

УДК 539.375

© 1990 г.

В. В. Сильвестров

ОБ УПРУГОМ НАПРЯЖЕННОМ И ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ ВБЛИЗИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ТРЕЩИНЫ НА ДВУЛИСТНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

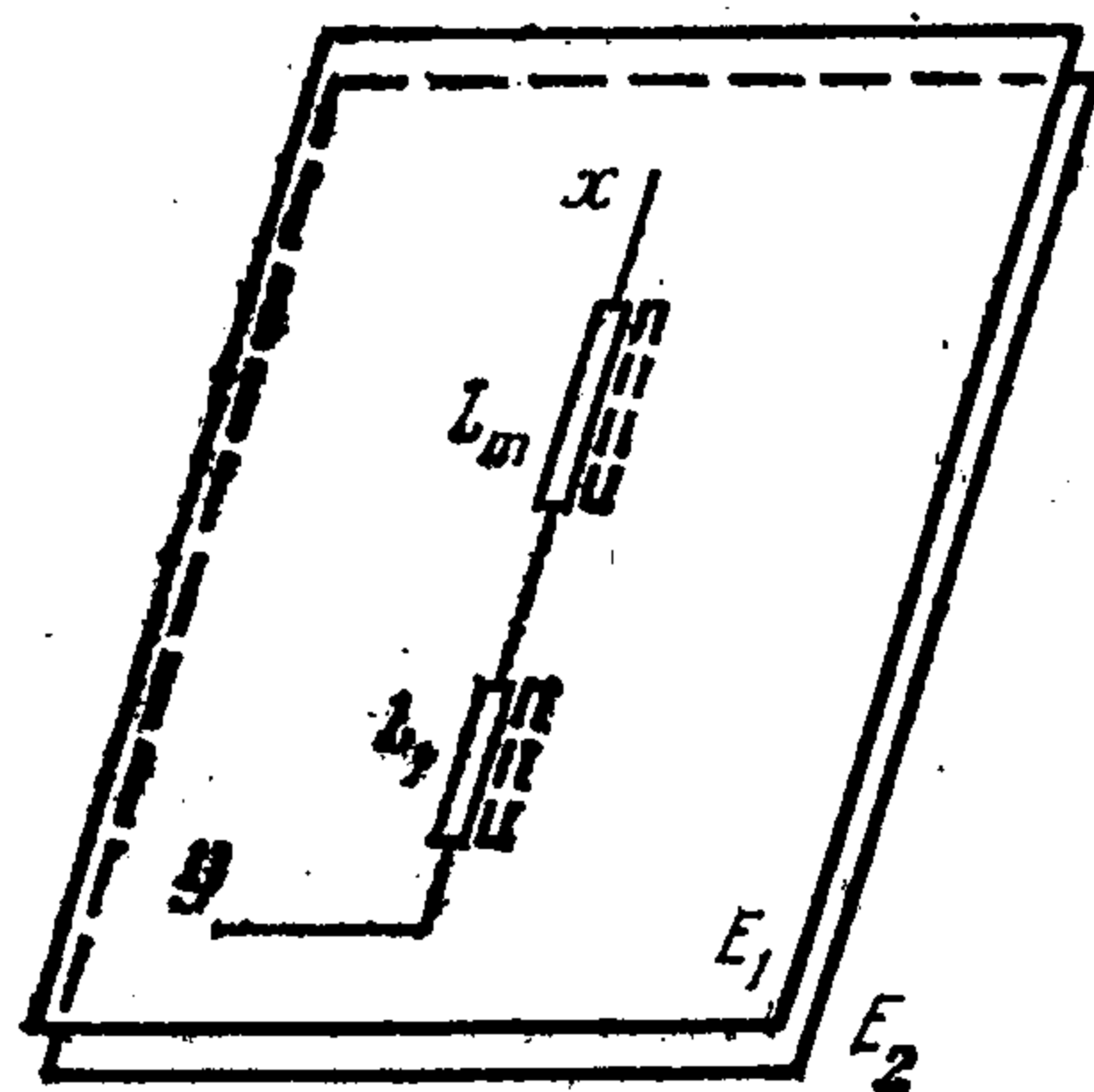
В предельной схеме двулистной римановой поверхности иллюстрируются особенности, связанные с изучением асимптотики напряжений и смещений вблизи края пространственной трещины. На этой поверхности по аналогии со случаем одной плоскости ставятся основные первая, вторая и смешанная краевые задачи, которые решаются явно в квадратурах путем сведения к матричной краевой задаче Римана с постоянным коэффициентом. Листы поверхности находятся в обобщенном плоском напряженном состоянии и имеют, вообще говоря, разные упругие постоянные и разную толщину. Кратко излагается схема исследования напряженно-деформированного состояния еще одной двулистной конструкции, отличной от римановой поверхности.

