Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 1, 1990

УДК 539.375

С. А. Назаров, О. Р. Полякова

КОЭФФИЦИЕНТЫ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ ДЛЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СБЛИЖЕННЫХ ТРЕЩИН В ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ

Вычисляется асимптотика коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) в вершинах параллельных трещин различной длины; относительное расстояние между трещинами считается малым параметром. Изучению взаимодействия двух или нескольких трещин посвящено большое количество исследований (см. обзоры в [1, 2] и др.). Известны приближенные формулы для КИН в случае удаленных трещин. Найденные в работе асимптотические формулы относятся к противоположной ситуации, в которой, в частности, затруднено применение численных методов. Используются варианты алгорифмов [3—5], а результаты выражаются через решение задачи об одной трещине.

1. Постановка задачи. Пусть Ω — область на плоскости $\mathbf{R}^2$, содержащая отрезок $M=\{\mathbf{x}: x_2=0, |x_1|<a\}$. Положим $N_\varepsilon=\{\mathbf{x}: x_2=\varepsilon, x_1\in[-b_-, b_+]\}$. Масштабированием характерный размер области Ω сведем к единичному; тогда декартовы координаты и величины ε, a, $b_\pm$ станут безразмерными. Будем считать, что относительное расстояние ε между трещинами — малый параметр задачи, причем числа a, $\pm b_\pm$, $a\mp b_\pm$ и расстояние от M до $\partial\Omega$ много больше ε. Рассмотрим задачу о плоской деформации однородного изотропного тела, ослабленного параллельными близко расположенными трещинами M и N_ε. Пусть массовые силы отсутствуют, берега трещины свободны от напряжений и на тело действует самоуравновешенная внешняя нагрузка $\mathbf{p}$. Математическая постановка задачи следующая:

$$L(\partial/\partial\mathbf{x})\,u^\varepsilon(\mathbf{x})\equiv\mu\Delta\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x})+(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x})=0,\quad \mathbf{x}\in\Omega_\varepsilon=\Omega\setminus(M\cup N_\varepsilon) \tag{1.1}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(n)}(\mathbf{u}^\varepsilon;\mathbf{x})=\mathbf{p}(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in\partial\Omega \tag{1.2}$$

$$\sigma_{12}(\mathbf{u}^\varepsilon;\mathbf{x})=\sigma_{22}(\mathbf{u}^\varepsilon;\mathbf{x})=0,\quad \mathbf{x}\in M\cup N_\varepsilon \tag{1.3}$$

Здесь λ, μ — коэффициенты Ламе, $\mathbf{u}^\varepsilon$ — вектор смещений, $\sigma(\mathbf{u}^\varepsilon)$ — тензор напряжений, $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали, $\boldsymbol{\sigma}^{(n)}=\sigma\cdot\mathbf{n}$.

Так как $N_0\subset M$, то при $\varepsilon\to0$ область Ω_ε переходит в область Ω_0 с одной трещиной M; $\Omega_0=\Omega\setminus M$. Обозначим $\mathbf{v}^\circ$ решение соответствующей задачи

$$L(\partial/\partial\mathbf{x})\,\mathbf{v}^\circ(\mathbf{x})=0,\quad \mathbf{x}\in\Omega_0;\quad \sigma^{(n)}(\mathbf{v}^\circ;\mathbf{x})=\mathbf{p}(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in\partial\Omega \tag{1.4}$$

$$\sigma_{12}(\mathbf{v}^\circ;\mathbf{x})=\sigma_{22}(\mathbf{v}^\circ;\mathbf{x})=0,\ \mathbf{x}\in M \tag{1.5}$$

Вблизи концов трещины M вектор $\mathbf{v}^\circ$ допускает представление

$$\mathbf{v}^\circ(\mathbf{x})=c^\pm+r_\pm^{1/2}(K_1^\pm\boldsymbol{\Phi}^1(\theta_\pm)+K_2^\pm\boldsymbol{\Phi}^2(\theta_\pm))+O(r_\pm),\quad r_\pm\to0 \tag{1.6}$$

$$(\Phi_r^1(\theta),\ \Phi_\theta^1(\theta))=(4\mu)^{-1}(2\pi)^{-1/2}([2\varkappa-1]\cos{}^1/_2\theta-\cos{}^3/_2\theta,\ \sin{}^3/_2\theta-[2\varkappa+1]\sin{}^1/_2\theta)$$

$$(\Phi_r^2(\theta),\ \Phi_\theta^2(\theta))=(4\mu)^{-1}(2\pi)^{-1/2}(3\sin{}^3/_2\theta-[2\varkappa-1]\sin{}^1/_2\theta,\ 3\cos{}^3/_2\theta-[2\varkappa+1]\cos{}^1/_2\theta)$$

$$\varkappa=(\lambda+3\mu)(\lambda+\mu)^{-1},\ \theta_\pm\in(-\pi,\pi) \tag{1.7}$$

Здесь $c^{\pm}$ — постоянный вектор, $(r_{\pm}, \theta_{\pm})$ — полярные координаты с центром в точке $(\pm a, 0)$ и полярной осью, направленной вдоль M; $K_j^{\pm}$ — КИН.

Аналогичные (1.6) представления справедливы для поля $\mathbf{u}^{\varepsilon}$; соответственные КИН обозначим $K_j^{\pm}(\varepsilon)$. Пусть еще $k_j^{\pm}(\varepsilon)$ — КИН в вершине трещины N_{ε}.

Далее понадобятся представления поля $\mathbf{v}^{\circ}$ вблизи точек $(\pm b_{\pm}, 0)$, которые в силу структуры границы исходной области $\partial\Omega_{\varepsilon}$ также следует считать особыми

$$\mathbf{v}^{\circ}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{6} l_{0j}^{+}\mathbf{U}^{j}(\mathbf{y}) + O(|\mathbf{y}|^{3}) \qquad (\mathbf{y} = (x_1 - b_{+}, x_2)) \tag{1.8}$$

$$\mathbf{U}^{k}(\mathbf{y}) = \mathbf{e}^{k}, \qquad l_{0k}^{+} = \mathbf{v}_k^{c}(b_{+} + 0) \qquad (k = 1, 2)$$

$$\mathbf{U}^{3}(\mathbf{y}) = (-y_2, y_1), \qquad \mathbf{U}^{4}(\mathbf{y}) = [4\mu(\lambda+\mu)]^{-1}((\lambda+2\mu)y_1, -\lambda y_2)$$

$$l_{03}^{+} = {}^1/_2(\overset{\circ}{v}_{2,1}(b_{+} + 0) - \overset{\circ}{v}_{1,2}(b_{+} + 0)), \qquad l_{04}^{+} = \sigma_{11}(\mathbf{v}^{\circ}; b_{+} + 0) \tag{1.9}$$

$$\mathbf{U}^{5}(\mathbf{y}) = [8\mu(\lambda+\mu)]^{-1}[\lambda+2\mu](2y_1y_2, -y_1^2 - \lambda[\lambda+2\mu]^{-1}y_2^2)$$

$$\mathbf{U}^{6}(\mathbf{y}) = [8\mu(\lambda+\mu)]^{-1}([\lambda+2\mu]y_1^2 - [3\lambda+4\mu]y_2^2, -2\lambda y_1y_2)$$

$$l_{05}^{+} = \sigma_{11,2}(\mathbf{v}^{\circ}; b_{+}, +0), \; l_{06}^{+} = \sigma_{11,1}(\mathbf{v}^{\circ}; b_{+}, +0)$$

Индекс k после запятой означает дифференцирование по x_k. Такие же формулы имеют место и для точки $(-b_{-}, 0)$, причем $\mathbf{y} = (x_1 + b_{-}, x_2)$, а коэффициенты линейной комбинации вида (1.8) обозначаются l_{0j}^{-}.

