Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 1, 1990

УДК 531.36

И. И. Блехман, О. З. Малахова

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ПРИЗНАКИ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ ДВИЖЕНИЙ

В ряде работ [1, 3, 4, 7—10, 13, 16, 23—25, 31—34, 36—40, 44] сформулированы так называемые экстремальные признаки устойчивости некоторых типов движений. До сих пор, однако, не обсуждена связь между этими признаками и не рассмотрен вопрос о возможности их распространения на более широкие классы систем и их движений. В ряде случаев может показаться, что результаты разных исследований противоречивы.

В связи с этим в настоящей работе наряду с сопоставительным обзором исследований по экстремальным признакам устойчивости указанные признаки получены (в случаях, когда это не сделано ранее) единообразно методом малого параметра Пуанкаре — Ляпунова. Отмечается, что те же результаты, иногда при несколько иных допущениях, получаются методом прямого разделения движений. Выделяются три класса систем, для которых к настоящему времени удалось установить экстремальные признаки устойчивости. Основные результаты формулируются в виде теорем. Рассматриваются приложения экстремальных признаков к проблеме общего обоснования тенденции к синхронизации некоторых классов слабо связанных динамических объектов, к задачам создания новых вибрационных устройств и технологий, к обобщению принципа автобалансировки неуравновешенных роторов и к проблеме резонансов (синхронизмов) при движении небесных тел.

1. Об экстремальных признаках устойчивости и потенциальных в среднем динамических системах. Общие предположения о рассматриваемых дифференциальных уравнениях. Все рассматриваемые ниже признаки устойчивости характеризуются тем, что для определенных систем и классов их движений указывается такая достаточно гладкая функция D $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ некоторого числа параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ $(k \leqslant 2n$, где $2n$ — порядок системы), что точкам минимума (а иногда также и максимума) этой функции соответствуют или могут соответствовать устойчивые движения данного класса [13]. Иными словами, в обсуждаемых случаях имеет место аналог теоремы Лагранжа — Дирихле об устойчивости положений равновесия, что представляет большие преимущества при исследовании. Существенно также, что как сама функция D, называемая потенциальной функцией, так и параметры $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ отчетливо интерпретируются в терминах характеристик системы и изучаемых движений: во всех рассматриваемых признаках функция D или ее «основная часть» представляет собой определенным образом усредненный лагранжиан, гамильтониан, силовую функцию системы или ее частей, а параметры $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — приближенные или точные начальные значения обобщенных координат (см. ниже).

Условия существования потенциальной функции достаточно жесткие: установить ее наличие удается далеко не всегда. Вместе с тем в разд. 2—4 рассматриваются три относительно широких и важных в прикладном плане класса систем, для которых к настоящему времени найти функцию D удалось; при этом основные результаты формулируются в виде математических утверждений, что, как правило, не делалось их авторами. Здесь же для пояснения сути дела укажем чисто схематически два пути «возникновения» потенциальной функции D, соответствующие двум методам исследования — методу Пуанкаре — Ляпунова и методу усреднения.

Как известно, при использовании метода Пуанкаре в случае, когда порождающая система допускает семейство периодических или почти периодических решений, зависящее от параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, соответствующие решения исходной системы могут отвечать значениям этих параметров, удовлетворяющих некоторой системе уравнений

$$P_s(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = 0 \quad (s = 1, \ldots, k) \tag{1.1}$$

где функции P_s выражаются через правые части исходных уравнений и порождающее решение (см. разд. 2—4). Далее при определенных предположениях о характере реший уравнений в вариациях, соответствующих порождающей системе и порождающему решению, доказывается [5, 6, 27, 34], что определенному решению уравнений (1.1) действительно отвечает асимптотически устойчивое решение исходной системы, если все корни $\varkappa$ алгебраического уравнения k-й степени (δ_{sj} — символ Кронекера)

$$|\, \partial P_i/\partial \alpha_j - \delta_{ij}\varkappa \,| = 0 \ (i, j = 1, \ldots, k) \tag{1.2}$$

имеют отрицательные вещественные части. При наличии хотя бы одного корня с положительной вещественной частью соответствующее решение неустойчиво, а случай нулевых или чисто мнимых корней требует дополнительного исследования.

Предположим теперь, что существует такая функция D $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, непрерывная вместе со своими производными до второго порядка включительно, что выполняются соотношения

$$\partial D/\partial \alpha_i = -P_i\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \ (i = 1, \ldots, k) \tag{1.3}$$

Тогда из сказанного сразу следует, что D как раз и является потенциальной функцией.

Иной путь возникновения потенциальной функции характерен для методов усреднения [15, 30]. Так, в случае использования метода прямого разделения движений [11], примыкающего к асимптотическим методам, при определенных условиях оказывается, что приближенные уравнения для «медленных» переменных $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, несмотря на, вообще говоря, неконсервативный характер исходной системы, записываются в виде

$$\mathrm{E}_{\alpha_i}(T) = -\partial D/\partial \alpha_i \ (i = 1, \ldots, k) \tag{1.4}$$

$$\mathrm{E}_{\alpha_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \alpha_i^{\boldsymbol{\cdot}}} - \frac{\partial}{\partial \alpha_i}$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\sum_{m=1}^{k} a_{jm}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)\,\alpha_j^{\boldsymbol{\cdot}}\alpha_m^{\boldsymbol{\cdot}}$$

где T — кинетическая энергия, соответствующая медленным движениям, а E — эйлеров оператор. Динамическую систему, допускающую запись уравнений медленных движений в форме (1.4), будем называть потенциальной в среднем; такое название оправдывается тем, что, как отмечалось, потенциальная функция D обычно получается в результате операции усреднения.

Из теорем Томсона — Тэта — Четаева следует, что роль функции D сохраняется, если в уравнения (1.4) входят также и слагаемые, соответствующие диссипативным силам [28].

В случае, когда приближенные уравнения для медленных переменных $a_1, \ldots, a_l$; $b_1, \ldots, b_l$ $(l \leqslant n)$ записываются в канонической форме

$$a_i^{\boldsymbol{\cdot}} = -\partial H/\partial b_i, \ b_i^{\boldsymbol{\cdot}} = \partial H/\partial a_i \ (i = 1, \ldots, l) \tag{1.5}$$

роль потенциальной функции D играет функция Гамильтона $H = H\,(a_1, \ldots, a_l;$ $b_1, \ldots, b_l)$; однако в данном случае устойчивые движения могут отвечать как точкам строгого минимума, так и точкам строгого максимума функции H.

По-видимому, первый результат, касающийся экстремальных признаков устойчивости, вытекает из классического сочинения Пуанкаре ([35], п.п. 42, 79), изучавшего, однако, консервативные системы. Коснемся кратко этого результата. Пуанкаре рассматривал уравнения вида

$$x_i^{\boldsymbol{\cdot}} = \partial H/\partial y_i, \ y_i^{\boldsymbol{\cdot}} = -\partial H/\partial x_i \ (i = 1, \ldots, n) \tag{1.6}$$

$$H = H_0\,(x_1, \ldots, x_n) + \mu H_1\,(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) + \mu^2 H_2\,(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) + \ldots$$

где H — периодическая функция периода 2π переменных $x_1, \ldots, x_n$; $y_1, \ldots, y_n$; μ — малый параметр.

При $\mu = 0$ уравнения (1.6) имеют решение

$$x_i = a_i, \ y_i = \omega_i t + \alpha_i \tag{1.7}$$

где a_i и α_i — постоянные интегрирования, ω_i — функции $a_1, \ldots, a_n$.

Допустим, что при некоторых значениях a_i частоты ω_i кратны $\omega = 2\pi/T$, т. е. решение (1.7) является синхронным с частотой ω, и $\omega_1 = -\partial H_0/\partial x_1 \neq 0$. Предположим также, что при соответствующих значениях a_i гессиан $|\,\partial^2 H_0/\partial x^2_1|$ отличен от нуля. Поскольку задача автономная, можно положить $\alpha_1 = 0$. Тогда, если при некоторых значениях $\alpha_2 = \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n = \alpha_n^*$ $\partial \overline{H}_1/\partial \alpha_i = 0$ $(i = 2, \ldots, n)$, а $|\partial^2 \overline{H}_1/\partial \alpha^2| \neq 0$

$$(\overline{H}_1 (a_i, \alpha_i) = \langle [H_1] \rangle)$$

то при достаточно малых $\mu \neq 0$ исходная система (1.6) будет иметь решение периода T, обращающееся при $\mu = 0$ в порождающее решение (1.7) с параметрами $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n = \alpha_n^*$. Здесь и ниже квадратные скобки указывают, что заключенное в них выражение вычисляется на порождающем решении, а

$$\langle \ldots \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \ldots dt$$

в случае периодических и

$$\langle \ldots \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \ldots dt$$

в случае почти периодических функций.

Исследуя устойчивость рассмотренного периодического решения, Пуанкаре показал, что характеристические показатели этого решения представимы в виде разложений по степеням $\sqrt{\mu}$: $\lambda = \lambda_1 \sqrt{\mu} + \lambda_2 \mu + \ldots$; при этом два характеристических показателя всегда равны нулю.

В частности, в случае $n = 2$ для ненулевых характеристических показателей справедливо выражение [35]

$$\omega_1^2 \lambda_1^2 = -\frac{\partial^2 \overline{H}_1}{\partial \alpha_2^2}\bigg|_{\alpha_2 = \alpha_2^*} \left(\omega_1^2 \frac{\partial^2 H_0}{\partial x_2^2} - 2\omega_1 \omega_2 \frac{\partial^2 H_0}{\partial x_1 \partial x_2} + \omega_2^2 \frac{\partial^2 H_0}{\partial x_1^2} \right) \tag{1.8}$$

Из рассуждений Пуанкаре, основанных на рассмотрении выражения (1.8), следует, что устойчивым в первом приближении движениям будут соответствовать либо точки минимума, либо точки максимума функции $\overline{H}_1$.

Изложенный фрагмент классического сочинения Пуанкаре отделен от предложенных впоследствии экстремальных признаков устойчивости довольно большим промежутком времени. Как видно из приводимого ниже обзора, лишь с конца пятидесятых годов начали появляться работы, в которых экстремальные признаки устойчивости формулируются применительно к движениям более сложных, по преимуществу неконсервативных систем. Отметим, что для многих таких систем экстремальные признаки оказываются «более сильными» — они выражают как необходимые, так и достаточные условия устойчивости по Ляпунову, т. е. по существу представляют собой критерии устойчивости. Для гамильтоновых же систем соответствующие признаки выражают, вообще говоря, только достаточные условия устойчивости в первом приближении по малому параметру, входящему в уравнения в вариациях; движение в этих случаях может быть устойчивым по Ляпунову лишь при выполнении некоторых дополнительных условий. Такая ситуация имеет место, в частности, в изложенном фрагменте Пуанкаре. Вместе с тем экстремальные признаки не утрачивают значения и в этих последних случаях, поскольку они определяют отбор постоянных порождающего решения, которым могут соответствовать устойчивые движения.