В рамках классической теории упругости естественно интерпретировать реальный кристалл как совокупность взаимодействующих упругих плоскостей, соответствующих слоям атомов. Различные дефекты, дислокации [1, 2] связывают подобные поверхности, поэтому для определенных видов дислокаций представляется целесообразным использовать аппарат теории упругости на многолистных поверхностях.

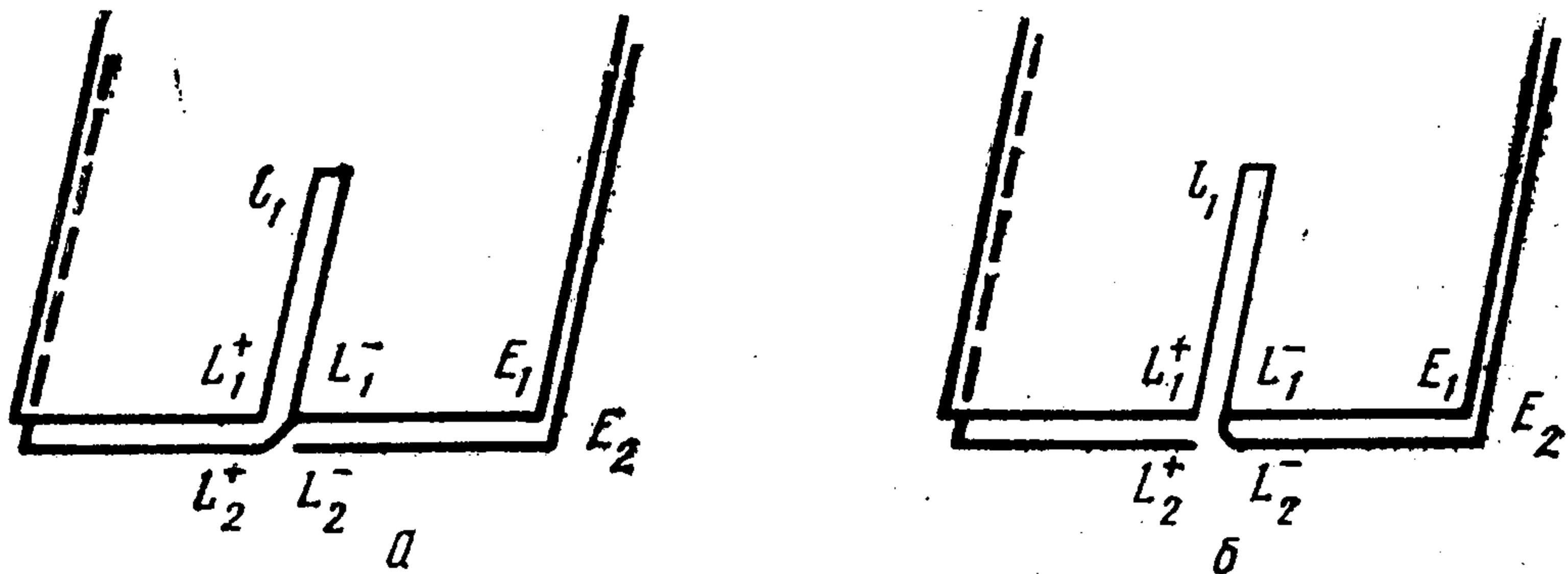
1. Виды конструкций. Пусть E_1, E_2 — упругие однородные изотропные бесконечные пластины малой толщины с разрезами по одним и тем же отрезкам $l_j = [a_j, b_j]$ ($j = 1, 2, \dots, m$) действительной оси x . Будем считать, что пластина E_k ($k = 1, 2$) имеет толщину h_k и характеризуется упругими постоянными $\mu_k, \kappa_k = (3 - \nu_k)/(1 + \nu_k)$, где μ_k — модуль сдвига, ν_k — коэффициент Пуассона. Совокупность разрезов пластины E_k обозначим L_k , причем верхние берега разрезов этой совокупности обозначим L_k^+ , а нижние — L_k^-