Цель работы — определение асимптотики при $\varepsilon \to 0$ решения $\mathbf{u}^{\varepsilon}$ задачи (1.1)—(1.3) и асимптотики соответствующих КИН.

2. Асимптотика решения вдали от трещины N_{ε}. Вектор $\mathbf{v}^{\circ}$ удовлетворяет системе (1.1) и краевым условиям (1.2), но оставляет невязку в условиях (1.3) на берегах N_{ε}^{+} трещины N_{ε}. Раскладывая напряжения $\sigma_{j2}(\mathbf{v}^{\circ})$ в ряды Маклорена по переменной x_2, упомянутую погрешность представим в виде

$$\sigma_{j2}(\mathbf{v}^{\circ}; x_1, \varepsilon) = \varepsilon\sigma_{j2}(\mathbf{v}_{,2}^{\circ}; x_1, +0) + {}^1/_2\varepsilon^2\sigma_{j2}(\mathbf{v}_{,22}^{\circ}; x_1 + 0) + O(\varepsilon^3)$$
$$x_1 \in [-b_{-}, b_{+}], \; j = 1, 2 \tag{2.1}$$

Таким образом, главный член невязки (2.1) компенсируется при помощи вектор-функции $\varepsilon\mathbf{v}^{1}$, удовлетворяющей уравнениям

$$L(\partial/\partial\mathbf{x})\mathbf{v}^{1}(\mathbf{x}) = 0, \qquad \mathbf{x} \in \Omega_0; \qquad \sigma^{(n)}(\mathbf{v}^{1}; \mathbf{x}) = 0, \qquad \mathbf{x} \in \partial\Omega$$
$$\sigma_{j2}(\mathbf{v}^{1}; \mathbf{x}) = q_j^{\pm}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in M^{\pm}, \qquad j = 1, 2 \tag{2.2}$$

Нагрузка $q^{\pm}$ определена соотношениями

$$q^{-}(x_1) = 0, \; |x_1| < a; \; q^{+}(x_1) = 0, \; x_1 \in [-a, -b_{-}] \cup [b_{+}, a] \tag{2.3}$$
$$q_j^{+}(x_1) = -\sigma_{j2}(\mathbf{v}_{,2}^{\circ}; x_1, +0), \; x_1 \in [-b_{-}, b_{+}] \tag{2.4}$$

Учитывая уравнения (1.1) и (1.3), заключаем, что главный вектор и момент нагрузки (2.3), (2.4) находятся по формулам

$$T_1^{1} = -\int_{-b_{-}}^{b_{+}} \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}(\mathbf{v}^{\circ}; x_1, +0)\,dx_1 = \int_{-b_{-}}^{b_{+}} \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}(\mathbf{v}^{\circ}; x_1, +0)\,dx_1 =$$
$$= \sigma_{11}(\mathbf{v}^{\circ}; b_{+} + 0) - \sigma_{11}(\mathbf{v}^{\circ}; -b_{-} + 0); \qquad T_2^{1} = 0, \qquad R^{1} = 0 \tag{2.5}$$

Согласно (2.5) нагрузка (2.3), (2.4), вообще говоря, несамоуравновешенная. Поэтому задача (2.2) не имеет решения, обладающего конечной упругой энергией. Если расширить класс решений, допустив векторы с особенностями $O(\ln|\mathbf{x} - \mathbf{P}^{\pm}|^{-1})$ в концах $\mathbf{P}^{\pm} = (\pm b_{\pm}, 0)$ отрезка $N_{\circ}$, то задача (2.2) станет разрешимой, а решение не будет единственным. В самом деле, расширение класса происходит за счет добавления в точках

$P^\pm$ неизвестных сосредоточенных сил $T^\pm$, которые уравновешивают действие нагрузки (2.3), (2.4). Однако существует решение $\mathbf{V}^1$ задачи о деформации области Ω_0 сосредоточенными силами $\mathbf{T}^\pm = (\pm 1, 0)$ (их главный вектор и главный момент равны нулю), т. е. выбор компонент $T_j^\pm$ неоднозначен. Итак, в качестве решения задачи (2.2) следует взять сумму

$$\mathbf{v}^1 = \mathbf{v}^{10} + c^{11}\mathbf{V}^1 \qquad (2.6)$$

Здесь v^{10} — решение задачи (2.2) при сосредоточенных в точках $\mathbf{P}^\pm$ силах $\mathbf{T}^+ = \mathbf{T}^- = {}^1/_2\mathbf{T}^1$; c^{11} — постоянная, подлежащая определению. (В (2.6) и далее жесткие смещения Ω_0 и Ω_ε не рассматриваются.)

Следуя [6], получаем, что вектор-функция (2.6) допускает представление в окрестности точки $(b_+, +0)$

$$\mathbf{v}^1(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{4} l_{1j}{}^+\mathbf{U}^j(\mathbf{y}) + l_{15}{}^+\mathbf{S}^{(1)}(\mathbf{y}) + l_{06}{}^+\boldsymbol{\Upsilon}^1(\mathbf{y}) + O(|\mathbf{y}|^2 \ln|\mathbf{y}|) \qquad (2.7)$$

$$\Upsilon_r{}^1(r, \theta) = -(2\pi\mu)^{-1} r \{\ln r (\cos 2\theta + {}^1/_2(\varkappa - 1)) - \theta \sin 2\theta - {}^1/_4(\varkappa + 1)\}$$

$$\Upsilon_\theta{}^1(r, \theta) = (2\pi\mu)^{-1} r \{\ln r \sin 2\theta + \theta \cos 2\theta - {}^1/_2\theta(\varkappa + 1)\} \qquad (2.8)$$

Здесь $\mathbf{S}^{(1)}$ — первый столбец тензора Сомильяны, (r, θ) — полярные координаты, отвечающие $\mathbf{y}$; $l_{1j}{}^+$ — некоторые постоянные, вычисляемые по аналогичным (1.9) формулам; коэффициент $l_{15}{}^+$ и подобный коэффициент $l_{15}{}^-$ в разложении вблизи $(-b_-, 0)$ имеют вид

$$l_{15}{}^\pm = {}^1/_2 T_1{}^1 \pm c^{11} \qquad (2.9)$$

Построим следующий член $\varepsilon^2\mathbf{v}^2$ асимптотики вектора $\mathbf{u}^\varepsilon$. В силу (2.1) и подобной формулы для $\mathbf{v}^1$ получаем, что $\mathbf{v}^2$ удовлетворяет уравнению (2.2), в котором нагрузка $\mathbf{q}^\pm$ определяется равенствами (2.3) и

$$q_j{}^+(x_1) = -\sigma_{j2}(\mathbf{v}^1{}_{,2}; x_1, +0) - {}^1/_2\,\sigma_{j2}(\mathring{\mathbf{v}}_{,22}; x_1, +0), \; x_1 \in [-b_-, b_+] \qquad (2.10)$$