Относительно характера и гладкости функций, входящих в рассматриваемые дифференциальные уравнения, для справедливости всех излагаемых ниже результатов достаточно предположить, что эти уравнения могут быть представлены в виде

$$x_s^{\cdot} = X_s (x_1, \ldots, x_n, t) + \mu f_s (x_1, \ldots, x_n, t, \mu)$$

где правые части определены при всех вещественных значениях t, при значениях μ, лежащих на некотором отрезке $[0, \mu_0]$, и при значениях $x_1, \ldots, x_n$, лежащих в некоторой замкнутой области G пространства этих переменных. В указанной области правые части уравнений непрерывны относительно t, причем функции f_s допускают непрерывные частные производные первого порядка по переменным $x_1, \ldots, x_n, \mu$, а X_s от μ не зависят и допускают непрерывные производные второго порядка по $x_1, \ldots, x_n$. В некоторых случаях эти требования могут быть ослаблены. Относительно t правые части могут быть либо периодическими с некоторым периодом T, либо почти периодическими, либо не зависящими явно от этой переменной. В случае почти периодических уравнений предполагается, что при любом фиксированном μ из отрезка $[0, \mu_0]$ и любых почти периодических $x_1, \ldots, x_n$, принадлежащих области G, функции $X_s (x_1, \ldots, x_n, t)$ и $f_s (x_1, \ldots, x_n, t, \mu)$ также почти периодичны по t.

Все переменные и параметры считаются безразмерными.

2. Системы с самосинхронизирующимися объектами. Интегральные признаки устойчивости (экстремальные свойства) синхронных движений. *2.1. Системы с почти равномерными вращениями; самосинхронизация вибровозбудителей.* Интегральный признак устойчивости был сформулирован для систем с самосинхронизирующимися механическими вибровозбудителями [7] и доказан методом малого параметра Пуанкаре — Ляпунова [8]; в книге [9] этот признак обобщен на системы с почти равномерными вращениями; соответствующий результат может быть сформулирован следующим образом.

Пусть уравнения движения системы с обобщенными координатами φ_s ($s = 1, \ldots, k$) и u_r ($r = 1, \ldots, \nu$), характеризующейся функцией Лагранжа L и неконсервативными обобщенными силами Q_{φ_s} и Q_{u_r}, могут быть представлены в форме

$$I_s\varphi_s^{\cdot\cdot} + k_s(\varphi_s^{\cdot} - \sigma_s n_s\omega) = \mu\Phi_s \quad (s = 1, \ldots, k) \tag{2.1}$$

$$E_{u_r}(L) = Q_{u_r} \quad (r = 1, \ldots, \nu) \tag{2.2}$$

где I_s, k_s и ω — положительные постоянные, $\sigma_s = \pm 1$, n_s — целые положительные числа, $\mu > 0$ — малый параметр.

Функции L, Q_{φ_s}, Q_{u_r} и Φ_s могут зависеть как от обобщенных координат и скоростей системы, так и от времени t; эти функции 2π-периодические по φ_s и $2\pi/\omega$-периодические по t. Функции Q_{φ_s}, Q_{u_r} и Φ_s к тому же могут зависеть и от μ, причем функции Φ_s определяются из условия тождественности уравнений (2.1) соответствующей группе уравнений Лагранжа второго рода. Назовем системы указанного типа системами с почти равномерными вращениями, координаты φ_s — вращательными, а u_r — колебательными.

Порождающие уравнения, соответствующие уравнениям (2.1), допускают семейство решений

$$\varphi_s^0 = \sigma_s(n_s\omega t + \alpha_s) \tag{2.3}$$

зависящее от k произвольных параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Пусть порождающие уравнения, соответствующие уравнениям (2.2) и решению (2.3), допускают при любых α_s асимптотически устойчивое $2\pi/\omega$ — периодическое решение u_r°. Пусть, далее, существует функция $B = B(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, называемая потенциалом усредненных обобщенных сил, такая, что

$$\frac{\partial B}{\partial \alpha_s} = \sigma_s\langle[Q_{\varphi_s}]\rangle + \sum_{r=1}^{\nu}\left\langle\left[Q_{u_r}\frac{\partial u_r^\circ}{\partial\alpha_s}\right]\right\rangle$$

где, как и выше, угловые скобки указывают на усреднение за период $2\pi/\omega$, а квадратные означают, что заключенное в них выражение вычисляется при $\mu = 0$ и для порождающего решения.

Обозначим $\Lambda = \Lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \langle[L]\rangle$ среднее значение функции Лагранжа системы, вычисленное для порождающего решения.

При сформулированных условиях справедлива следующая теорема: каждой точке грубого минимума функции

$$D = D(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = -(\Lambda + B) \tag{2.4}$$

при достаточно малых значениях μ соответствует единственное асимптотически устойчивое решение исходной системы (2.1), (2.2), обращающееся при $\mu = 0$ в порождающее, т. е. решение вида

$$\varphi_s = \sigma_s(n_s\omega t + \alpha_s) + \psi_s(t, \mu), \quad u_r = u_r^\circ(t) + v_r(t, \mu) \tag{2.5}$$

где ψ_s и v_r — $2\pi/\omega$ — периодические функции t, обращающиеся в нуль при $\mu = 0$ (такие решения называются синхронными). Отсутствие минимума, обнаруживаемое путем анализа членов второго порядка в разложении функции D по степеням α_s вблизи стационарной точки, свидетельствует о неустойчивости соответствующего синхронного решения, а прочие случаи требуют дополнительного исследования.

Под грубым здесь и ниже понимается строгий экстремум функции, обнаруживаемый путем анализа членов второго порядка в разложении этой функции вблизи стационарной точки.

Сделаем некоторые дополнительные замечания.

1°. Если L, Q_{φ_s}, Q_{u_r} и Φ_s — аналитические функции обобщенных координат и скоростей, а функции Q_{φ_s}, Q_{u_r} и Φ_s аналитически зависят также и от малого параметра μ, то решение (2.5) системы (2.1), (2.2) будет аналитическим по μ.

2°. В случае автономной системы функция D зависит лишь от разностей $\alpha_1 - \alpha_k, \ldots, \alpha_{k-1} - \alpha_k$, и приведенное утверждение относится к минимумам по этим разностям, причем речь идет об асимптотической орбитальной устойчивости.

3°. При $\partial B/\partial\alpha_s \ll \partial\Lambda/\partial\alpha_s$, в частности при $B = \mathrm{const}$, можно положить $D = -\Lambda$, т. е. потенциальной функцией является усредненный лагранжиан системы, вычисленный для порождающего решения и взятый с противоположным знаком.

4°. Как явствует из приведенной теоремы, условия грубого минимума функции D являются при указанных предположениях не только достаточными условиями устойчивости, но и «грубо необходимыми» в том смысле, что отсутствие минимума, обнаруживаемое путем анализа членов второго порядка в разложении функции D вблизи стационарной точки, свидетельствует о неустойчивости рассматриваемого синхронного решения.

5°. Если факт асимптотической устойчивости порождающего решения u_r° не удается установить на основе анализа уравнения в вариациях для системы (2.2) при $\mu = 0$, то для получения достаточных условий устойчивости к условиям грубого минимума функции D необходимо присоединить некоторые дополнительные соотношения, получаемые путем анализа последующих приближений; та же ситуация имеет место в случае, когда система (2.1) квазиконсервативна. Вместе с тем условия, вытекающие из требования грубого минимума D, и в этом случае являются основными, поскольку именно они определяют отбор постоянных $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, которым могут отвечать устойчивые решения.

6°. Пусть функция Лагранжа системы может быть представлена в форме

$$L = L^* + L^{(\mathrm{I})} + L^{(\mathrm{II})}$$

$$L^* = \sum_{s=1}^{k} L_s(\dot\varphi_s, \varphi_s) + \sum_{r=1}^{\nu} f_r(\dot\varphi_1, \ldots, \dot\varphi_k, \varphi_1, \ldots, \varphi_k)\,\dot u_r + \sum_{s=1}^{k} F_s(\varphi_s)$$

$$L^{(\mathrm{I})} = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{\nu} a_{rj}\dot u_r \dot u_j - \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{\nu} b_{rj}u_r u_j$$

$$L^{(\mathrm{II})} = \Psi(\dot\varphi_1, \ldots, \dot\varphi_k; \varphi_1, \ldots, \varphi_k)$$

Здесь a_{rj} и b_{rj} — постоянные, а L_s, f_r, F_r и Ψ — функции перечисленных переменных, причем L_s, f_r и F_r периодичны по φ_s с периодом 2π; пусть к тому же $[Q_{u_r}] \equiv \equiv 0$, т. е. неконсервативные обобщенные силы по координатам u_r в порождающем приближении отсутствуют; соответствующие системы, таким образом, квазилинейные и квазиконсервативные по колебательным координатам. Тогда справедливы соотношения [9, 10]

$$\partial\Lambda_s/\partial\alpha_s \equiv 0, \quad \partial\Lambda/\partial\alpha_s = \partial(\Lambda^{(\mathrm{II})} - \Lambda^{(\mathrm{I})})/\partial\alpha_s$$

$$\Lambda_s = \langle[L_s]\rangle, \quad \Lambda^{(\mathrm{I})} = \langle[L^{(\mathrm{I})}]\rangle, \quad \Lambda^{(\mathrm{II})} = \langle[L^{(\mathrm{II})}]\rangle, \quad \Lambda = \langle[L]\rangle$$

и потенциальная функция может быть представлена в виде

$$D = \Lambda^{(\mathrm{I})} - \Lambda^{(\mathrm{II})} - B \tag{2.6}$$

Выражения L_s, $L^{(\mathrm{I})}$ и $L^{(\mathrm{II})}$ названы [32] соответственно собственными лагранжианами синхронизирующихся объектов, лагранжианами систем несущих и несомых связей между объектами. Примечательно, что величины $\Lambda^{(\mathrm{I})}$ и $\Lambda^{(\mathrm{II})}$ входят в выражения для D с противоположными знаками. В задаче о синхронизации вибровозбудителей (неуравновешенных роторов) L_s — лагранжианы не связанных между собою роторов, $L^{(\mathrm{I})}$ — лагранжиан упруго опертого твердого тела или системы упруго связанных твердых тел, на которых размещены роторы, а слагаемое $L^{(\mathrm{II})}$ обусловлено наличием непосредственных соединений между роторами в виде упругих и демпфирующих элементов.

Если $L^{(\mathrm{II})} = 0$, $B = \mathrm{const}$ или $\partial\Lambda^{(\mathrm{I})}/\partial\alpha_s \gg \partial B/\partial\alpha_s$, то можно положить

$$D = \Lambda^{(\mathrm{I})} = \langle[L^{(\mathrm{I})}]\rangle \tag{2.7}$$

т. е. потенциальная функция в этом случае представляет собой усредненный за период лагранжиан упруго опертого твердого тела или системы твердых тел, несущих роторы, причем функция $L^{(\mathrm{I})}$ вычисляется в порождающем приближении $\varphi_s^\bullet$, $u_r^\bullet$. Этот результат существенно облегчает исследование систем с самосинхронизирующимися неуравновешенными роторами и имеет важные приложения (см. подразд. 5.2 и 5.3).