$$L_k^\pm = \bigcup_{j=1}^m l_j^\pm, \quad l_j \subset E_k$$

Пусть пластины E_1, E_2 наложены одна на другую так, что j -й разрез верхней пластины E_1 расположен над j -м разрезом нижней пластины E_2 (фиг. 1) и берега этих разрезов соединены единообразно одним из следующих способов.



Фиг. 1



Фиг. 2

А. Нижние берега L_1^- всех разрезов верхней пластины соединены с верхними берегами L_2^+ разрезов нижней пластины. Если смотреть с левого конца разреза l_1 , то это соединение схематически в вертикальном

плане без учета толщины пластин выглядит, как на фиг. 2, а. Полученная система пластин представляет собой риманову поверхность функции

$$w = [(z - a_1)(z - b_1) \dots (z - a_m)(z - b_m)]^{1/2} \quad (1.1)$$

с краем $L_1^+ \cup L_2^-$. Если берега L_1^+ и L_2^- мысленно соединить, т. е. отождествить, то получим замкнутую риманову поверхность.

Б. Нижние берега L_1^- разрезов верхней пластины соединены с нижними берегами L_2^- разрезов нижней пластины (фиг. 2, б).

Будем считать, что: 1) соответствующие берега разрезов соединены без натяга и без всяких промежуточных прослоек между берегами путем склеивания, сшивания, сварки, штамповки и т. д., 2) пространственный эффект концентрации напряжений на линии соединения пренебрежимо мал, 3) пластины находятся в обобщенном плоском напряженном состоянии и взаимодействуют между собой только через соединенные берега разрезов, 4) в бесконечно удаленной точке пластины E_k ($k = 1, 2$) напряжения распределены равномерно и здесь действуют главные напряжения $(\sigma_1)_k$ и $(\sigma_2)_k$ в направлениях, составляющих с действительной осью углы φ_k и $\varphi_k + \pi/2$ соответственно, вращение на ∞ в плоскости E_k равно ω_k , 5) на концах разрезов напряжения и производные от смещений могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы, а во всех остальных точках разрезов они непрерывны.

Задачи, соответствующие этим случаям, назовем задачами А и Б, а сами конструкции — конструкциями А и Б. Во всех случаях напряжения $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})_k$ в расчете на единицу толщины пластины и производные по x от компонент смещения $(u', v')_k$ в пластине E_k выражаются через две функции $\Phi_k(z)$, $\Psi_k(z)$ ($z = x + iy$) по формулам [3]

$$\begin{aligned} (\sigma_x + \sigma_y)_k &= 4 \operatorname{Re} \Phi_k(z) \\ (\sigma_y - i\tau_{xy})_k &= \Phi_k(z) + \Omega_k(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi_k'(z)} \\ 2\mu_k(u' + iv')_k &= \kappa_k\Phi_k(z) - \Omega_k(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi_k'(z)} \\ \Omega_k(z) &\leq \overline{\Phi_k(z)} + z\overline{\Phi_k'(z)} + \overline{\Psi_k(z)}, \quad k = 1, 2 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Эти функции аналитичны и однозначны в плоскости E_k с разрезами l_j ($j = 1, 2, \dots, m$) и имеют в окрестности ∞ вид

$$\Phi_k(z) = \gamma_k - \frac{P_k}{2\pi(1 + \kappa_k)} \frac{1}{z} + O(z^{-2}) \quad (1.3)$$

$$\Omega_k(z) = \bar{\gamma}_k + \bar{\gamma}_k' + \frac{\kappa_k P_k}{2\pi(1 + \kappa_k)} \frac{1}{z} + O(z^{-2})$$

$$\gamma_k = \frac{1}{4}(\sigma_1 + \sigma_2)_k + \frac{2i\mu_k\omega_k}{1 + \kappa_k}, \quad \gamma_k' = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1) \exp(-2i\varphi_k) \quad (1.4)$$

