Обсуждая возможности физической реализации полученных решений, надо, во-первых, отметить, что, как видно из совокупности соотношений (1.2), (3.1), (3.2), форма свободной поверхности не зависит от знака  $Q^*$  (от направления скорости в точке  $O$ ), т. е. решения этой задачи одинаковы для сосредоточенного источника и для сосредоточенного стока одинаковой обильности; во-вторых, поскольку сосредоточенная особенность может описывать поток через реальное отверстие радиуса  $R_0$  только

при  $R_0 \sim H/10$ , то для  $Fr \simeq 4$  и скоростей истечения  $V_0$  имеем  $H \sim 10^{-4} V_0 (\rho g)^{-1}$ , т. е. при умеренных значениях  $V_0$  глубины  $H$  будут весьма малы. По-видимому, разумнее было бы искать экспериментальные подтверждения не для решений этой однопараметрической задачи, а для аналогичной задачи с распределенным стоком и двумя параметрами —  $Fr$  и  $R_0/H$ , для которой нет ограничений на отношение  $R_0/H$  и такой жесткой связи между  $V_0$  и  $H$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев Н. Н. О неединственности возможных форм установившихся течений тяжелой жидкости при числах Фруда, близких к единице // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 6. С. 860—864.
2. Гузевский Л. Г. Обтекание препятствий потоком тяжелой жидкости конечной глубины. // Динамика сплошной среды с границами раздела. Чебоксары: Изд-е чуваш. ун-та, 1982. С. 61—69.
3. Котляр Л. М., Тропольская О. В. Истечение струй тяжелой жидкости из отверстия в горизонтальной стенке при наличии свободной поверхности. // Тр. семинара по краевым задачам. Изд-во Казан. ун-та, 1985. Вып. 22. С. 125—132.
4. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Т. 1. М.: Физматгиз, 1963. 584 с.
5. Иванов А. Н. Гидродинамика развитых кавитационных течений. Л.: Судостроение, 1980. 236 с.
6. Амромин Э. Л., Бушковский В. А., Дианов Д. И. Развитая кавитация за диском в вертикальной трубе. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 5. С. 181—185.
7. Заборейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А. и др. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 448 с.
8. Терентьев А. Г., Афанасьев К. Е. Численные методы в гидромеханике. Чебоксары: Изд-е чуваш. ун-та, 1987. 79 с.

Ленинград

Поступила в редакцию  
23.XI.1988

УДК 532.5 : 534.1

© 1990 г.

В. И. Тараканов

#### ОЦЕНКИ СНИЗУ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ В КАНАЛАХ ПРОИЗВОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Получены оценки снизу для первой собственной частоты колебаний жидкости в канале произвольного сечения, имеющего несколько участков свободной поверхности жидкости. Рассматривается случай, когда колебания происходят в плоскости сечения канала. При этом область, занятая сечением, может быть многосвязной, а ее граница кусочно-гладкой кривой. Вывод оценок не связан с необходимостью нахождения эталонных областей и не опирается на вариационные методы [1—3].

1. Рассматривается краевая задача на собственные значения

$$\Delta U \equiv U_{,xx} + U_{,yy} = 0, \quad x, y \in D \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \omega^2 U, \quad x, y \in \Gamma_\alpha; \quad \frac{\partial U}{\partial n} = 0, \quad x, y \in \Gamma/\Gamma_\alpha \quad (1.2)$$

для многосвязной области  $D \subset R^2(x, y)$ , ограниченной кусочно-гладкой кривой  $\Gamma$ , состоящей из нескольких отдельных замкнутых кривых. Кривая  $\Gamma$  имеет  $m$  участков  $\Gamma_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , на которых задаются краевые условия, соответствующие условиям на свободной поверхности жидкости.

$$\Gamma_j : y = h_j, \quad a_j < x < b_j, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad \Gamma_\alpha = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_m$$

Предполагается возможность расположения участков свободной поверхности жидкости на разных уровнях  $y = h_j$  (например, при поддержании разного давления газов над различными участками). В общем случае отрезки  $\Gamma_j$  могут принадлежать разным замкнутым кривым контура  $\Gamma$ . Величина  $\omega$  с точностью до размерного множителя сов-