Изложенные выше результаты получаются также методом прямого разделения движений [10, 11], при использовании которого, однако, кроме сделанных выше предположений приходится принимать допущение о достаточной малости параметра $\varepsilon = 1/\omega$. Интегральный признак устойчивости получается в этом случае из условия устойчивости стационарных решений $\alpha_1 = \alpha_1^*, \ldots, \alpha_k = \alpha_k^*$ системы уравнений

$$I_s\alpha_s^{\cdot\cdot} + k_s\alpha_s^{\cdot} = \partial(\Lambda + B)/\partial\alpha_s \quad (s = 1, \ldots, k) \tag{2.8}$$

где, в отличие от выражений (2.3), величины α_s — «медленно меняющиеся» функции времени.

Доказательство интегрального признака устойчивости на основе использования вариационного соотношения дано в [25].

Были получены [9, 38, 45, 46] полезные при решении конкретных задач выражения для осредненного лагранжиана несущей квазилинейной системы тел через так называемые гармонические коэффициенты влияния. Предложена [23] модифицированная геометрическая формулировка интегрального признака устойчивости, удобная при решении ряда задач о самосинхронизации вибровозбудителей.

2.2. Системы квазиконсервативных объектов, канонические системы. Интегральный признак устойчивости для системы слабо связанных квазиконсервативных объектов был получен в [32]; при этом выражение для потенциальной функции имеет вид [9, 10]

$$D = -(\Lambda + B)\,\sigma \tag{2.9}$$

$$\sigma = \operatorname{sign} e_s(\omega), \quad e_s(\omega_s) = \omega_s^{-1} dh_s/d\omega_s \tag{2.10}$$

(ω_s — частота изолированного чисто консервативного s-го объекта, $h_s(\omega_s)$ — его постоянная энергии).

Примечательно, что знак в выражении (2.9) определяется знаком величин $e_s(\omega)$. В зависимости от этого знака Р. Ф. Нагаев различает жестко анизохронные объекты ($e_s > 0$; примером могут служить вращающиеся роторы), мягко анизохронные объекты ($e_s < 0$; пример — точечные массы, обращающиеся вокруг неподвижного центра под действием силы тяготения), изохронные объекты ($e_s = \infty$; пример — линейные осцилляторы, для которых ω_s не зависит от h_s, так что $d\omega_s/dh_s = 0$). Формула (2.9) справедлива при условии, что характер анизохронизма всех объектов одинаков.

Для систем с квазилинейными несущими связями при достаточно общих предположениях о характере несомых связей выражение (2.9) может быть представлено в виде

$$D = (\Lambda^{(\mathrm{I})} - \Lambda^{(\mathrm{II})} - B)\,\sigma \tag{2.11}$$

Здесь $\Lambda^{(\mathrm{I})}$ и $\Lambda^{(\mathrm{II})}$, как и в (2.6), усредненные лагранжианы соответственно систем несущих и несомых связей, вычисленные в порождающем приближении.

В задаче о синхронизации квазиконсервативных объектов условия устойчивости, выражаемые интегральным признаком, являются лишь грубо необходимыми (см. замечание 4° на с. 146). Достаточные условия получены в [33, 34, 38].

Путем использования асимптотических методов и метода интегральных многообразий результаты работы [32] обобщены [21] на случай так называемого неполного синхронизма (соответствующее понятие сформулировано в той же статье).

Формулы (2.9) и (2.11) относятся к случаю существенно анизохронных объектов. Было показано [32], что соответствующий интегральный признак устойчивости может быть сформулирован и в случае почти изохронных объектов, требующем специального рассмотрения. Также для случая почти изохронных объектов — квазилинейных осцилляторов — интегральный признак доказан в [16]. Авторы предполагают, что лагранжиан системы имеет вид

$$L(q, q^{\cdot}, t, \mu) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(q_j^{\cdot 2} - \omega_j^2 q_j^2) + \mu l_1(q, q^{\cdot}, t, \mu) \tag{2.12}$$

где $\mu > 0$ — малый параметр, l_1 — периодическая функция времени t с периодом $T_1 = 2\pi/\omega$. Рассматривается движение, близкое к резонансному:

$$\omega_j^2 - \nu_j^2 = O(\mu), \quad \nu_j = \omega p_j/N \quad (j = 1, \ldots, n)$$

где p_j ($j = 1, \ldots, n$) и N — целые положительные числа.

Уравнения движения имеют вид

$$q_r^{\cdot\cdot} + \nu_r^2 q_r = -\mu\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial l_2}{\partial q_r^{\cdot}} - \frac{\partial l_2}{\partial q_r}\right) \tag{2.13}$$

$$l_2(q, q^{\cdot}, t, \mu) \equiv l_1(q, q^{\cdot}, t, \mu) + \mu^{-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{q_i^2}{2}(\nu_j^2 - \omega_j^2)$$

Порождающее решение уравнений (2.13)

$$q_r^{\circ} = a_r \cos \nu_r t + b_r/\nu_r \sin \nu_r t \quad (r = 1, \ldots, n) \tag{2.14}$$

(a_r и b_r — начальные значения q_r° и $q_r^{\circ\cdot}$ соответственно) периодично по t с периодом $T = 2\pi N/\omega$.

Введя среднее значение лагранжиана (2.12) вдоль порождающего периодического решения (2.14)

$$\Lambda(a, b) = \frac{1}{T}\int_0^T L(q^{\circ}(t), q^{\circ\cdot}(t), t, \mu)\, dt \tag{2.15}$$

авторы [16] приходят к следующему утверждению: если функция Λ (a, b) имеет в точке $a_1 = a_1^{\circ}, \ldots, a_n = a_n^{\circ}$; $b_1 = b_1^{\circ}, \ldots, b_n = b_n^{\circ}$ минимум или максимум, то эта точка определяет устойчивое по первому приближению периодическое решение; другие стационарные точки требуют специального рассмотрения.

Необходимо отметить, что по смыслу приводимых в [16] рассуждений под словами «устойчивое по первому приближению» здесь следует понимать лишь устойчивость в первом приближении по малому параметру μ: для решения вопроса об устойчивости по первому приближению в обычном смысле этого термина в данном случае необходимо изучение корней характеристического уравнения с точностью до более высоких степеней μ.

Сформулированный экстремальный признак с приведенным выше уточнением и при некотором дополнительном ограничении может быть получен при помощи теоремы И. Г. Малкина [27] о существовании и устойчивости почти периодических (в частности, периодических) решений системы уравнений вида

$$x_s^{\cdot} = X_s(x_1, \ldots, x_l, t) + \mu F_s(x_1, \ldots, x_l, t, \mu) \quad (s = 1, \ldots, l) \tag{2.16}$$

где X_s и F_s — почти периодические функции t, и для любого μ из отрезка $[0, \mu_0]$ и произвольных почти периодических функций $x_j(t)$ $(j = 1, \ldots, l)$, лежащих в некоторой области G пространства переменных $x_1, \ldots, x_l$, функции $X_s[x_1(t), \ldots, x_l(t), t]$ и $F_s[x_1(t), \ldots, x_l(t), t, \mu]$ также почти периодичны по t. Предположения о гладкости функций X_s и F_s приведены на с. 144.

Теорема И. Г. Малкина устанавливает соответствие между почти периодическими решениями системы (2.16) и почти периодическими решениями порождающей системы

$$x_s^{\circ\cdot} = X_s(x_1^{\circ}, \ldots, x_l^{\circ}, t) \quad (s = 1, \ldots, l) \tag{2.17}$$

Для каждого почти периодического решения системы (2.17), лежащего в области G и зависящего от l произвольных параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$

$$x_s^{\circ} = x_s^{\circ}(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_l) \tag{2.18}$$

для которого

$$P_s(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \equiv \left\langle \sum_{j=1}^{n} F_j(x_1^{\circ}, \ldots, x_l^{\circ}, t, 0)\, z_{js}^*(t)\right\rangle = 0 \tag{2.19}$$

и алгебраическое уравнение l-й степени

$$|\, \partial P_s/\partial\alpha_j - \delta_{sj}\lambda\, | = 0 \quad (s, j = 1, \ldots, l) \tag{2.20}$$

не имеет корней с нулевыми вещественными частями, существует при достаточно малом μ почти периодическое решение системы (2.16), обращающееся при $\mu = 0$ в порождающее решение (2.18). Это почти периодическое решение будет асимптотически устойчивым, если все корни уравнения (2.20) имеют отрицательные вещественные части; если вещественная часть хотя бы одного корня положительна, то соответствующее решение неустойчиво.

Здесь z_{js}^* — решения системы, сопряжённой с системой уравнений в вариациях, составленных для порождающей системы (2.17) и порождающего решения (2.18), причем

$$\sum_{s=1}^{l} z_{sm} z_{sj}^{*} = \delta_{mj} = \begin{cases} 1, & m = j \\ 0, & m \neq j \end{cases} \tag{2.21}$$

$z_{sm} = \partial x_s^\circ / \partial \alpha_m$ $(s, m = 1, \ldots, l)$ — почти периодические решения уравнений в вариациях, отвечающих системе (2.17) и решению (2.18).

Отметим, что доказательство сформулированной теоремы опирается на преобразование Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова для почти периодических систем в стандартной форме, а также на теорему Н. Н. Боголюбова о соответствии решений исходной системы стационарным решениям уравнений первого приближения на бесконечном интервале времени и о связи между устойчивостью указанных решений [15]. В случае периодических систем в основе доказательства теоремы И. Г. Малкина лежат методы Пуанкаре и Ляпунова [27]; если при этом уравнение (2.20) не имеет нулевых корней, то условия (2.19) являются необходимыми и достаточными для существования у системы (2.16) периодического решения, обращающегося при $\mu = 0$ в порождающее. Это периодическое решение будет асимптотически устойчивым, если все корни уравнения (2.20) имеют отрицательные вещественные части; в случае чисто мнимых корней уравнения (2.20) можно говорить лишь об устойчивости периодических решений системы (2.16) в первом приближении.

Используя приведенную теорему, обозначим [1] $q_j = x_j$, $q_j^{\cdot} = y_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ и запишем систему (2.13) в виде

$$x_r^{\cdot} = y_r,\ y_r^{\cdot} = -\nu_r^2 x_r + \mu F_r\,(x,\ y,\ y^{\cdot},\ t,\ \mu)\quad (r = 1, \ldots, n) \tag{2.22}$$

где функции

$$F_r = -\frac{d}{dt}\frac{\partial l_2}{\partial y_r} + \frac{\partial l_2}{\partial x_r} \qquad (r = 1, \ldots, n) \tag{2.23}$$

периодичны по t с периодом $T = 2\pi/\omega$.