Согласно (2.7) величина (2.10) имеет особенности порядка $|x_1 \mp b_\pm|^{-1}$. Поэтому задачу (2.2) для $\mathbf{v}^2$ также следует решать в классе вектор-функций с особенностями в точках $\mathbf{P}^\pm$. Как будет показано далее, необходимо допустить сингулярности $O(|\mathbf{x} - \mathbf{P}^\pm| \times |\ln|\mathbf{x} - \mathbf{P}^\pm||)$. Решения из такого класса определены с точностью до линейной комбинации трех векторов. Это, во-первых, введенное ранее решение $\mathbf{V}^1$ и, во-вторых, решения $\mathbf{V}^2$ и $\mathbf{V}^3$ задачи с сосредоточенными силами $\mathbf{T}^\pm = (0, \pm 1)$ и моментами $R^+ = -(b_+ + b_-)$, $R^- = 0$ или $R^+ = 0$, $R^- = -(b_+ + b_-)$ соответственно. Таким образом,

$$\mathbf{v}^2 = \mathbf{v}^{20} + c^{21}\mathbf{V}^1 + c^{22}\mathbf{V}^2 + c^{23}\mathbf{V}^3 \qquad (2.11)$$

Здесь c^{2j} — постоянные, подлежащие определению. Используя результаты [6], решение $\mathbf{v}^{20}$ выбираем так, чтобы асимптотика суммы (2.11) имела вид

$$\mathbf{v}^2(\mathbf{y}) = l_{20}{}^+\mathbf{S}^{(0)}(\mathbf{y}) + l_{21}{}^+\mathbf{U}^1(\mathbf{y}) + l_{22}{}^+\mathbf{U}^2(\mathbf{y}) + l_{23}{}^+\mathbf{S}^{(1)}(\mathbf{y}) + l_{24}{}^+\mathbf{S}^{(2)}(\mathbf{y}) +$$
$$+ l_{06}{}^+\boldsymbol{\Upsilon}^2(\mathbf{y}) + l_{15}{}^+\boldsymbol{\Upsilon}^\circ(\mathbf{y}) + O(|\mathbf{y}|(\ln|\mathbf{y}|)^2) \qquad (2.12)$$

$$\mathbf{S}^{(1)} = [-4\mu\pi]^{-1} \{\ln r [1 + \varkappa](\cos\theta, -\sin\theta) + [\varkappa - 1]\theta(\sin\theta, \cos\theta) - 2(0, \sin\theta)\}$$

$$\mathbf{S}^{(2)} = [-4\mu\pi]^{-1} \{\ln r [1 + \varkappa](\sin\theta, \cos\theta) + [1 - \varkappa]\theta(\cos\theta, -\sin\theta) + 2(0, \cos\theta)\}$$

$$\mathbf{S}^{(0)} = [4\mu\pi r]^{-1}([1 + \varkappa]\sin 2\theta, [\varkappa - 1]\cos 2\theta + 2) \qquad (2.13)$$

$$(\Upsilon_r{}^2(r, \theta), \Upsilon_\theta{}^2(r, \theta)) = [4\mu\pi^2]^{-1}\{[1 + \varkappa][\ln^2 r + 2\varkappa^{-1}\ln r - \theta^2]\cdot$$
$$\cdot(\cos\theta, -\sin\theta) + 2\theta[\ln r + \varkappa^{-1} + 1](\sin\theta, \cos\theta) + (0, 4\theta\cos\theta - 4[\ln r + \varkappa^{-1}]\sin\theta)\}$$

$$(\Upsilon_r^\circ(r,\theta),\ \Upsilon_\theta^\circ(r,\theta)) = [2\mu\pi^2 r]^{-1}\{\ln r([1+\varkappa]\cos 2\theta,\ [1-\varkappa]\sin 2\theta) + \theta([1+\varkappa]\sin 2\theta,\ [\varkappa-1]\cos 2\theta) + (1, -2\varkappa[1+\varkappa]^{-1}\sin 2\theta)\}$$

Далее понадобятся формулы для коэффициентов l_{20}^+, l_{23}^+, l_{24}^+ и аналогичных коэффициентов в разложении $\mathbf{v}^2$ вблизи $(-b_-, 0)$

$$l_{23}^\pm = {}^1/_2 T_1^2 \pm c^{21},\quad l_{24}^\pm = {}^1/_2 T_2^2 \pm c^{22} \pm c^{23} \tag{2.14}$$
$$l_{20}^+ = R^2 - {}^1/_2 T_2^2 (b_+ + b_-) - c^{23}(b_+ + b_-),\quad l_{20}^- = {}^1/_2 T_2^2 (b_+ + b_-) - c^{22}(b_+ + b_-)$$

Вычислим неизвестные T_1^2, T_2^2, R^2 в (2.14) при помощи метода [7]. обозначим $\Omega(\delta)$ область Ω_0, из которой удалены множества $\{\mathbf{x} : |\mathbf{x} - \mathbf{P}\pm| < \delta,\ x_2 > 0\}$. Подставим в формулу Бетти для области $\Omega(\delta)$ векторы $\mathbf{v}^2$ и $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, (-x_2, x_1)$. Учитывая формулы (2.10), (2.12), (2.4), применяя подобные (2.5) преобразования и переходя к пределу при $\delta \to 0$, получаем равенства

$$0 = \pi^{-1}(2\varkappa^{-1} - 1)(l_{06}^+ - l_{06}^-) + {}^1/_2 (l_{05}^+ - l_{05}^-) - (l_{23}^+ + l_{23}^-)$$
$$0 = {}^1/_2 (l_{06}^+ - l_{06}^-) - (l_{24}^+ + l_{24}^-) \tag{2.15}$$
$$0 = {}^1/_2 (b_+ + b_-) l_{06}^+ - {}^1/_2 (l_{04}^+ - l_{04}^-) - l_{24}^+ (b_+ + b_-) - (l_{20}^+ + l_{20}^-)$$

Из (2.5), (2.14) выводим

$$T_1^2 = -\pi^{-1}(1 - 2\varkappa^{-1})(l_{06}^+ - l_{06}^-) + {}^1/_2 (l_{05}^+ - l_{05}^-),\quad T_2^2 = {}^1/_2 (l_{06}^+ - l_{06}^-)$$
$$R^2 = {}^1/_4 (l_{06}^+ + l_{06}^-)(b_+ + b_-) - {}^1/_2 T_1^1$$

3. Пограничный слой вблизи точек $\mathbf{P}\pm$. В п. 2 были найдены первые члены асимптотического решения задачи (1.1)—(1.3) вдали от трещины N_ε. Вблизи вершин трещины N_ε возникают пограничный слой. Ввиду симметрии задачи достаточно рассмотреть лишь правую вершину. Запишем уравнения (1.1), (1.3) в «быстрых» переменных $\xi_1 = \varepsilon^{-1}(x_1 - b_+)$, $\xi_2 = \varepsilon^{-1} x_2$ и положим $\varepsilon = 0$. Область $\Omega_\varepsilon^+ = \{x \in \Omega_\varepsilon : x_2 > 0\}$ трансформируется в полуплоскость $\mathbf{R}_+^2$ с вырезанным лучом $\Xi = \{\xi : \xi_2 = 1,\ \xi_1 \leqslant 0\}$, а задача (1.1), (1.3) переходит в задачу

$$\boldsymbol{L}(\partial/\partial\xi)\mathbf{Z}(\xi) = 0,\quad \xi \in \mathbf{R}_+^2 \setminus \Xi;\quad \sigma_{j2}(\mathbf{Z};\xi) = 0,\quad \xi \in \partial\mathbf{R}_+^2 \cup \Xi,\quad j = 1, 2 \tag{3.1}$$