Здесь $-P_k = -(X_k + iY_k)$ — главный вектор усилий, приложенных к совокупности разрезов L_k со стороны E_k , в расчете на единицу толщины пластины. Числа P_1, P_2 будем считать известными. В некоторых случаях, например в первой основной задаче А, достаточно задать одно из них, а другое найдется из краевых условий и условия равновесия всей системы пластин E_1, E_2 или из иных дополнительных условий, о которых будет сказано далее. На концах разрезов функции Φ_k, Ω_k могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы, а во всех остальных точках разрезов они имеют непрерывные граничные значения. Кроме того, будем считать, что во всех точках t разрезов, кроме концов

$$(z - \bar{z})\Phi_k'(z) \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow t \pm, \quad k = 1, 2 \quad (1.5)$$

Во всех рассматриваемых ниже задачах это условие выполняется вследствие H -непрерывности заданных граничных значений.

2. Задача А. 1°. *Постановка задачи.* Будем считать, что на несоединенных берегах L_1^+ и L_1^- известны либо нормальное и касательное напряжения $(\sigma_y, \tau_{xy})_1^+$ и $(\sigma_y, \tau_{xy})_2^-$ (первая основная задача А), либо производные по x от компонент смещения $(u', v')_1^+$ и $(u', v')_2^-$ (вторая основная задача А), либо на одном из берегов, например на L_1^+ , известны напряжения $(\sigma_y, \tau_{xy})_1^+$, а на другом берегу L_2^- — производные от смещений $(u', v')_2^-$ (основная смешанная задача А). Во всех случаях заданные краевые условия считаем H -непрерывными, причем во второй задаче

$$\int_{l_j} [(u' + iv')_1^+ - (u' + iv')_2^-] dx = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2.1)$$

что выражает однозначность смещений при суммарном обходе разрезов по отрезку l_j в пластинах E_1 и E_2 .

Так как в данном случае система пластин E_1, E_2 с отождествленными берегами L_1^+ и L_2^- представляет риманову поверхность функции (1.1), то сформулированные задачи можно рассматривать как задачи на этой поверхности с пространственным разрезом с берегами L_1^+ и L_2^- , расположенными в разных плоскостях E_1 и E_2 .

2°. *Краевая задача для комплексных потенциалов.* На основании равенств (1.2) и условия (1.5) краевые условия на берегах L_1^+ и L_2^- во всех задачах А можно записать в единой форме

$$\nu_1 \Phi_1^+(t) + \Omega_1^-(t) = f_1(t), \quad \nu_2 \Phi_2^-(t) + \Omega_2^+(t) = f_2(t), \quad t \in L = \bigcup_{j=1}^m l_j$$

где $\nu_k = 1$, $f_k(t) = (\sigma_y - i\tau_{xy})_k^\pm$ или $\nu_k = -\kappa_k$, $f_k(t) = -2\mu_k (u' + iv')_k^\pm$ если на L_k^\pm заданы напряжения или производные от смещения, причем верхний индекс плюс берется при $k = 1$, минус — при $k = 2$. Соединение без натяга берегов L_1^- и L_2^+ описывается в силу (1.2) и (1.5) равенствами

$$\Phi_1^-(t) + \Omega_1^+(t) = h (\Phi_2^+(t) + \Omega_2^-(t)), \quad h = h_2/h_1$$

$$\mu (\kappa_1 \Phi_1^-(t) - \Omega_1^+(t)) = \kappa_2 \Phi_2^+(t) - \Omega_2^-(t), \quad \mu = \mu_2/\mu_1, \quad t \in L$$

Тем самым для нахождения функции Φ_k, Ω_k ($k = 1, 2$) имеем матричную краевую задачу Римана

$$\Phi^+(t) = A^{-1} B \Phi^-(t) + A^{-1} f(t), \quad t \in L \quad (2.2)$$

$$\Phi(z) = \text{col} \{ \Phi_1, \Phi_2, \Omega_1, \Omega_2 \}, \quad f(t) = \text{col} \{ f_1, f_2, 0, 0 \} \quad (2.2)$$

$$A = \begin{vmatrix} \nu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -h & 1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 & \mu & 0 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\nu_2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & h \\ \kappa_1 \mu & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (2.3)$$