При $\mu = 0$ система (2.22) допускает семейство периодических решений периода $T = 2\pi N/\omega$, зависящее от $2n$ произвольных параметров $a_1, \ldots, a_n$; $b_1, \ldots, b_n$:

$$\begin{aligned} x_r^\circ &= a_r \cos \nu_r t + b_r \nu_r^{-1} \sin \nu_r t \\ y_r^\circ &= -a_r \nu_r \sin \nu_r t + b_r \cos \nu_r t \quad (r = 1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{2.24}$$

Уравнения (2.19) для определения параметров порождающего решения запишутся следующим образом:

$$P_s(a, b) \equiv \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{j=1}^{n} z_{j+n,\,s}^{*} F_j\,(x^\circ, y^\circ, y^{\circ\cdot}, t, 0)\,dt = 0 \qquad (s = 1, \ldots, 2n) \tag{2.25}$$

$$\begin{gathered} z_{j,s}^{*} = \delta_{js}\cos\nu_s t \qquad z_{j,s+n}^{*} = \delta_{js}\nu_s \sin\nu_s t \\ z_{j+n,\,s}^{*} = -\,\delta_{js}\nu_s^{-1}\sin\nu_s t \qquad z_{j+n,\,s+n}^{*} = \delta_{js}\cos\nu_s t \\ (j = 1, \ldots, n;\ s = 1, \ldots, n) \end{gathered} \tag{2.26}$$

Учитывая соотношения (2.23), (2.24), (2.26), можно получить

$$P_j(a, b) = -\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial}{\partial b_j} l_2\,(q^\circ, q^{\circ\cdot}, t, 0)\,dt$$

$$P_{j+n}(a, b) = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial}{\partial a_j} l_2\,(q^\circ, q^{\circ\cdot}, t, 0)\,dt \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

откуда следует, что решение системы (2.25)

$$a_1 = a_1^\circ, \ldots, a_n = a_n^\circ;\ b_1 = b_1^\circ, \ldots, b_n = b_n^\circ. \tag{2.27}$$

является стационарной точкой функции $\Lambda\,(a,\ b)$.

Для исследования вопроса о существовании и устойчивости периодического решения системы (2.22), обращающегося при $\mu = 0$ в порождающее решение (2.24), где $a_r =$

---

[1] Приводимое ниже доказательство, а также доказательства в разд. 3 и 4 принадлежат *Малаховой О. З.*

$= a_r^\circ$, $b_r = b_r^\circ$ $(r = 1, \ldots, n)$, составим алгебраическое уравнение (2.20):

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{\partial^2\Lambda}{\partial b_r \partial a_s} - \delta_{rs}\lambda & -\dfrac{\partial^2\Lambda}{\partial b_r \partial b_s} \\ \dfrac{\partial^2\Lambda}{\partial a_r \partial a_s} & \dfrac{\partial^2\Lambda}{\partial a_r \partial b_s} - \delta_{rs}\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{2.28}$$

$$(r = 1, \ldots, n;\ s = 1, \ldots, n)$$

(производные от функции Λ (a, b) вычислены в точке (2.27)). У системы (2.22) будет существовать при достаточно малом μ периодическое решение, обращающееся при $\mu = 0$ в порождающее, если приведенное алгебраическое уравнение не имеет нулевых корней. Равенство (2.28), очевидно, представляет собой характеристическое уравнение системы в вариациях, отвечающей решению (2.27) системы

$$a_r^{\cdot} = -\partial\Lambda/\partial b_r,\ b_r^{\cdot} = \partial\Lambda/\partial a_r\ (r = 1, \ldots, n) \tag{2.29}$$

Так как система (2.29) гамильтонова, то стационарным точкам функции Λ (a, b), отвечающим устойчивым в первом приближении положениям, будут соответствовать чисто мнимые корни уравнения (2.28). Поэтому условия наличия в некоторой точке грубого минимума или максимума Λ (a, b) являются достаточными условиями существования устойчивого в первом приближении по малому параметру μ периодического решения системы (2.13), обращающегося при $\mu = 0$ в порождающее решение (2.14).

Заметим, что, в отличие от приведенной выше формулировки [16], здесь фигурирует дополнительное требование грубости экстремума функции Λ (a, b), обусловленное использованием теоремы И. Г. Малкина.

Не приводя доказательства, авторы работы [16] отмечают, что рассмотренный признак устойчивости распространяется и на общий случай канонических систем с функцией Гамильтона, почти периодической относительно времени t.

В качестве гипотезы был выдвинут принцип экстремальности резонансных (по использованной выше терминологии — синхронных) движений для задачи о плоском вращении небесного тела относительно его центра масс, движущегося по эллиптической орбите вокруг притягивающего центра [1, 3, 4].

Пусть U (θ, t) — силовая функция системы, где θ — угол отклонения оси инерции тела от радиуса-вектора орбиты. Введем среднее по времени значение силовой функции

$$\langle U \rangle = \bar{U}(\theta_0, \theta_0^{\cdot}) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t U[\theta(\theta_0, \theta_0^{\cdot}, t), t]\, dt \tag{2.30}$$

Согласно указанной гипотезе, предел (2.30) существует и достигает максимумов на множестве начальных данных θ_0, $\theta_0^{\cdot}$, отвечающих устойчивым резонансным движениям. В качестве свидетельства в пользу выдвинутого принципа приводились результаты численного эксперимента [1].

Позднее была доказана теорема, подтверждающая в общей форме мысль о существовании экстремальных свойств у синхронных (резонансных) движений [2]. Авторы рассмотрели периодическую систему, несколько более общую, чем каноническая (систему с сохраняющимся фазовым объемом) и показали, что для наличия устойчивых периодических или синхронных движений необходимо и достаточно существование функции K (x_0) начальных значений x_0 фазовых переменных x, имеющей строгий максимум или минимум по этим начальным значениям. При этом указанная функция связана с некоторой функцией фазовых координат и времени $\varkappa$ (x, t) интегральным соотношением типа (2.30). Вопрос о способе нахождения функций $\varkappa$ и K при этом, однако, остается открытым. Отметим, что согласно изложенной выше гипотезе, такими функциями являются соответственно U и $\langle U \rangle$.

Заметим также, что теорема [2] согласуется с результатами статьи [43].

Было отмечено [22], что усреднение (2.30) вдоль точных, в общем случае невырожденных решений, отличается от усреднения вдоль вырожденных (т. е. зависящих от некоторого числа параметров) решений, о котором идет речь в остальных рассмотренных выше случаях. На результат усреднения вдоль вырожденных решений оказывает влияние выбор усредняемой функции, тогда как на невырожденных устойчивых в линейном приближении периодических решениях для любой периодической непрерывно дифференцируемой функции $\varkappa$ (x, t)

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{1}{T}\int_0^T \varkappa(x(t, x_0), t)\, dt\right) = 0$$

в частности, если $K(x_0)$ существует и является непрерывно дифференцируемой функцией, то $K_{x_0}' = 0$, т. е. x_0 — стационарная точка функции $K(x_0)$. С другой стороны, это утверждение, доказанное в [22], не противоречит теореме [2], в которой говорится лишь о существовании функции $\varkappa(x, t)$ и согласно которой x_0 — не только стационарная точка функции $\varkappa(x, t)$, а представляет собой точку минимума или максимума этой функции, причем данная теорема дает как необходимые, так и достаточные условия существования устойчивых периодических решений.

2.3. Системы с квазициклическими координатами. Был получен [39] интегральный признак устойчивости для систем с квазициклическими координатами

$$p_r^{\boldsymbol{\cdot}} = Q_r \quad (r = 1, \ldots, m) \tag{2.31}$$

$$\begin{gathered} \mathrm{E}_{q_{m+r}}(L) = Q_{m+r} \quad (r = 1, \ldots, n - m) \\ L = T(q_{m+1}, \ldots, q_n; q_1^{\boldsymbol{\cdot}}, \ldots, q_n^{\boldsymbol{\cdot}}) - \Pi(q_{m+1}, \ldots, q_n) \end{gathered} \tag{2.32}$$

где L — функция Лагранжа; $\mu > 0$ — малый параметр; $p_r = \partial T/\partial q_r^{\boldsymbol{\cdot}}$ $(r = 1, \ldots, m)$ — квазициклические импульсы; $Q_{m+r}(q_{m+1}, \ldots, q_n; q_1^{\boldsymbol{\cdot}}, \ldots, q_n^{\boldsymbol{\cdot}})$ — обобщенные неконсервативные силы, отвечающие позиционным координатам; обобщенные неконсервативные силы, соответствующие квазициклическим координатам, предполагаются представимыми в виде

$$\begin{gathered} Q_r = U_r(t) + \mu f_r - \mu h_r q_r^{\boldsymbol{\cdot}} \\ U_r(t + 2\pi/\omega) = U_r(t), \ \langle U_r(t) \rangle = 0 \quad (r = 1, \ldots, m) \end{gathered}$$

причем f_r, h_r — постоянные $(h_r > 0)$.

Порождающие уравнения, отвечающие уравнениям (2.31), имеют семейство $2\pi/\omega$-периодических решений, зависящее от m произвольных постоянных $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$:

$$\begin{gathered} p_r^\circ = \alpha_r + V_r(t) \quad (r = 1, \ldots, m) \\ (V_r^{\boldsymbol{\cdot}} = V_r, \ \langle V_r \rangle = 0) \end{gathered} \tag{2.33}$$

Допустим, что уравнения

$$[\mathrm{E}_{q_{m+r}}(L_R) - Q_{m+r}] = 0 \quad (r = 1, \ldots, n - m)$$

где

$$L_R = \Big(T - \sum_{r=1}^{m} p_r q_r^{\boldsymbol{\cdot}}\Big|_{q_r^{\boldsymbol{\cdot}} = q_r^{\boldsymbol{\cdot}}(p_1, \ldots, p_m; q_{m+1}, \ldots, q_n; q_{m+1}^{\boldsymbol{\cdot}}, \ldots, q_n^{\boldsymbol{\cdot}})} - \Pi$$

— кинетический потенциал Рауса, при любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ имеют асимптотически устойчивое $2\pi/\omega$-периодическое изолированное решение

$$q_{r+m} = \overset{\circ}{q}_{r+m}(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_m) \quad (r = 1, \ldots, n - m) \tag{2.34}$$

Предположим, что выполнены соотношения

$$\sum_{s=1}^{n-m} \Big\langle \Big[Q_{m+s} \frac{\partial q_{m+s}}{\partial \alpha_r} \Big] \Big\rangle = 0 \quad (r = 1, \ldots, m) \tag{2.35}$$

(Здесь, как и выше, функции, заключенные в квадратные скобки, вычисляются на порождающем решении (2.33)).

При сформулированных предположениях имеет место следующее утверждение: при достаточно малых μ каждой точке грубого минимума потенциальной функции

$$D(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = -\langle [L_R] \rangle - \sum_{r=1}^{m} \frac{f_r}{h_r} \alpha_r \tag{2.36}$$

отвечает единственное асимптотически устойчивое периодическое решение системы (2.31), (2.32), обращающееся при $\mu = 0$ в порождающее решение (2.33), (2.34).

Периодическими здесь являются все обобщенные скорости и позиционные (но не квазициклические) координаты.

3. Системы с кинематическим возбуждением вибрации (минимаксный признак устойчивости). Минимаксный признак устойчивости [36] может быть сформулирован следующим образом (здесь эта формулировка приводится с некоторым видоизменением, см. ниже) [2].

---

[2] *Стрижак Т. Г.* Минимаксный признак устойчивости: Препринт № 254. Киев: Ин-т электродинамики АН УССР, 1981. 50 с.