Множество $\mathbf{R}_+^2 \setminus \Xi$ имеет два «выхода» на бесконечность — в виде угла и в виде полуполосы. Укажем решения задачи (3.1), имеющие на бесконечности не более чем логарифмический рост в угле и не более чем степенной рост в полуполосе. Согласно общим результатам [6—8] существует в точности пять линейно независимых решений такого рода. Два из них тривиальны: $\mathbf{Z}^j(\xi) = \mathbf{e}^j$, $j = 1, 2$ — жесткие поступательные смещения, орты в $\mathbf{R}^2$. Три остальных отвечают приложенным на бесконечности в полуполосе перерезывающей и продольной силам и моменту. Эти решения имеют асимптотику

$$\mathbf{Z}^3(\xi) = -{}^1/_{12} D^{-1}\mathbf{Y}^{(1,1)}(\xi) - {}^1/_2 D^{-1}\mathbf{Y}^{(2,2)}(\xi) + m_1(-\xi_2, \xi_1) + O(1)$$
$$\mathbf{Z}^4(\xi) = D^{-1}\mathbf{Y}^{(2,3)}(\xi) + m_2(-\xi_2, \xi_1) + O(1) \tag{3.2}$$
$$\mathbf{Z}^5(\xi) = -D^{-1}\mathbf{Y}^{(2,2)}(\xi) + m_3(-\xi_2, \xi_1) + O(1)$$

$$\mathbf{Z}^3(\xi) = S^{(1)}(\xi) + \Upsilon^\circ(\xi) + O(|\xi|^{-2});\quad \mathbf{Z}^4(\xi) = S^{(2)}(\xi) + O(|\xi|^{-2})$$
$$\mathbf{Z}^5(\xi) = S^{(0)}(\xi) + O(|\xi|^{-2});\quad D = [3(\lambda + 2\mu)]^{-1}(\lambda + \mu)\mu \tag{3.3}$$
$$\mathbf{Y}^{(i,k)}(\xi) = \sum_{j=0}^{k} (j!)^{-1} \xi_1^j \mathbf{X}^{(i,k-j)}(\xi_2);\quad i = 1, 2;\quad k = 0, 1, \ldots, 2i - 1$$

$$\mathbf{X}^{(1,0)}(\xi_2)=\mathbf{e}^1,\quad \mathbf{X}^{(2,0)}(\xi_2)=\mathbf{e}^2,\quad \mathbf{X}^{(1,1)}(\xi_2)=-(\lambda+2\mu)^{-1}\lambda(\xi_2-{}^1/_2)\mathbf{e}^2 \quad (3.4)$$
$$\mathbf{X}^{(2,1)}(\xi_2)=-(\xi_2-{}^1/_2)\mathbf{e}^1,\quad \mathbf{X}^{(2,2)}(\xi_2)=[2(\lambda+2\mu)]^{-1}\lambda((\xi_2-{}^1/_2)^2-{}^1/_{12})\mathbf{e}^2$$
$$\mathbf{X}^{(2,3)}(\xi_2)=[6(\lambda+2\mu)]^{-1}\{(3\lambda+4\mu)(\xi_2-{}^1/_2)^3-{}^1/_4(11\lambda+12\mu)(\xi_2-{}^1/_2)\}\mathbf{e}^1$$

В (3.2) $\xi_1\to-\infty$, $\xi_2<1$, а в (3.3) $|\xi|\to\infty$, $\xi_2>1$; m_i — некоторые постоянные, $\mathrm{S}^{(j)}$ — столбцы (2.13).

Если допустить линейный рост решений в угле, то появятся еще два вектора $\mathbf{U}^3$ и $\mathbf{U}^4$, удовлетворяющие однородной задаче (3.1). Переход к квадратичному росту добавляет два новых решения. Одним из них является вектор $\mathbf{U}^5$, а второе имеет следующую асимптотику:

$$\mathbf{Z}^6(\xi)=\mathbf{U}^6(\xi)+\Upsilon^1(\xi)+\Upsilon^2(\xi)+O(|\xi|^{-1}(\ln|\xi|)^2)(\xi_2>1,|\xi|\to\infty) \quad (3.5)$$

Разложение $\mathbf{Z}^6$ на бесконечности в полуполосе содержит линейную комбинацию векторов (3.4). Далее используется лишь коэффициент при слагаемом $\mathbf{Y}^{(2,3)}$. Он находится применением формулы Бетти в области

$$\{\xi\in\mathbf{R}_+{}^2\setminus\Xi:|\xi|<R\}\cup\{\xi:0<\xi_2<1,0>\xi_1>-R\}$$

для векторов $\mathbf{Z}^6$ и $\mathbf{e}^2$ (см. [7] и аналогичные выкладки в [5]). Вычисляя контурные интегралы при помощи асимптотического представления $\mathbf{Z}^6$ и переходя к пределу при $R\to\infty$, получаем асимптотику

$$\mathbf{Z}^6(\xi)=-{}^1/_2D^{-1}\mathbf{Y}^{(2,3)}(\xi)+O(|\xi_1|^2)\quad(\xi_1\to-\infty,0<\xi_2<1) \quad (3.6)$$

Вычислим три первых члена разложения в пограничном слое

$$\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x})\sim\mathbf{Z}^{\circ+}(\xi)+\varepsilon\mathbf{Z}^{1+}(\xi)+\varepsilon^2\mathbf{Z}^{2+}(\xi),\quad |\mathbf{y}|<2\varepsilon^{1/2} \quad (3.7)$$

Учитывая условия сращивания этого представления с разложением $\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x})\sim\mathbf{v}^\circ(\mathbf{x})+\varepsilon\mathbf{v}^1(\mathbf{x})+\varepsilon^2\mathbf{v}^2(\mathbf{x})$ при $|\mathbf{y}|>{}^1/_2\varepsilon^{1/2}$, из соотношений (3.3) (3.5) и (1.8), (2.7), (2.12) выводим равенства

$$\mathbf{Z}^{\circ+}(\xi)=l_{01}{}^+\mathbf{e}^1+l_{02}{}^+\mathbf{e}^2,\quad \mathbf{Z}^{1+}(\xi)=l_{03}{}^+\mathbf{U}^3(\xi)+l_{04}{}^+\mathbf{U}^4(\xi)+l_{15}{}^+\mathbf{Z}^3(\xi)+$$
$$+(l_{11}{}^++l_{15}{}^+(4\mu\pi)^{-1}(1+\varkappa)\ln\varepsilon)\mathbf{e}^1+l_{12}{}^+\mathbf{e}^2+l_{20}{}^+\mathbf{Z}^5(\xi) \quad (3.8)$$
$$\mathbf{Z}^{2+}(\xi)=l_{05}{}^+\mathbf{U}^5(\xi)+l_{06}{}^+\mathbf{Z}^6(\xi)+l_{13}{}^+\mathbf{U}^3(\xi)+(l_{14}{}^+-l_{06}{}^+2\pi^{-1}\ln\varepsilon)\mathbf{U}^4(\xi)+$$
$$+(l_{23}{}^++l_{06}{}^+2\pi^{-1}\ln\varepsilon)\mathbf{Z}^3(\xi)+l_{24}{}^+\mathbf{Z}^4(\xi)+((l_{23}{}^++2(\pi\varkappa)^{-1}l_{06}{}^+)(4\mu\pi)^{-1}(1+\varkappa)\times$$
$$\times\ln\varepsilon+l_{21}{}^++l_{06}{}^+(4\mu\pi^2)^{-1}(1+\varkappa)\ln^2\varepsilon)\mathbf{e}^1+(l_{22}{}^++l_{24}{}^+(4\mu\pi)^{-1}(1+\varkappa))\mathbf{e}^2+\ldots$$

Здесь многоточием обозначен член $\mathrm{const}\,\mathbf{Z}^5$; постоянную можно найти лишь после определения решения $\mathbf{v}^{3\circ}$ (точно так же постоянная $l_{20}{}^+$, присутствующая в разложении $\mathbf{v}^{2\circ}$, входит в пограничный слой $\mathbf{Z}^{1+}$; см. далее п. 7). Как будет показано, эта постоянная оказывает несущественное влияние на асимптотику КИН; сказанное в равной мере относится и к многим другим слагаемым из (3.8), в частности и к тем, которые содержат $\ln\varepsilon$. Аналогичные (3.8) формулы верны для пограничного слоя $\mathbf{Z}^{\circ-}+\varepsilon\mathbf{Z}^{1-}+\varepsilon^2\mathbf{Z}^{2-}+\ldots$, отвечающего точке $(-b_-,0)$.