Функция $\Phi(z)$ на концах [линии L может обращаться в бесконечность порядка меньше единицы, а в окрестности ∞ имеет в силу (1.3) вид

$$\Phi(z) = G + Hz^{-1} + O(z^{-2}) \quad (2.4)$$

$$G = \text{col} \{ \gamma_1, \gamma_2, \bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_1', \bar{\gamma}_2 + \bar{\gamma}_2' \},$$

$$H = (2\pi)^{-1} \text{col} \{ -P_1^0, -P_2^0, \kappa_1 P_1^0, \kappa_2 P_2^0 \}, \quad P_k^0 = P_k / (1 + \kappa_k), \quad k = 1, 2 \quad (2.5)$$

где $O(z^{-2})$ — вектор-функция, каждая компонента которой при больших z сравнима с z^{-2} .

3°. *Решение задачи.* Пусть λ_k ($k = 1, 2, 3, 4$) — собственные числа матрицы $A^{-1}B$. В случае первой и второй задач

$$\lambda_{1,3} = \pm 1, \quad \lambda_{2,4} = \pm i \left[\frac{\nu_2(1 + \mu h \kappa_1)}{\nu_1(\mu h + \kappa_2)} \right]^{1/2} \quad (2.6)$$

где $\nu_1 = \nu_2 = 1$ в первой задаче и $\nu_1 = -\kappa_1$, $\nu_2 = -\kappa_2$ во второй задаче, а в случае смешанной задачи все λ_k комплексны и находятся из уравнения

$$(\mu h + \kappa_2) \lambda^4 - (2\kappa_2 - \mu h (\kappa_1 + \kappa_2)) \lambda^2 + \kappa_2 (1 + \mu h \kappa_1) = 0 \quad (2.7)$$

Считаем, что все корни этого уравнения различны. Тогда [4] существует невырожденная матрица S , такая, что матрица $S^{-1}A^{-1}BS$ диагональна и ее диагональными элементами являются числа λ_k ($k = 1, 2, 3, 4$), причем столбцы матрицы S — собственные векторы матрицы $A^{-1}B$. От выбора этих векторов вид диагональной матрицы не зависит. В качестве S можно взять, например,

$$S = \left\| \begin{array}{c} h\lambda_k(1 + \kappa_2) \\ 1 + \mu h \kappa_1 + \lambda_k^2 \nu_1 (\mu h - 1) \\ -h\lambda_k^2 \nu_1 (1 + \kappa_2) \\ \lambda_k (\kappa_2 - \mu h \kappa_1 - \lambda_k^2 \nu_1 (\mu h + \kappa_2)) \end{array} \right\|_{k=1,2,3,4} = \| S_{jk} \| \quad (2.8)$$

Символ $\| \dots \|_{k=1,2,3,4}$ означает матрицу из четырех столбцов, k -й столбец которого состоит из указанных в скобке элементов. В дальнейшем встретится еще символ $\| \dots \|_4^{k=1}$, означающий вектор-столбец из четырех указанных в скобке элементов.

Будем искать функцию $\Phi(z)$ в виде

$$\Phi(z) = SF(z) \quad (2.9)$$

где $F(z) = \| F_k \|_4^{k=1}$ — новая неизвестная кусочно-голоморфная вектор-функция. Тогда из (2.2) получим

$$F_k^+(t) = \lambda_k F_k^-(t) + g_k(t), \quad t \in L, \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad (2.10)$$

где g_k — компоненты вектора-столбца $\| g_k \|_4^{k=1} = S^{-1}A^{-1}f$. На концах линии L функции F_k могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы, а в окрестности ∞ имеют в силу (2.4) и (2.9) вид

$$\| F_k \|_4^{k=1} = F(z) = S^{-1}\Phi = S^{-1}G + S^{-1}Hz^{-1} + O(z^{-2}) \quad (2.11)$$