Пусть

$$T=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{1mj}(q,u)\,q_m^{\boldsymbol{\cdot}}q_j^{\boldsymbol{\cdot}}+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}a_{2mj}(q,u)\,u_m^{\boldsymbol{\cdot}}u_j^{\boldsymbol{\cdot}}+$$

$$+\sum_{m=1}^{n}\sum_{j=1}^{s}a_{3mj}(q,u)\,q_m^{\boldsymbol{\cdot}}\,u_j^{\boldsymbol{\cdot}},\qquad \Pi=\Pi\,(q,u) \tag{3.1}$$

— кинетическая и потенциальная энергия системы, описываемой $n+s$ обобщенными координатами $q_1,\ldots,q_n,u_1,\ldots,u_s$, причем координаты $u_1,\ldots,u_s$ заданы в виде конечных сумм (μ — малый параметр)

$$u_j=\mu\sum_k u_{j,k}(q_1,\ldots,q_n,\mu)\exp(i\nu_k\omega t)\qquad (j=1,\ldots,s) \tag{3.2}$$

$$\nu_k\neq 0,\ \nu_{-k}=-\nu_k,\qquad u_{j,-k}=\bar u_{j,k},\qquad \omega=1/\mu$$

Допустим, что отвечающие переменным $q_1,\ldots,q_n$ силы вязкого трения R_r ($r=1,\ldots,n$) имеют вид

$$R_r=\sum_{j=1}^{n}\beta_{rj}q_j^{\boldsymbol{\cdot}}+\sum_{j=1}^{s}\beta'_{rj}u_j^{\boldsymbol{\cdot}}$$

где матрица коэффициентов β_{rj} является положительно определенной.

Будем понимать под квазиравновесиями системы почти периодические движения вида $q_j=q_j^\circ+\mu\psi_j(\omega t)$ ($j=1,\ldots,n$), где q_j° — постоянные, а $\langle\psi_j(\omega t)\rangle=0$, т. е. движения, представляющие собой малые высокочастотные колебания вблизи положения $q_j=q_j^\circ$; можно сказать также, что квазиравновесия соответствуют положениям равновесия для медленных составляющих движения (см. ниже).

Тогда справедлива следующая теорема: если в некоторой точке $q_1=q_1^\circ,\ldots,q_n=q_n^\circ$ функция $\langle\min_{q^{\boldsymbol{\cdot}}} L\,(t,q,q^{\boldsymbol{\cdot}})\rangle$, где $L\,(t,q,q^{\boldsymbol{\cdot}})$ — лагранжиан системы, составленный с учетом выражений (3.2), имеет грубый максимум, то этой точке при достаточно малых μ отвечает асимптотически устойчивое квазиравновесие системы.

Минимаксный признак устойчивости был доказан при помощи асимптотического метода для канонических систем [36, 37]. Здесь этот признак будет получен посредством использования приведенной в разд. 2.2 теоремы И. Г. Малкина.

После подстановки в выражения для кинетической и потенциальной энергии (3.1) выражений (3.2) находим

$$L\,(t,q,q^{\boldsymbol{\cdot}})=T\,(t,q,q^{\boldsymbol{\cdot}})-\Pi\,(t,q)=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Big[a_{mj}(q)+ \tag{3.3}$$

$$+\mu\sum_k a_{mj,k}(q)\exp(i\nu_k\omega t)\Big]\,q_m^{\boldsymbol{\cdot}}q_j^{\boldsymbol{\cdot}}+\sum_{m=1}^{n}\sum_k b_{m,k}(q)\exp(i\nu_k\omega t)\,q_m^{\boldsymbol{\cdot}}-\Pi\,(q,0)+$$

$$+C_0(q)+\sum_{\substack{k\\ k\neq -p}}\sum_p C_{kp}(q)\exp\,[i\,(\nu_k+\nu_p)\,\omega t]+\mu R$$

$$a_{mj}=a_{1mj}(q,0),\qquad a_{mj,k}=\sum_{v=1}^{s}\frac{\partial a_{1mj}}{\partial u_v}\bigg|_{u=0}\mu_{v,k}$$

$$b_{m,k}=\sum_{j=1}^{s}a_{3mj}(q,0)\,u_{j,k}i\nu_k$$

$$C_0=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}a'_{2mj}(q,0)\sum_k u_{m,k}u_{j,-k}\nu_k^2$$

$$C_{kp}=-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}a_{2mj}(q,0)\,u_{m,k}u_{j,p}\nu_k\nu_p$$

$$R=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\sum_k\exp(i\nu_k\omega t)\sum_{v=1}^{s}\frac{\partial a_{2mj}}{\partial u_v}\bigg|_{u=0}u_{v,k}\sum_p u_{m,p}i\nu_p\times$$

$$\times \exp(i\nu_p\omega t)\sum_w u_{j,w} i\nu_w \exp(i\nu_w\omega t) - \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial \Pi}{\partial u_m}\Big|_{u=0} \times$$

$$\times \sum_k u_{m,k} \exp(i\nu_k\omega t) + \sum_{m=1}^{n}\sum_{j=1}^{s}\sum_k \exp(i\nu_k\omega t) \times$$

$$\times \sum_{v=1}^{s} \frac{\partial a_{3mj}}{\partial u_v}\Big|_{u=0} u_{v,k} \sum_p u_{j,p} i\nu_p \exp(i\nu_p\omega t)\, q_m^{\cdot} + O(\mu)$$

Выражение (3.3) записано при условии, что $u_{j,k}$ не зависят от переменных $q_1, \ldots, q_n$ и параметра μ. В случае $u_{j,k} = u_{j,k}(q_1, \ldots, q_n, \mu)$ структура лагранжиана (3.3) сохраняется, изменятся лишь выражения для $a_{mj,k}$ и R, что, как будет видно из дальнейшего, не влияет на конечный результат.

Отметим, что в данной работе под кинематическим возбуждением вибрации понимается такое возбуждение системы, при котором можно считать заданным закон колебаний части обобщенных координат. В работах [36, 37] вибрации вводятся несколько отличным способом. При этом, однако, выражение для функции Лагранжа имеет вид, аналогичный (3.3). Следует также отметить, что в системе, рассмотренной в [36, 37], непотенциальные силы отсутствуют, при этом речь идет о формальной устойчивости положений квазиравновесия. Введение диссипативных сил позволяет сформулировать признак асимптотической устойчивости квазиравновесий системы.

Заменой переменных

$$q_j = x_j,\ q_j' = \mu y_j\ (j = 1, \ldots, n)$$

уравнения движения системы могут быть представлены в виде

$$x_j' = X_j(x, y, \tau) + \mu F_j(x, y, \tau, \mu) \tag{3.4}$$

$$y_j' = X_{j+n}(x, y, \tau) + \mu F_{j+n}(x, y, \tau, \mu)\ (j = 1, \ldots, n)$$

Здесь

$$X_j = 0,\quad F_j = y_j$$

$$X_{j+n} = -\sum_{r=1}^{n} a_{jr}^{-1}(x) \sum_k b_{r,k}(x)\, i\nu_k \exp(i\nu_k\tau) \tag{3.5}$$

$$F_{j+n} = \sum_{r=1}^{n} a_{jr}^{-1}(x)\Big[-\sum_{m=1}^{n}\sum_k a_{rm,k}(x)\, i\nu_k \exp(i\nu_k\tau)\, y_m +$$

$$+ \sum_{m=1}^{n}\sum_k a_{rm,k}(x) \exp(i\nu_k\tau) \sum_{v=1}^{n} a_{mv}^{-1}(x) \sum_p b_{v,p}(x) \times$$

$$\times i\nu_p \exp(i\nu_p\tau) - \sum_{m=1}^{n}\sum_k \exp(i\nu_k\tau)\left(\frac{\partial b_{r,k}}{\partial x_m} - \frac{\partial b_{m,k}}{\partial x_r}\right) y_m -$$

$$- \sum_{v=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{vr}}{\partial x_m} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{vm}}{\partial x_r}\right) y_v y_m - \frac{\partial \Pi}{\partial x_r} + \frac{\partial C_0}{\partial x_r} -$$

$$- H_r(x, \tau) - \sum_{m=1}^{n} \beta_{rm} y_m\Big] + O(\mu) \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

H_r — известные функции быстрого времени $\tau = \omega t$ и обобщенных координат $q_1, \ldots, q_n$, $\langle H_r\rangle = 0$; a_{rj}^{-1} — элементы матрицы, обратной матрице коэффициентов a_{rj}; штрихом обозначено дифференцирование по τ.

Отвечающая уравнениям (3.4) порождающая система

$$x_j^{\circ\prime} = 0,\qquad y_j^{\circ\prime} = -\sum_{r=1}^{n} a_{jr}^{-1}(x^\circ) \sum_k b_{r,k}(x^\circ)\, i\nu_k \exp(i\nu_k\tau) \tag{3.6}$$

$$(j = 1, \ldots, n)$$

допускает семейство почти периодических решений, зависящее от $2n$ произвольных параметров $Q_1, \ldots, Q_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$

$$x_j^\circ = Q_j, \quad y_j^\circ = -\sum_{r=1}^{n} a_{jr}^{-1}(Q) \sum_k b_{r,k}(Q) \exp(i\nu_k\tau) + \gamma_j \tag{3.7}$$

$$(j = 1, \ldots, n)$$

Порождающей системе (3.6) и порождающему решению (3.7) соответствуют уравнения в вариациях

$$z_j' = 0, \quad z_{j+n}' = -\sum_k \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial}{\partial Q_m}\left(\sum_{r=1}^{n} a_{jr}^{-1} b_{r,k}\right) i\nu_k \exp(i\nu_k\tau)\, z_m \tag{3.8}$$

$$(j = 1, \ldots, n)$$

Удовлетворяющие условиям (2.21) периодические решения системы, сопряженной с (3.8), имеют вид

$$z_{j,s}^* = \delta_{js}, \quad z_{j,s+n}^* = \frac{\partial}{\partial Q_j}\left(\sum_{r=1}^{n} a_{sr}^{-1}(Q) \sum_k b_{r,k}(Q) \exp(i\nu_k\tau)\right) \tag{3.9}$$

$$z_{j+n,s}^* = 0, \quad z_{j+n,s+n}^* = \delta_{js} \quad (j = 1, \ldots, n;\ s = 1, \ldots, n)$$

Учитывая, что

$$\langle \psi_j''\psi_m + \psi_j'\psi_m' \rangle = 0$$

$$\langle i\nu_k \exp(i\nu_k\tau)\psi_j' + \exp(i\nu_k\tau)\psi_j'' \rangle = 0$$

$$\langle i\nu_k \exp(i\nu_k\tau)\psi_j + \exp(i\nu_k\tau)\psi_j' \rangle = 0$$

$$\left\langle \sum_{j=1}^{n} \psi_j' \sum_k \exp(i\nu_k\tau) \frac{\partial b_{j,k}}{\partial Q_r} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial a_{mj}}{\partial Q_r} \psi_j'\psi_m' \right\rangle =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial Q_r} \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} a_{jm}^{-1}(Q) \sum_k b_{j,k} b_{m,-k}$$

$$\psi_r = -\sum_{j=1}^{n} a_{rj}^{-1}(Q) \sum_k \frac{b_{j,k}(Q)}{i\nu_k} \exp(i\nu_k\tau) \quad (r = 1, \ldots, n) \tag{3.10}$$