4. Асимптотика решения в тонкой полоске. Используя известный алгорифм построения асимптотических решений эллиптических задач в тонких областях ([4, 10, 9] и др.), на множестве $(-b_-,b_+)\times(0,\varepsilon)$ решение $\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x})$ представим в виде

$$\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x})\sim\sum_{j=-1}^{\infty}\varepsilon^j(\mathbf{w}^j(x_1)+\varepsilon\mathbf{W}^j(x,\zeta)),\quad \zeta=\varepsilon^{-1}x_2 \quad (4.1)$$

Далее понадобятся несколько первых членов ряда. Именно

$$\mathbf{w}_1{}^{-1}(x_1)=0,\quad w_2{}^{-1}(x_1)=w_2(x_1),\quad w_1{}^\circ(x_1)=w_1(x_1)$$

$$\mathbf{W}^{-1}(x_1,\zeta)=(\partial w_2/\partial x_1)\mathbf{X}^{(2,1)}(\zeta),\quad \mathbf{W}^\circ(x_1,\zeta)=(\partial w_1/\partial x_1)\mathbf{X}^{(1,1)}(\zeta)+$$
$$+(\partial^2w_2/\partial x_1{}^2)\mathbf{X}^{(2,2)}(\zeta),\quad \mathbf{W}^1(x_1,\zeta)=(\partial^3w_2/\partial x_1{}^3)\mathbf{X}^{(2,3)}(\zeta) \quad (4.2)$$

В (4.2) опущены слагаемые, зависящие от компонент функций w_2°, w_j^1, w_j^2 (они также выражаются через элементы жордановых цепочек (3.4)), а функции w_j удовлетворяют уравнениям

$$(\partial^2 w_1/\partial x_1^2)(x_1) = 0, \quad (\partial^4 w_1/\partial x_1^4)(x_1) = 0, \quad x_1 \in (-b_-, b_+) \tag{4.3}$$

Разложение (4.1) нужно срастить с решениями типа пограничного слоя, построенными в п. 3. Согласно (3.2), (3.6)—(3.8) при $\xi_1 < 2\varepsilon^{-1/2}$, $0 < \xi_2 < \varepsilon$ справедливы формулы

$$\mathbf{Z}^{0+}(\xi) + \varepsilon \mathbf{Z}^{1+}(\xi) + \varepsilon^2 \mathbf{Z}^{2+}(\xi) = l_{01}{}^+ \mathbf{e}^1 + \varepsilon l_{04}{}^+ U^4(\xi) +$$
$$+ \varepsilon l_{15}{}^+ (-(12D)^{-1} \mathbf{Y}^{(1,1)}(\xi) - (2D)^{-1} \mathbf{Y}^{(2,2)}(\xi)) + \varepsilon l_{20}{}^+ (-D)^{-1} Y^{(2,2)}(\xi) +$$
$$+ \varepsilon^2 \mathbf{Y}^{(2,3)}(\xi)(-(2D)^{-1} l_{06}{}^+ + D^{-1} l_{24}{}^+) + \ldots$$

Многоточием обозначены члены в асимптотике, которые не учитываются при рассмотрении слагаемых w_1 и w_2 в (4.1).

Используя формулу $\mathbf{U}^4 = (12D)^{-1} \mathbf{Y}^{(1,1)}$ и соотношения (4.2), заключаем, что для совпадения асимптотических представлений (4.1) и (3.7) в промежуточной зоне $\xi_1 = O(\varepsilon^{-1/2})$ (или $x_1 = b_+ + O(\varepsilon^{1/2})$) необходимы равенства

$$w_2(b_+) = 0, \quad (\partial w_2/\partial x_1)(b_+) = 0 \quad (\partial^2 w_2/\partial x_1^2)(b_+) = -D^{-1}(^1/_2 l_{15}{}^+ + l_{20}{}^+)$$
$$(\partial^3 w_2/\partial x_1^3)(b_+) = D^{-1}(l_{24}{}^+ - {}^1/_2 l_{06}{}^+); \quad w_1(b_+) = l_{01}{}^+ \quad (\partial w_1/\partial x_1)(b_+) =$$
$$= (12D)^{-1}(l_{04}{}^+ - l_{15}{}^+) \tag{4.4}$$

При рассмотрении пограничного слоя, отвечающего точке $(-b_-, 0)$, получаем

$$w_2(-b_-) = 0 \ (\partial w_2/\partial x_1)(-b_-) = 0 \ (\partial^3 w_2/\partial x_1^2)(-b_-) = D^{-1}(^1/_2 l_{15}{}^- + l_{20}{}^-)$$
$$(\partial^3 w_2/\partial x_1^3)(-b_-) = -D^{-1}(l_{24}{}^- + {}^1/_2 l_{06}{}^-); \ w_1(-b_-) =$$
$$= l_{01}{}^-, \quad (\partial w_1/\partial x_1)(-b_-) = (12D)^{-1}(l_{04}{}^- + l_{15}{}^-) \tag{4.5}$$

В формулах (4.4), (4.5) присутствуют данные Дирихле в точках $x_1 = \pm b_\pm$ для уравнения (4.3). Решая краевые задачи, находим, что

$$w_1(x) = (b_+ + b_-)^{-1}(v_1^\circ(b_+, +0) - v_1^\circ(-b_-, +0))(x_1 - b_+) +$$
$$+ v_1^\circ(b_+, 0), \quad w_2 = 0 \tag{4.6}$$

Остальные шесть равенств в (4.4), (4.5) составляют систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных постоянных c^{11}, c^{22}, c^{23} из представлений (2.9) и (2.14). Оказывается, что в силу (2.15) эта переопределенная система имеет решение

$$c^{11} = {}^1/_2(\sigma_{11}(\mathbf{v}^\circ; b_+, +0) + \sigma_{11}(\mathbf{v}^\circ; -b_-, +0)) -$$
$$- 12D(b_+ + b_-)^{-1}(v_1^\circ(b_+, +0) - v_1^\circ(-b_-, +0))$$
$$c^{22} = {}^1/_4(\sigma_{11,1}(\mathbf{v}^\circ; b_+, +0) - \sigma_{11,1}(\mathbf{v}^\circ; -b_-, +0)) - {}^1/_2(b_+ + b_-)^{-1} \times \tag{4.7}$$
$$\times [12D(b_+ + b_-)^{-1}(v_1^\circ(b_+, +0) - v_1^\circ(-b_-, +0)) - \sigma_{11}(\mathbf{v}^\circ; -b_-, +0)],$$
$$c^{23} = {}^1/_2\sigma_{11,1}(\mathbf{v}^\circ; -b_-, +0) - {}^1/_2(b_+ + b_-)^{-1}[12D(b_+ + b_-)^{-1}(v_1^\circ(b_+, +0) -$$
$$- v_1^\circ(-b_-, +0)) - \sigma_{11}(\mathbf{v}^\circ, -b_-, +0)]$$

Тем самым векторы (2.6), (2.11), (3.7) и главные члены ряда (4.1) определены полностью.

5. Асимптотика КИН. Найденная в предыдущем разделе асимптотика решения задачи (1.1)—(1.3) позволяет, как и в [4, 5, 11, 12], вычислить КИН $K_j^\pm(\varepsilon)$ и $k_j^\pm(\varepsilon)$ в вершинах трещин M и N_ε. Поскольку вне окрестности трещины N_ε решение исходной задачи представимо в виде $\mathbf{v}^\circ(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{v}^1(\mathbf{x}) + \ldots$ (см. п. 2), то

$$K_j^\pm(\varepsilon) = K_j^\pm + \varepsilon(K_{j,1}^\pm + c^{11}F_j^\pm) + O(\varepsilon^2), \quad j = 1, 2 \tag{5.1}$$

Здесь $K_j^{\pm}(\varepsilon)$, $K_j^{\pm}$, $K_{j,1}^{\pm}$ и $F_j^{\pm}$ — коэффициенты при $r_{\pm}^{1/2}$ в разложениях вида (1.6) полей $\mathbf{u}^{\varepsilon}$, $\mathbf{v}^{\circ}$, $\mathbf{v}^{\circ 1}$ и $\mathbf{V}^1$; постоянная c^{11} определена в (4.7).

Согласно п. 3 в малой окрестности точки $\mathbf{P}^{\pm}$ поле $\mathbf{u}^{\varepsilon}(\mathbf{x})$ асимптотически равно сумме $\mathbf{Z}^{\circ +}(\xi) + \varepsilon \mathbf{Z}^{1+}(\xi, \ln \varepsilon) + \ldots$ Анализируя формулы (3.8) для вектор-функций $\mathbf{Z}^{\circ +}$ и $\mathbf{Z}^{1+}$, заключаем, что негладкими являются лишь слагаемые $l_{15}^{+}\mathbf{Z}^3(\xi)$ и $l_{20}^{+}\mathbf{Z}^5(\xi)$.

Специальные решения $\mathbf{Z}^k$ $(k = 3, 4, 5)$ вблизи вершины разреза Ξ допускают представления

$$\mathbf{Z}^k(\xi) = \mathbf{c}^k + \rho^{1/2}(F_{k,1}\mathbf{\Phi}^1(\varphi) + F_{k,2}\mathbf{\Phi}^2(\varphi)) + O(\rho), \quad \rho \to 0 \tag{5.2}$$

Здесь $\mathbf{c}^k$ — постоянный вектор, (ρ, φ) — полярные координаты с центром в вершине луча Ξ, причем берега Ξ заданы уравнениями $\varphi = \pm\pi$. В [13] найдены явные выражения для КИН в разложениях (5.2) специальных решений $\mathbf{Z}^3$ — $\mathbf{Z}^5$, $\mathbf{Z}^4$, $\mathbf{Z}^5$ однородной задачи (3.1). В обозначениях, принятых в [13], векторы $\mathbf{F}_k = (F_{k1}, F_{k2})$ имеют вид

$$\mathbf{F}_3 = \mathbf{K}_T + {}^1/_2\mathbf{K}_M, \quad \mathbf{F}_4 = \mathbf{K}_N, \quad \mathbf{F}_5 = \mathbf{K}_M \tag{5.3}$$

$$\mathbf{K}_M \approx (1{,}932;\ -1{,}506), \quad \mathbf{K}_T \approx (0{,}4346;\ 0{,}05578), \quad \mathbf{K}_N \approx (1{,}951;\ 0{,}032)$$

Итак, согласно (5.2), (5.3) и (2.9), (2.14), (4.7)

$$k_j^{\pm}(\varepsilon) = \mp \varepsilon^{1/2}(12D(v_1^{\circ}(b_+, +0) - v_1^{\circ}(-b_-, +0))(b_+ + b_-)^{-1} -$$
$$- \sigma_{11}(\mathbf{v}^{\circ}; \pm b_{\pm}, +0)(F_{3j}^{\pm} - {}^1/_2F_{5j}^{\pm}) + O(\varepsilon^{3/2}|\ln \varepsilon|), \quad \mathbf{F}_k^{\pm} = (\pm F_{k1}, F_{k2})$$
$$(k = 3, 5) \tag{5.4}$$

В формуле (5.4) главный член асимптотики $k_j^{\pm}(\varepsilon)$ выражается через решение задачи (1.4), (1.5) в области с одной трещиной. Это позволяет во многих задачах определить КИН в вершинах меньшей трещины N_{ε} без дополнительных вычислений. Подчеркнем, что балочное приближение в теории трещин ([14, 15] и др.) или интеграл Черепанова — Райса ([14, 17, 16] и др.) дают возможность для задач в канонических областях найти сумму $I^{\pm}(\varepsilon) = k_1^{\pm}(\varepsilon)^2 + k_2^{\pm}(\varepsilon)^2$, а определить на таком пути $k_1^{\pm}(\varepsilon)$ и $k_2^{\pm}(\varepsilon)$ по отдельности не удается. Согласно (5.3), (5.4) $k_1^{\pm}(\varepsilon)\, k_2^{\pm}(\varepsilon)^{-1} \approx 0{,}779$ и, следовательно, по $I^{\pm}(\varepsilon)$ определяются значения $k_j^{\pm}(\varepsilon)$ (с точностью до знака).

6. Примеры. 1°. Рассмотрим плоскость $\Omega = \mathbf{R}^2$ с трещинами M и N_{ε}, находящуюся в условиях одноосного растяжений с интенсивностью p° под углом α к оси x_1. При помощи явного решения задачи о плоскости с одной трещиной [18] формулы (5.4) для КИН в вершинах трещины N_{ε} конкретизируются следующим образом:

$$k_j^{\pm}(\varepsilon) \sim \varepsilon^{1/2} \cdot 2p_{sc}(F_{3j}^{\pm} - {}^1/_2F_{5j}^{\pm})(\mp B^{-1}(A_+R_+ - A_-R_-) - b_{\pm}A_{\pm}R_{\pm}) \tag{6.1}$$
$$B = b_+ + b_-, \quad R_{\pm} = (a \mp b_{\pm})^{1/2}, \quad A_{\pm} = (a \pm b_{\pm})^{1/2}, \quad p_{sc} = p^{\circ} \sin\alpha \cos\alpha$$

Кроме того, в (2.4) $q_1^{+}(x_1) = -2p_{sc}a^2(a^2 - x_1^2)^{-3/2}$, $q_2^{+}(x_1) = 0$, и значит, согласно интегральному представлению КИН [18] формула (5.1) приобретает вид

$$K_1^{\pm}(\varepsilon) \sim p^{\circ}\sin^2\alpha\,(\pi a)^{1/2}, \quad K_2^{\pm}(\varepsilon) \sim p_{sc}((\pi a)^{1/2} - {}^1/_2\varepsilon(\pi a))^{-1/2}G^{\pm}) \tag{6.2}$$
$$G^{+} = \ln(A_+R_-A_-^{-1}R_+^{-1} + aB(2(R_+R_-)^2) - (A_+A_-R_+R_-)^{-1}) + 2B^{-1}(R_+R_-)^{-1}H)$$
$$G^{-} = \ln(A_+R_+A_-^{-1}R_-^{-1}) + aB(2(A_+A_-)^{-1} - (A_+A_-R_+R_-)^{-1}) - 2B^{-1}(A_+A_-)^{-1}H)$$
$$H = (A_+^2 + A_-^2)R_+R_- - (R_+^2 + R_-^2)A_+A_-$$