а также соотношения (3.5), после подстановки решения (3.9) в уравнения (2.19) получим

$$P_s \equiv \langle F_s \rangle = \gamma_s, \quad P_{s+n} \equiv \left\langle \sum_{j=1}^{n} F_j \frac{\partial}{\partial Q_j}\left(\sum_{r=1}^{n} a_{sr}^{-1} \sum_k b_{r,k}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \exp(i\nu_k\tau) + F_{s+n} \right\rangle = \sum_{r=1}^{n} a_{sr}^{-1} \left[-\frac{\partial D}{\partial Q_r} - \sum_{m=1}^{n} \beta_{rm}\gamma_m - \right.$$

$$\left. - \sum_{v=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{\partial a_{vr}}{\partial Q_m} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{vm}}{\partial Q_r} \right) \gamma_v \gamma_m \right] \quad (s = 1, \ldots, n)$$

Здесь

$$D = \Pi(Q, 0) - C_0(Q) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} a_{jm}^{-1}(Q) \sum_k b_{j,k}(Q)\, b_{m,-k}(Q) \tag{3.11}$$

Следовательно, параметры порождающего решения удовлетворяют условиям

$$\gamma_j = 0, \quad \partial D / \partial Q_j = 0 \quad (j = 1, \ldots, n)$$

Допустим, что $Q_1 = Q_1^\circ, \ldots, Q_n = Q_n^\circ$ — стационарная точка потенциальной функции D, и рассмотрим условия устойчивости почти периодического решения исходной системы, отвечающего порождающему решению с параметрами $\gamma_j = 0, Q_j = Q_j^\circ$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Определитель, стоящий в левой части уравнения (2.20), может быть преобразован к виду

$$\Delta(\lambda) = \left| \sum_{r=1}^{n} a_{sr}^{-1}(Q^\circ) \frac{\partial^2 D}{\partial Q_r \partial Q_j}\Big|_{Q=Q^\circ} + \lambda \sum_{r=1}^{n} a_{sr}^{-1}(Q^\circ)\, \beta_{rj} + \lambda^2 \delta_{sj} \right|$$

При этом

$$\Delta(\lambda) = 0 \tag{3.12}$$

— характеристическое уравнение, служащее для исследования устойчивости положений равновесия системы

$$\sum_{j=1}^{n} a_{rj}(Q)\, Q_j^{\cdot\cdot} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{\partial a_{rj}}{\partial Q_m} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{mj}}{\partial Q_r} \right) Q_j^{\cdot} Q_m^{\cdot} = -\frac{\partial D}{\partial Q_r} - \sum_{m=1}^{n} \beta_{rm} Q_m^{\cdot} \tag{3.13}$$

$$(r = 1, \ldots, n)$$

Можно убедиться [36, 37], что выражение (3.11) для потенциальной функции представляет собой с точностью до величин порядка μ взятый с противоположным знаком усредненный минимум по переменным $Q_1^{\cdot}, \ldots, Q_n^{\cdot}$ лагранжиана (3.3).

Если в системе (3.13) отсутствуют силы трения, то на основании теоремы Лагранжа об устойчивости положений равновесия консервативных систем можно заключить, что точкам грубого минимума функции D соответствуют устойчивые положения равновесия. При добавлении диссипативных сил с полной диссипацией эти положения равновесия становятся асимптотически устойчивыми [28], и все корни уравнения (3.12) имеют отрицательные вещественные части. Таким образом, условия грубого минимума в точке $Q_1 = Q_1^\circ, \ldots, Q_n = Q_n^\circ$ потенциальной функции $D = -\langle \min_{Q^{\cdot}} L(t, Q, Q^{\cdot}) \rangle$ являются достаточными условиями существования асимптотически устойчивого почти периодического решения исходной системы, обращающегося при $\mu = 0$ в порождающее решение (3.7), где $\gamma_j = 0$, $Q_j = Q_j^\circ$ $(j = 1, \ldots, n)$. Это и требовалось доказать.

Отметим, что если координаты $u_1, \ldots, u_s$ периодичны по t с некоторым периодом $T = O(\mu)$ и имеют по t непрерывные производные второго порядка, то условия, вытекающие из минимаксного признака, являются также и необходимыми в том смысле, что при отсутствии в точке $Q_1 = Q_1^\circ, \ldots, Q_n = Q_n^\circ$ минимума функции D и при условии, что уравнение (3.12) не имеет нулевых корней, соответствующее периодическое решение исходной системы неустойчиво.

Отметим также, что минимаксный признак устойчивости может быть получен и методом прямого разделения движений [10, 11], который позволяет представить уравнения для медленных составляющих $Q_1, \ldots, Q_n$ в виде (3.13). При этом быстрые составляющие имеют вид $\mu\psi_j$ $(j = 1, \ldots, n)$, где ψ_j определяется соотношением (3.10).

4. Системы с динамическим возбуждением вибрации. Предположим, что движение системы описывается уравнениями

$$\sum_{j=1}^{n} a_{rj}(q)\, q_j^{\cdot\cdot} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{\partial a_{rj}}{\partial q_m} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{mj}}{\partial q_r} \right) q_j^{\cdot} q_m^{\cdot} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \beta_{rj} q_j^{\cdot} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_r} + \frac{1}{\mu} \sum_{k} f_{r,k}(q, \mu) \exp(i\nu_k \omega t) \quad (r = 1, \ldots, n) \tag{4.1}$$

$$\nu_k \neq 0, \quad \nu_{-k} = -\nu_k, \quad f_{r,-k} = \bar{f}_{r,k}, \quad \omega = 1/\mu$$

где $\Pi(q, \mu)$ — потенциальная энергия системы, μ — малый параметр, матрица инерционных коэффициентов $a_{rj}(q)$ предполагается положительно определенной, последняя сумма в левой части равенства (4.1) — силы вязкого трения с полной диссипацией.

Предположим, что выполнены соотношения

$$\partial f_{m,k}/\partial q_r |_{\mu=0} = \partial f_{r,k}/\partial q_m |_{\mu=0} \tag{4.2}$$

$$(m = 1, \ldots, n; \; r = 1, \ldots, n)$$

При сформулированных условиях справедлива теорема: если в некоторой точке $q_1 = q_1^\circ, \ldots, q_n = q_n^\circ$ функция

$$D = \Pi |_{\mu=0} + \Pi_W \tag{4.3}$$

где

$$\Pi_W = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} a_{jm}^{-1}(q) \sum_k \frac{f_{j,k}(q,0) f_{m,-k}(q,0)}{\nu_k^2} \tag{4.4}$$

имеет грубый минимум, то этой точке при достаточно малых значениях μ отвечает асимптотически устойчивое квазиравновесие системы (4.1).

Здесь a_{jm}^{-1} — элементы матрицы, обратной матрице коэффициентов a_{jm}.

Остановимся на доказательстве сформулированного экстремального признака устойчивости с помощью теоремы И. Г. Малкина, приведенной в разд. 2.2.

Положим $q_j = x_j$, $q_j' = \mu y_j$ (штрихом обозначено дифференцирование по $\tau = \omega t$) и преобразуем уравнения (4.1) к виду (3.4). Получим

$$X_j = 0, \quad F_j = y_j$$

$$X_{j+n} = \sum_{r=1}^{n} a_{jr}^{-1}(x) \sum_k f_{r,k}(x,0) \exp(i\nu_k\tau)$$

$$F_{j+n} = \sum_{r=1}^{n} a_{jr}^{-1}(x) \left[-\frac{\partial \Pi}{\partial x_r}\bigg|_{\mu=0} - \sum_{m=1}^{n} \beta_{rm} y_m - \right.$$

$$\left. - \sum_{p=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{\partial a_{pr}}{\partial x_m} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{pm}}{\partial x_r} \right) y_p y_m + \sum_k \frac{\partial f_{r,k}}{\partial \mu}\bigg|_{\mu=0} \exp(i\nu_k\tau) \right] + O(\mu)$$

$$(j = 1, \ldots, n)$$

Тогда уравнения (2.19) для определения параметров $Q_1, \ldots, Q_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ порождающего решения системы запишутся следующим образом:

$$P_s \equiv \gamma_s = 0, \quad P_{s+n} \equiv \sum_{r=1}^{n} a_{sr}^{-1}(Q) \left[-\frac{\partial \Pi}{\partial Q_r}\bigg|_{\mu=0} - \sum_{m=1}^{n} \beta_{rm}\gamma_m - \right.$$

$$\left. - \sum_{p=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{\partial a_{pr}}{\partial Q_m} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{pm}}{\partial Q_r} \right) \gamma_p \gamma_r - W_r(Q) \right] = 0 \quad (s = 1, \ldots, n) \tag{4.5}$$

$$W_r = \frac{\partial}{\partial Q_r} \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} a_{jm}^{-1}(Q) \sum_k \frac{f_{j,k}(Q,0) f_{m,-k}(Q,0)}{\nu_k^2} \right) +$$

$$+ \left\langle \sum_{m=1}^{n} \sum_k \left(\frac{\partial f_{m,k}}{\partial Q_r}\bigg|_{\mu=0} - \frac{\partial f_{r,k}}{\partial Q_m}\bigg|_{\mu=0} \right) \psi_m \exp(i\nu_k\tau) \right\rangle \quad (r = 1, \ldots, n) \tag{4.6}$$

$$\psi_r = -\sum_{j=1}^{n} a_{rj}^{-1}(Q) \sum_k \frac{f_{j,k}(Q,0)}{\nu_k^2} \exp(i\nu_k\tau) \tag{4.7}$$

где W_r — так называемые вибрационные силы.

Пусть $Q_1 = Q_1^\circ, \ldots, Q_n = Q_n^\circ$ — решение системы

$$\partial\Pi / \partial Q_j \big|_{\mu=0} + W_j(Q) = 0 \quad (j = 1, \ldots, n) \tag{4.8}$$

Если при этом алгебраическое уравнение

$$\Delta(\lambda) \equiv \left| \sum_{r=1}^{n} a_{sr}^{-1}(Q^\circ) \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_r \partial Q_j}\bigg|_{\substack{Q=Q^\circ,\\ \mu=0}} + \frac{\partial W_r}{\partial Q_j}\bigg|_{Q=Q^\circ} \right) + \lambda \sum_{r=1}^{n} a_{sr}^{-1}(Q^\circ)\beta_{rj} + \lambda^2 \delta_{sj} \right| = 0 \tag{4.9}$$

не имеет корней с вещественными частями, равными нулю, то при достаточно малом μ исходная система (3.4) допускает почти периодическое решение, обращающееся при $\mu = 0$ в порождающее с параметрами $\gamma_j = 0$, $Q_j = Q_j^\circ$ $(j = 1, \ldots, n)$. Если все корни уравнения (4.9) имеют отрицательные вещественные части, то рассматриваемое почти периодическое решение системы (3.4) асимптотически устойчиво.

В общем случае вибрационные силы (4.6) могут не иметь потенциала. Однако если выполнены условия (4.2), то «потенциальная энергия вибрационных сил» (4.6) существует и для нее справедливо выражение (4.4). Допустим далее, что в точке $Q_1 = Q_1^\circ, \ldots, Q_n = Q_n^\circ$ потенциальная функция (4.3) имеет грубый минимум. Тогда

$Q_1 = Q_1^\circ, \ldots, Q_n = Q_n^\circ$ — решение системы (4.8) и, кроме того, все корни уравнения (4.9) имеют отрицательные вещественные части. Следовательно, для того чтобы некоторой точке $Q_1 = Q_1^\circ, \ldots, Q_n = Q_n^\circ$ при наличии условий (4.2) соответствовало асимптотически устойчивое положение квазиравновесия исходной системы, достаточно, чтобы эта точка являлась точкой грубого минимума потенциальной функции (4.3).

Отметим, что выражение для потенциальной функции, аналогичное (4.3), найдено при решении задачи о поведении частицы в одномерном быстроосциллирующем поле в [24]. Однако предложенное обобщение формулы на случай систем со многими степенями свободы справедливо лишь при выполнении дополнительных условий (4.2), обеспечивающих существование потенциала вибрационных сил. Эти условия весьма существенны, ибо требуют выполнения равенств относительно амплитуд гармонических составляющих поля. На данное обстоятельство указано в [42]. Практически одновременно с книгой [24] были опубликованы статьи [19, 29], где получено выражение для потенциальной функции в задаче о движении заряженной частицы в трехмерном быстро осциллирующем электромагнитном поле.

Было обнаружено существование потенциальной функции — «потенциальной энергии амплитуд установившихся колебаний» — при решении асимптотическими методами задачи о колебаниях круглой пластины под действием случайной нагрузки [18].

Если в уравнениях (4.1) вместо конечных сумм в правой части фигурируют некоторые функции $f_r(q, \mu, t)$, периодические по t с периодом $T = O(\mu)$, то при условии, что уравнение (4.9) не имеет нулевых корней, данный признак дает также и необходимые условия асимптотической устойчивости соответствующих квазиравновесий исходной системы.

Заметим, что системы с динамическим возбуждением вибрации могут быть изучены также методом прямого разделения движений.

5. Приложения экстремальных признаков устойчивости. *5.1. Обоснование тенденции к синхронизации некоторых классов слабосвязанных динамических объектов.* При помощи интегрального признака устойчивости удалось доказать тенденцию к синхронизации — наличие по крайней мере одного устойчивого в том или ином смысле синхронного движения — для ряда важных классов динамических объектов при достаточно общих предположениях [10]. К таким объектам относятся объекты с почти равномерными вращениями и почти консервативные объекты. Схема доказательства при этом достаточно проста: функции $\Lambda = \langle[L]\rangle$, $\Lambda^{(\mathrm{I})} = \langle[L^{(\mathrm{I})}]\rangle$ и $\Lambda^{(\mathrm{II})} = \langle[L^{(\mathrm{II})}]\rangle$, фигурирующие в выражениях (2.4), (2.6), (2.7), (2.9), (2.11) и представляющие «основную часть» потенциальной функции D, являются периодическими относительно $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ (или $\alpha_1 - \alpha_k, \ldots, \alpha_{k-1} - \alpha_k$ в случае автономных систем). Поэтому при весьма общих предположениях функция D имеет минимумы. Иными словами, удается показать, что в пространстве параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ (или $\alpha_1 - \alpha_k, \ldots, \alpha_{k-1} - \alpha_k$) непременно существуют «потенциальные ямы», отвечающие устойчивым синхронным движениям. В частности, таким путем получает общее объяснение неслучайный характер частой встречаемости синхронизмов (резонансов) в орбитальных движениях тел Солнечной системы (см. также разд. 5.5).

5.2. Приложения к созданию новых вибрационных машин и технологий. Интегральный признак устойчивости синхронных движений является рабочим инструментом при изыскании принципиальных схем нового класса вибрационных машин и устройств — машин с самосинхронизирующимися механическими вибровозбудителями. Важнейшие из указанных схем рассмотрены в книгах [9, 10] и справочнике [17]. Приложения минимаксного признака к исследованию ряда систем с кинематическим возбуждением вибрации рассмотрены в книге [37], а также в статье [14].

5.3. Обобщение классического принципа автобалансировки. Еще в 1884 г. шведский инженер Лаваль обнаружил, что неуравновешенный диск, сидящий на гибком валу, в закритической области частот вращения, т. е. при частотах ω, значительно больших частоты свободных колебаний ротора p, самоцентрируется; его центр тяжести располагается практически на оси вращения; это приводит к существенному снижению неуравновешенных усилий, передаваемых на опоры вала. Указанный эффект успешно используется в машинах.

Из интегрального признака устойчивости, приведенного в разд. 2.1, вытекает обобщение принципа автобалансировки на многороторные системы, состоящее в следующем [10]. Для механических вибровозбудителей (неуравновешенных роторов, приводимых от двигателей асинхронного типа) в случае, если они обладают одинаковыми парциальными угловыми скоростями и установлены на твердом теле, линейно-упруго связанном с неподвижным основанием, и при условии, что движение происходит на достаточном удалении от резонанса, когда силами сопротивления колебаниям тела можно пренебречь, величина B в выражении (2.4) равна нулю; равно нулю в этом случае и выражение $\Lambda^{(II)}$ (подробнее см. в книгах [9, 10]). В результате согласно (2.7) потенциальная функция

$$D = D(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \Lambda^{(I)} = \langle [T^{(I)}] - [\Pi^{(I)}] \rangle \tag{5.1}$$

где $[T^{(I)}]$ и $[\Pi^{(I)}]$ — соответственно кинетическая и потенциальная энергии тела, вычисленные в предположении, что роторы возбудителей вращаются равномерно по закону $\varphi_s = \varphi_s{}^\circ = \sigma_s(\omega t + \alpha_s)$, а тело совершает установившиеся колебания под действием вынуждающих сил, генерируемых возбудителями при таком вращении. В далеко закритической области частот вращения $\omega \gg \lambda_i$ (λ_i — частоты свободных колебаний тела) $T^{(I)} \gg \Pi^{(I)}$ и тогда

$$D = D(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \langle T^{(I)} \rangle \tag{5.2}$$

Таким образом из интегрального признака устойчивости вытекает, что в далеко закритической области частот устойчивой является такая фазировка роторов $\alpha_1^*, \ldots, \alpha_k^*$, при которой их неуравновешенности будут взаимно компенсироваться (в смысле минимизации значения $\langle T^{(I)} \rangle$). В частности, если возможна фазировка, при которой $T^{(I)} = 0$, то именно она и окажется устойчивой, т. е. твердое тело будет неподвижным; эту фазировку называют компенсирующей.

Для роторов с неодинаковыми парциальными скоростями, когда $B \neq 0$, сформулированная закономерность сохраняется в виде некоторой тенденции.

Более детальное исследование выражений (2.4) и (5.1), а также анализ решения ряда задач, позволяет прийти к следующему положению, которое и можно рассматривать как обобщенный принцип автобалансировки роторов.

Отдельные роторы или несколько синхронно вращающихся роторов, установленные в единой линейной колебательной системе и вызывающие ее колебания вследствие неуравновешенности или других факторов, обнаруживают в области частот вращения выше наибольшей частоты свободных колебаний системы тенденцию к ослаблению колебаний, в области частот вращения ниже наименьшей частоты свободных колебаний — к усилению колебаний системы, а промежуточный диапазон частот вращения распадается на промежутки, в которых поочередно имеет место тенденция то к самоуравновешиванию, то к усилению колебаний.

Обоснование сформулированного положения, а также примеры использования при создании автоматических балансиров, групповых фундаментов под неуравновешенные машины и других устройств, приводятся в книге [9]; там же приведен обзор соответствующих исследований.

5.4. Приложения к теории электромеханических систем. Сформулированный в разд. 2.3 интегральный признак устойчивости может быть использован для исследования колебаний электромеханических систем [39, 40]. Речь идет о системах тел, включающих m линейных проводников, к которым приложены внешние э. д. с., причем активные сопротивления проводников малы по сравнению с индуктивными, а внешние э. д. с.— заданные периодические функции времени с малыми постоянными составляющими. Предполагается также, что энергией электрического поля можно пренебречь, а магнитное поле — считать квазистационарным (квазициклическими координатами здесь являются заряды q_r ($r = 1, \ldots, m$), а позиционными — механические обобщенные координаты $q_{m+1}, \ldots, q_n$). При указанных допущениях и при условии, что непотенциальные механические силы удовлетворяют соотношениям (2.35), потенциальная функция (2.36) (где α_r — постоянные составляющие магнитных потоков) равна среднему за период значению энергии магнитного поля, из которого вычтены среднее за период значение механического кинетического потенциала и энергия подмагничивания.

5.5. Приложения к проблеме резонансов (синхронизмов) при движении небесных тел. Задачам о резонансах (синхронизмах), являющимся одними из основных в проблеме многих тел, посвящено значительное число как классических, так и современных исследований. Здесь остановимся преимущественно на относящихся к этой проблеме следствиях, вытекающих из результатов, которые изложены в разд. 2; как отмечалось, ти результаты также получены путем использования классических методов Пуанкаре [35] и Ляпунова [26].

В 1973 г. чисто эвристически был сформулирован так называемый принцип наименьшего взаимодействия [44]: спутниковая (или планетная) система N тел, движущихся под действием сил гравитационного притяжения, будет большую часть времени находиться в конфигурации, для которой среднее по времени от силовой функции возмущений минимально, и эта конфигурация будет резонансной, т. е. будут иметь место определенные соизмеримости между средними движениями (частотами обращения). Силовая функция возмущений определяется соотношением

$$U_p' = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j>i}^{N} f \frac{m_i m_j}{\rho_{ij}}$$

где m_i, m_j — массы спутников, ρ_{ij} — взаимные расстояния между ними, f — постоянная тяготения. То, что именно резонансная конфигурация соответствует абсолютному минимуму взаимодействия, было проверено модельными расчетами [44].

Утверждение [44] тесно связано с классическим результатом Пуанкаре [35], из которого вытекает, что стационарным точкам (по начальным фазам движения планет) усредненного значения функции U_p, вычисленной для невозмущенного движения, отвечают синхронные (резонансные) средние движения планет.

Было показано [10, 12], что из результатов исследований [32, 34], обобщающих интегральный признак устойчивости на квазиконсервативные системы, следует, что упомянутым минимумам усредненного потенциала взаимодействия соответствуют устойчивые по начальным фазам синхронные движения. А именно, в рассматриваемом случае объекты являются мягко анизохронными и выражение для потенциальной функции (2.11) имеет вид

$$D = \langle [U_p] \rangle - \langle [T^{(\mathrm{I})}] \rangle + B \tag{5.3}$$

где $T^{(\mathrm{I})}$ — кинетическая энергия центрального тела, а квадратные скобки указывают на то, что соответствующие величины вычисляются для невозмущенных (кеплеровских) орбит.

В предположениях о значительно большей массе центрального тела по сравнению с массами $m_1, \ldots, m_N$ и о малости диссипативных сил получим

$$D \approx \langle [U_p] \rangle \tag{5.4}$$

Подчеркнем, что в соответствии с замечанием 2° из разд. 2.2 здесь идет речь об устойчивости движения по разностям фаз обращений тел, за которые в данном случае могут быть приняты, например, соответствующие аргументы широты.