2°. Асимптотический анализ, проведенный в предыдущих разделах, переносится и на задачу о плоскости с полубесконечным разрезом $M = \{x \in \mathbf{R}^2 : x_2 = 0,\ x_1 \leqslant a\}$ и с конечной трещиной N_{ε}. Пусть нагружение осуществляется так, что решение $\mathbf{u}^{\varepsilon}$ на бесконечности имеет асимптотику

$$\mathbf{u}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) = r^{1/2}(C_1\mathbf{\Phi}^1(\theta) + C_2\mathbf{\Phi}^2(\theta)) + O(r^{-1/2}) \quad (r \to \infty) \tag{6.3}$$

Здесь (r, θ) — полярные координаты с центром $(a, 0)$, $\mathbf{\Phi}^j$ — угловые части (1.7), C_1 и C_2 — параметры нагружения. (Иными словами, рассматривается большая трещина, вблизи вершины которой расположена малая трещина N_{ε}.) В этом случае $\mathbf{v}^{\circ}$ совпадает с выражением, выделенным в (6.3), и согласно (5.4) и (5.1) имеем

$$k_j^{\pm}(\varepsilon) \sim \mp \varepsilon^{1/2} 2C_2 (2\pi)^{-1/2} (F_{3j}^{\pm} - {}^1/_2 F_{5j}^{\pm}) (R_{\pm}^{-1} + 2B^{-1}(R_+ - R_-))$$

$$K_1^+(\varepsilon) \sim C_1, \; K_2^+(\varepsilon) \sim C_2 + 2\varepsilon C_2 \pi^{-1} B^{-1} R_+^{-1} R_-^{-1} (R_+ + R_-)^2$$

3°. Методика расчета КИН пригодна и для трещины, расположенной на малом расстоянии от границы. В качестве примера рассмотрим задачу о действии сосредоточенной нормальной силы Q на полуплоскость $\Omega = \{\mathbf{x}: x_2 > 0\}$ (считаем, что $b_{\pm} > 0$ и сила приложена в точке $\mathbf{x} = 0$). Поскольку ранее предполагалось, что берега трещины свободны от напряжений, то изложенный в пп. 2, 3 алгорифм нуждается в некоторой модификации. В тонкой полоске $(-b_-, b_+) \times (0, \varepsilon)$ асимптотика решения ищется в виде

$$\mathbf{u}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) \sim \varepsilon^{-3} w_2(x_1) \mathbf{X}^{(2,0)} + \varepsilon^{-2} (\partial w_2/\partial x_1)(x_1) \mathbf{X}^{(2,1)} + \varepsilon^{-1} (\partial^2 w_2/\partial x_1^2)(x_1) \mathbf{X}^{(2,2)} +$$
$$+ (\partial^3 w_2/\partial x_1^3)(x_1) \mathbf{X}^{(2,3)} + \ldots, \; w_2(x_1) = \gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_1^2 + \gamma_3 x_1^3 + {}^1/_6 Q D^{-1} x_1^3 \Theta(x_1) \quad (6.4)$$

Здесь Θ — функция Хевисайда, а многоточием обозначены несущественные члены. Пограничные слои $\mathbf{Z}^{\pm}$ вблизи $\mathbf{P}^{\pm}$ задаются формулами

$$\mathbf{Z}^{\pm}(\xi) = \varepsilon^{-3} w_2(\pm b_{\pm}) \mathbf{U}^2(\xi) + \varepsilon^{-2} (\partial w_2/\partial x_1)(\pm b_{\pm}) \, \mathbf{U}^3(\xi) + \varepsilon^{-1} (\partial^2 w_2/\partial x_1^2)(\pm b_{\pm}) \mathbf{Z}^5(\xi) +$$
$$+ (\partial^3 w_2/\partial x_1^3)(\pm b_{\pm}) \mathbf{Z}^4(\xi) \quad (6.5)$$

Из условия сращивания выводим, что первый коэффициент в представлении $\mathbf{u}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) \sim \varepsilon^{-3} \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) + \varepsilon^{-2} \mathbf{v}^1(\mathbf{x}) + \varepsilon^{-1} \mathbf{v}^2(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^3(\mathbf{x})$ решения вдали от трещины подчиняется равенству $\mathbf{v}^\circ(\pm b_{\pm}) = w_2(\pm b_{\pm})$, т. е. $\mathbf{v}^\circ$ — жесткое смещение, которое можно положить равным нулю. Аналогично $\mathbf{v}^1(\pm b_{\pm}) = (\partial w_2/\partial x_1)(\pm b_{\pm}) = 0$. Постоянные γ_j в (6.4) находятся из названных условий и имеют вид

$$\gamma_0 = {}^1/_3 \gamma b_+^3 b_-^3, \; \gamma_1 = {}^1/_2 \gamma b_+^2 b_-^2 (b_+ - b_-), \; \gamma_2 = -\gamma b_+^2 b_-^2$$
$$\gamma_3 = -{}^1/_6 \gamma b_+^2 (b_+ + 3b_-), \; \gamma = Q D^{-1} (b_+ + b_-)^{-3} \quad (6.6)$$

Итак, согласно (6.4), (6.5) и (5.2) КИН в вершинах трещины N_{ε} вычисляются по формулам

$$k_j^{\pm}(\varepsilon) = \varepsilon^{-3/2} \gamma (b_+ + b_-) b_{\pm} b_{\mp}^2 F_{5j} + O(\varepsilon^{-1/2}) \quad (6.7)$$

4°. В случаях $\alpha = {}^1/_2 \pi$ или $C_2 = 0$ асимптотические формулы (6.1) или (6.4) принимают вид $k_j^{\pm}(\varepsilon) = O(\varepsilon^{3/2})$ и становятся малосодержательными (при $\alpha = 0$ выделенные в (6.1), (6.2) члены асимптотики также обращаются в нуль — нагружение осуществляется вдоль трещин и все КИН — нули). Обе ситуации характеризуются тем, что $\sigma_{11}(\mathbf{v}^\circ) = 0$ на берегах трещины M. Если построить следующий член асимптотики решения $\mathbf{u}^{\varepsilon}(\mathbf{x})$ (см. п. 7), то для задач, указанных в 1° и 2°, асимптотика КИН в вершинах трещины N_{ε} принимает соответственно вид

$$k_j^{\pm}(\varepsilon) \sim \mp \varepsilon^{3/2} (a^2 (A_{\pm} R_{\pm})^{-3} F_{3j}^{\pm} - \{{}^7/_6 a^2 (A_{\pm} R_{\pm})^{-3} + B^{-2} (A_+ R_+ - A_- R_-) +$$
$$+ {}^1/_3 B^{-1} (\pm b_{\pm} (A_{\pm} R_{\pm})^{-1} + b_+ (A_+ R_+)^{-1} - b_- (A_- R_-)^{-1}\} F_{5j}^{\pm}) \quad (6.8)$$
$$k_j^{\pm}(\varepsilon) \sim \pm \varepsilon^{3/2} \, {}^1/_4 C_1 (2\pi)^{-1/2} \{R_{\pm}^{-3} F_{3j}^{\pm} - ({}^7/_6 R_{\pm}^{-3} \mp 8B^{-2} (R_+ - R_-)) F_{5j}^{\pm}\}$$