Для большинства тел Солнечной системы невозмущенные орбиты имеют малые эксцентриситеты e_s и малые взаимные наклоны J_{sj}. Анализ разложения функции $D = \langle [U_p] \rangle$ по степеням e_s и $\nu_s = \sin^2 (J_{sj}/2)$, полученного А. В. Веретинским, показывает, что учет только свободного члена этого разложения, соответствующего круговым орбитам, лежащим в одной плоскости, приводит к взаимодействиям тел, обусловливающим возможность только резонансов типа 1 : 1, т. е. обращений с одинаковыми средними движениями; учет линейных членов — резонансов типа $l : (l \pm 1)$ и $l : (l \pm 2)$; квадратичных членов — также резонансов типа $l : (l \pm 3)$ и $l : (l \pm 4)$; естественно, что последующие взаимодействия при этом, вообще говоря, слабее, чем предыдущие. Исходя из сказанного, можно предложить следующую классификацию орбитальных резонансов по степени их «относительной силы» (при фиксированном l): к нулевому порядку будем относить резонансы типа $l : l$, к первому — типа $l : (l \pm 1)$ и $l : (l \pm 2)$, ко второму — типа $l : (l \pm 3)$ и $l : (l \pm 4)$ и т. д. (см. также классификацию периодических движений по сортам у Пуанкаре [35]).

При учете изложенного не удивительно, что подавляющее большинство «ярких» резонансов в Солнечной системе имеет порядок не выше второго. Такие резонансы можно назвать простыми резонансами. Естественно также предположить, что известная гипотеза А. М. Молчанова о полной резонансности орбитальных движений больших планет Солнечной системы [10, 12] в действительности справедлива именно для простых резонансов. Заметим в этой связи, что экстремальное свойство резонансных движений позволяет осуществить своеобразную «проверку» гипотез о близости движения планетной или спутниковой системы к резонансу: можно вычислить с помощью ЭВМ значение функции D для наблюдаемого движения и сравнить его с соответствующими минимальными значениями этой функции; представляет интерес также определение направления эволюционного изменения функции D.

Как уже отмечалось в разд. 5.1, приведенные результаты дают общее теоретическое объяснение факта относительно частой встречаемости резонансов в орбитальных движениях небесных тел — тенденции к установлению синхронизмов. Одним из достижений этой концепции является гипотеза о резонансной природе колец Урана, согласно которой положения этих колец определяются резонансами типа 1 : 2, 2 : 3 и 3 : 4 от неоткрытых спутников; такие спутники позднее действительно были открыты «Вояджером-2» [20].

Выше речь шла только о резонансах в орбитальных движениях небесных тел, поскольку интегральный признак устойчивости, основанный на формуле (2.11), не может быть использован в задачах об орбитально-вращательных резонансах, так как характер анизохронизма при движении тела на орбите и вращательного движения тела относительно его центра масс различный (для первого $\sigma = -1$, а для второго $\sigma = +1$). В то же время в признаке устойчивости, выдвинутом в [1, 3] (см. разд. 2.2), характер анизохронизма не фигурирует. Были приведены [1] результаты численного эксперимента, хорошо согласующиеся с этим признаком.

На основании иных, неклассических представлений проблемы устойчивости, резонансности и экстремальности рассмотрены в книге [41].

5.6. Задача оптимизации двуногой ходьбы. Для этой задачи показано, что синхронным (резонансным) режимам отвечают минимумы функционала, характеризующего энергозатраты в системе [3]. На этом пути удалось обнаружить ряд существенных периодических режимов ходьбы.

Авторы благодарят В. В. Румянцева и его коллег за обсуждение и замечания, а также В. В. Козлова, обратившего внимание на исследование Пуанкаре, изложенное в разд. I, и сделавшего ряд других замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белецкий В. В., Шляхтин А. Н.* Экстремальные свойства резонансных движений // Докл. АН СССР. 1976. Т. 231. № 4. С. 829—832.
2. *Белецкий В. В., Касаткин Г. В.* Об экстремальных свойствах резонансных движений // Докл. АН СССР. 1980. Т. 251. № 1. С. 58—62.
3. *Белецкий В. В.* Экстремальные свойства резонансных движений // Устойчивость движения. Аналитическая механика. Управление движением. М.: Наука, 1981. С. 41—55.
4. *Белецкий В. В.* Резонансные явления во вращательных движениях искусственных и естественных небесных тел // Динамика космических аппаратов и исследование космического пространства. М.: Машиностроение, 1986. С. 20—42.
5. *Блехман И. И.* К вопросу об устойчивости периодических решений квазилинейных неавтономных систем со многими степенями свободы // Докл. АН СССР. Т. 104. № 6. С. 809—812.
6. *Блехман И. И.* Об устойчивости периодических решений квазилинейных автономных систем со многими степенями свободы // Докл. АН СССР. 1957. Т. 112. № 2. С. 183—186.
7. *Блехман И. И., Лавров Б. П.* Об одном интегральном признаке устойчивости движения // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 5. С. 938—941.
8. *Блехман И. И.* Обоснование интегрального признака устойчивости движения в задачах о самосинхронизации вибраторов // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 6. С. 1100—1103.
9. *Блехман И. И.* Синхронизация динамических систем. М.: Наука, 1971. 894 с.
10. *Блехман И. И.* Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981. 351 с.
11. *Блехман И. И.* Развитие концепции прямого разделения движений в нелинейной механике // Современные проблемы теоретической и прикладной механики. Киев: Наук. думка, 1978. С. 148—168.
12. *Блехман И. И.* Устойчивость орбитальных систем // Тез. докл. 3-й Всесоюз. Четаевской конф. по устойчивости движения, аналитической механике и управлению движением. Иркутск: Изд-во СО АН СССР, 1977. С. 95.
13. *Блехман И. И.* Обобщение теоремы Лагранжа — Дирихле об устойчивости положений равновесия на некоторые классы периодических и вращательных движений // Докл. 9-й Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. Киев, 1984. Т. 3. С. 34—36.
14. *Блехман И. И., Малахова О. З.* О квазиравновесных положениях маятника Челомея // Докл. АН СССР. 1986. Т. 287. № 2. С. 290—294.
15. *Боголюбов Н. Н.* О некоторых статистических методах в математической физике. Киев: Изд-во АН УССР, 1945. 139 с.

[3] *Белецкий В. В., Голубицкая М. Д.* Стабилизация и резонансные явления в модельной задаче двуногой ходьбы: Препринт № 14. М.: Ин-т прикладной математики им. М. В. Келдыша, 1987. 23 с.

16. *Валеев К. Г., Ганиев Р. Ф.* Исследование колебаний нелинейных систем // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 3. С. 413—430.
17. Вибрации в технике: Справочник. Т. 4. Вибрационные процессы и машины. М.: 1981. 509 с.
18. *Ворович И. И.* Некоторые вопросы использования статистических методов в теории устойчивости пластин и оболочек // Тр. 4-й Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1964. С. 64—94.
19. *Гапонов А. В., Миллер М. А.* Об использовании движущихся высокочастотных потенциальных ям для ускорения заряженных частиц // ЖЭТФ. 1958. Т. 34. № 3. С. 751—752.
20. *Горькавый Н. Н., Фридман А. М.* Об открытии Вояджером-2 предсказанных спутников, определяющих резонансную природу колец Урана // Письма в Астрон. журн. 1987. Т. 13. № 3. С. 237—244.
21. *Гуртовник А. С., Неймарк Ю. И.* О синхронизации динамических систем // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 5. С. 800—809.
22. *Козлов В. В.* Усреднение в окрестности устойчивых периодических движений // Докл. АН СССР. 1982. Т. 264. № 3. С. 567—570.
23. *Лавров Б. П.* Новая формулировка интегрального критерия устойчивости синхронных движений механических вибраторов и ее приложения // Вибрационная техника (материалы науч.-техн. конф.). М.: НИИинфстройдоркоммунмаш, 1966. С. 306—311.
24. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. I. Механика М.: Физматгиз, 1958. 206 с.
25. *Лурье А. И.* Некоторые задачи самосинхронизации // Тр. 5-й Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1970. Т. 3. С. 440—455.
26. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 472 с.
27 *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.
28. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1976 319 с.
29. *Миллер М. А.* Движение заряженных частиц в высокочастотных электромагнитных полях // Изв. вузов. Радиофизика. 1958. Т. I. № 3. С. 110—123.
30. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. Киев: Наук. думка, 1971. 440 с.
31. *Нагаев Р. Ф.* Синхронизация в системе существенно нелинейных объектов с одной степенью свободы // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 2. С. 209—217.
32. *Нагаев Р. Ф.* Общая задача о синхронизации в почти консервативной системе // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 5. С. 801—809.
33. *Нагаев Р. Ф., Ходжаев К. Ш.* Синхронные движения в системе объектов с несущими связями // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 4. С. 631—642.
34. *Нагаев Р. Ф.* Случай порождающего семейства квазипериодических решений в теории малого параметра // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 6. С. 990—998.
35. *Пуанкаре А.* Избранные труды. Т. I. Новые методы небесной механики. М.: Наука, 1971. 771 с.
36. *Стрижак Т. Г.* Метод усреднения в задачах механики. Киев: Донецк: Вища шк. 1982. 252 с.
37. *Стрижак Т. Г.* Асимптотический метод нормализации. Киев: Вища шк. 1984. 280 с.
38. *Ходжаев К. Ш.* Синхронизация механических вибраторов, связанных с линейной колебательной системой // Инж. журн. МТТ. 1967. № 4. С. 14—24.
39. *Ходжаев К. Ш.* Интегральный критерий устойчивости для систем с квазициклическими координатами и энергетические соотношения при колебаниях проводников с токами // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 1. С. 85—100.
40. *Ходжаев К. Ш.* Колебания нелинейных электромеханических систем // Вибрация в технике: Справочник. Т. 2. Колебания нелинейных механических систем. М.: Машиностроение, 1979. С. 331—347.
41. *Чечельницкий А. М.* Экстремальность, устойчивость, резонансность в астродинамике и космонавтике. М.: Машиностроение, 1980. 311 с.
42. *Шаталов С. Д.* Разделение движений в электромеханических системах. Автореф. дис. ...канд. физ.-мат. наук. Л., 1981. 16 с.
43. *Шинкин В. Н.* О поиске устойчивых резонансных режимов с помощью их экстремальных свойств // Вестн. МГУ. Сер. Вычисл. математика и кибернетика. 1981. № 2. С. 22—29.
44. *Ovenden M. W., Feagin T., Graff O.* On the principle of least interaction action and the Laplacian satellites of Jupiter and Uranus // Celest. Mech. 1974. V. 8. № 3. P. 455—471.
45. *Sperling L.* Selbstsynchronisation unwuchtbehafteter Rotoren an elastischen Ketten // Intern. Tagung Verfahren und Geräte der mech. Schwingungstechnik. Magdeburg: Techn. Hochshule otto von Guericke, 1965. Teil 2. S. 218—229.
46. *Sperling L.* Beitrag zur allgemeinen Theorie der Selbstsynchronisation umlaufender Unwuchtmassen in Nichtresonanzfall // Wiss. Techn. Hochschule Otto von Guericke Magdeburg. 1967. H. 1. Bd. 11. S. 63—87.

Ленинград

Поступила в редакцию
4.IV.1988