7. Асимптотика решения в частном случае. Предположим, что $\sigma_{11}(\mathbf{v}^\circ) = 0$ на M_+. Тогда согласно (2.2) $q_j^+ = -\sigma_{j2,2}(\mathbf{v}^\circ) = \sigma_{j1,1}(\mathbf{v}^\circ) = 0$, т. е. решение $\mathbf{v}^1$ задачи (2.2) есть жесткое смещение, которое можно считать равным нулю. В разложении (1.8) заменим верхнюю границу суммирования на 8, причем

$$l_{04}^+ = l_{06}^+ = 0, \quad l_{09-k}^+ = {}^1/_2 \sigma_{11, k2}(\mathbf{v}^\circ; b_+, +0) \quad (k = 1, 2)$$
$$\mathbf{U}^7(\mathbf{y}) = [24\mu(\lambda + \mu)]^{-1} ((\lambda + 2\mu) y_1^3 - (3\lambda + 4\mu) 3y_1 y_2^2,$$
$$- 3\lambda y_1^2 y_2 + (3\lambda + 2\mu) y_2^3) \quad (7.1)$$
$$\mathbf{U}^8(\mathbf{y}) = [12\mu(\lambda + \mu)]^{-1} (-(3\lambda + 4\mu) y_2^3 + (\lambda + 2\mu) 3y_1^2 y_2,$$
$$- 3\lambda y_1 y_2^2 - (\lambda + 2\mu) y_1^3)$$

Правые части краевых условий в задаче (2.2) для вектор-функции $\mathbf{v}^2$ определяются формулами (2.3) и $q_j^+(x_1) = {}^1/_2 \sigma_{1j,12}(\mathbf{v}^\circ; x_1, +0)$, $x_1 \in [-b_-, b_+]$. Справедливы равенства (2.6), (2.9), в которых индекс 1 необходимо заменить индексом 2, и представление

$$\mathbf{v}^2(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{4} l_{2i}{}^{+}\mathbf{U}^i(\mathbf{y}) + l_{25}{}^{+}\mathbf{S}^{(1)}(\mathbf{y}) + l_{08}{}^{+}\boldsymbol{\Upsilon}^1(\mathbf{y}) - l_{07}{}^{+}\boldsymbol{\Upsilon}^3(\mathbf{y})$$

$$(\Upsilon_r{}^3(r, \theta), \quad \Upsilon_\theta{}^3(r, \theta)) = -r[4\mu\pi]^{-1}\{\ln r[1+\varkappa](0, 1) - [\varkappa - 1]\,\theta\,(1, 0) + 2\varkappa[\varkappa-1]^{-1}(0, 1) + (\sin 2\theta, \cos 2\theta)\}$$

Для вектора $\mathbf{v}^3$ верны соотношения (2.11), (2.12) (с соответствующей заменой индексов 1, 2 на 2, 3). Заметим, что из равенств $\sigma_{jj}(\mathbf{v}^\circ;\, x_1, +0) = 0$ вытекают формулы $\overset{\circ}{v}_{1,1}(x_1, +0) = 0$ и $l_{01}{}^{+} = l_{01}{}^{-}$.

Разложение решения задачи в тонкой полоске имеет вид (4.1) и

$$w^{-1}(x_1) = 0, \quad w_1{}^\circ(x_1) = 0, \quad w_2{}^\circ(x_1) = t_3x_1{}^3 + t_2x_1{}^2 + t_1x_1 + t_0$$

$$t_3 = B^{-2}(l_{03}{}^{+} + l_{03}{}^{-}) - 2B^{-3}(l_{02}{}^{+} - l_{02}{}^{-}), \quad t_2 = {}^1/_2B^{-1}(l_{03}{}^{+} - l_{03}{}^{-}) - {}^3/_2(b_+ - b_-)\,t_3$$

Коэффициенты разложения в пограничном слое таковы:

$$\mathbf{Z}^{0\pm}(\xi) = l_{01}{}^{\pm}\mathbf{e}^1 + l_{02}{}^{\pm}\mathbf{e}^2, \quad \mathbf{Z}^{1\pm}(\xi) = l_{03}{}^{\pm}\mathbf{U}^3(\xi), \quad \mathbf{Z}^{2\pm}(\xi) = l_{05}{}^{\pm}\mathbf{U}^5(\xi) + l_{25}{}^{\pm}\mathbf{Z}^3(\xi) + l_{30}{}^{\pm}\mathbf{Z}^5(\xi), \quad \mathbf{Z}^{3\pm}(\xi) = l_{07}{}^{\pm}\mathbf{Z}^7(\xi) + l_{08}{}^{\pm}\mathbf{Z}^8(\xi) + l_{34}{}^{\pm}\mathbf{Z}^4(\xi)$$

Здесь $\mathbf{Z}^7$ и $\mathbf{Z}^8$ — решения однородной задачи (3.1), которые определяются по векторным полям $\mathbf{U}^7$ и $\mathbf{U}^8$ (см. (7.1)) так же, как решение $\mathbf{Z}^6$ по $\mathbf{U}^6$.

В результате получается следующее представление для КИН:

$$k_j{}^{\pm}(\varepsilon) = \varepsilon^{3/2}(l_{25}{}^{\pm}F_{3j}{}^{\pm} + l_{30}{}^{\pm}F_{5j}{}^{\pm}) + O(\varepsilon^{5/2}|\ln\varepsilon|)$$

$$l_{25}{}^{\pm} = \pm{}^1/_2\sigma_{11,2}(\mathbf{v}^\circ; \pm b_\pm, +0); \quad l_{30}{}^{\pm} = \mp{}^7/_{12}\sigma_{11,2}(\mathbf{v}^\circ; \pm b_\pm, +0) + D(b_+ + b_-)^{-2}(6(v_2{}^\circ(+b_+, +0) - v_2{}^\circ(-b_-, +0)) - (b_+ + b_-)(\overset{\circ}{v}_{2,1}(\pm b_\pm, +0) - \overset{\circ}{v}_{1,2}(\pm b_\pm, +0) + \overset{\circ}{v}_{2,1}(b_+, +0) - \overset{\circ}{v}_{1,2}(b_+, +0) + \overset{\circ}{v}_{2,1}(-b_-, +0) - \overset{\circ}{v}_{1,2}(-b_-, +0))$$

Конкретизация асимптотических равенств приводит к представлению (6.8).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 443 с.
2. Механика разрушения и прочность материалов. Справочное пособие. Т. 2. Киев: Наук. думка, 1988. 620 с.
3. *Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Асимптотика решений эллиптических краевых задач при сингулярных возмущениях области. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1981. 206 с.
4. *Назаров С. А.* Введение в асимптотические методы теоории упругости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. 117 с.
5. *Назаров С. А., Черняев П. К.* Антиплоский сдвиг области с двумя близко расположенными трещинами // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 5. С. 815—825.
6. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. мат. о-ва. 1967. Т. 16. С. 209—292.
7. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками // Math. Nachr. 1977. B. 76. S. 29—60.
8. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
9. *Гольденвейзер А. Л.* Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 4. С. 668—686.
10. *Зино И. Е., Тропп Э. А.* Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. 224 с.
11. *Benthem J. P., Koiter W. T.* Asymptotic approximation to crack problems // Machanics of fracture. V. 1. Methods of analysis and solutions of crack problems. Leyden: Noordhoff Intern. Publ., 1973. P. 131—178.
12. *Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Вычисление асимптотики коэффициентов интенсивности при сближении угловых или конических точек // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1983. Т. 23. № 2. С. 333—346.

13. *Златин А. Н., Храпков А. А.* Полубесконечная трещина, параллельная границе упругой полуплоскости // Докл. АН СССР. 1986. Т. 291. № 4. С. 810—813.
14. *Слепян Л. И.* Механика трещин. Л.: Судостроение, 1981. 295 с.
15. *Михайлов А. М.* Обобщение балочного подхода к задачам теории трещин // ПМТФ. 1969. № 3. С. 171—174.
16. *Черепанов Г. П.* Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1983. 296 с.
17. *Rice J. R.* A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and crack // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1968. V. 35. № 2. P. 379—386.
18. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1976. 573 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
21.III.1989