Согласно [5], решениями задач (2.10) будут функции, которые для удобства дальнейших выкладок запишем единым образом в виде

$$F_k(z) = X_k(z) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g_k(t)}{X_k^+(t)} \frac{dt}{t-z} + c_{k0} + c_{k1}z + \dots + c_{km}z^m \right) \quad (2.12)$$

$$X_k(z) = \left(\prod_{j=1}^m \frac{z-b_j}{z-a_j} \right)^{\alpha_k + i\beta_k} \prod_{j=1}^m \frac{1}{z-b_j} \quad (2.13)$$

$$\alpha_k + i\beta_k = (\ln \lambda_k)/(2\pi i), \quad k = 1, 2, 3, 4$$

где $\ln \lambda_k$ определяется так, что $0 \leq \text{Im} \ln \lambda_k < 2\pi$, а у всех многозначных функций X_k берутся те ветви, которые однозначны в плоскости с разрезом по L и удовлетворяют условию $\lim z^m X_k(z) = 1$ при $z \rightarrow \infty$, причем в первой и второй задачах из-за того, что $\lambda_1 = 1$, следует положить

$$X_1(z) = 1, \quad c_{11} = c_{12} = \dots = c_{1m} = 0 \quad (2.14)$$

В первой и второй задачах из (2.11) и (2.12) с учетом (2.14) находим

$$\begin{pmatrix} c_{10} \\ c_{2m} \\ c_{3m} \\ c_{4m} \end{pmatrix} = S^{-1}G, \quad \begin{pmatrix} -(2\pi i)^{-1} \int_L g_1(t) dt \\ c_{2, m-1} + q_2 c_{2m} \\ c_{3, m-1} + q_3 c_{3m} \\ c_{4, m-1} + q_4 c_{4m} \end{pmatrix} = S^{-1}H \quad (2.15)$$

$$q_k = (\alpha_k + i\beta_k)(a_1 + a_2 + \dots + a_m) + (1 - \alpha_k - i\beta_k)(b_1 + b_2 + \dots + b_m)$$

Вид первого элемента вектора-столбца $S^{-1}H$ следует из граничных условий и условия равновесия конструкции A . В смешанной задаче из (2.11) и (2.12) находим

$$\|c_{km}\|_4^{k=1} = S^{-1}G, \quad \|c_{k, m-1} + q_k c_{km}\|_4^{k=1} = S^{-1}H \quad (2.16)$$

где q_k определяются так же, как в первой и второй задачах.

4°. *Определение постоянных c_{kj} .* Если $m = 1$, то равенствами (2.14)–(2.16) все постоянные c_{kj} будут определены. При $m > 1$ для определения остальных постоянных c_{kj} в первой задаче надо потребовать, чтобы приращение смещений вдоль замкнутых кривых, составленных из берегов разрезов l_j ($j = 1, 2, \dots, m - 1$) в каждой пластине E_1, E_2 и кривых, составленных из отрезков $[b_j, a_{j+1}]$ ($j = 1, 2, \dots, m - 1$), расположенных в E_1 и E_2 , было равно нулю. Это объясняется тем, что конструкция A представляет собой $(3m - 2)$ -связную область на римановой поверхности алгебраической функции (1.1) [6]. В этой области имеются $3m - 3$ негомотопных между собой замкнутых кривых, таких, что все остальные замкнутые кривые получаются из них (одного или нескольких) непрерывным деформированием в пределах области. Такими негомотопными кривыми являются указанные выше кривые, приращение смещений вдоль которых должно быть равно нулю, откуда на основании (1.2), (2.3), (2.9) получим

$$\sum_{k=1}^4 (\kappa_1 S_{1k} + S_{3k}) \int_{l_j} (F_k^+(t) - F_k^-(t)) dt = 0 \quad (2.17)$$

$$\sum_{k=1}^4 (\kappa_2 S_{2k} + S_{4k}) \int_{l_j} (F_k^+(t) - F_k^-(t)) dt = 0 \quad (2.18)$$

$$\sum_{k=1}^4 (\mu(\kappa_1 S_{1k} - S_{3k}) - \kappa_2 S_{2k} + S_{4k}) \int_{b_j}^{a_{j+1}} F_k(t) dt = 0 \quad (2.19)$$

$$j = 1, 2, \dots, m - 1$$

где S_{jk} — элементы матрицы S . Подставив в эти равенства вместо F_k их значения, получим для определения оставшихся $3m - 3$ постоянных c_{kj} ($k = 2, 3, 4; j = 0, 1, \dots, m - 2$) систему $3m - 3$ линейных алгебраических уравнений. Однозначная разрешимость этой системы доказывается аналогично классическому случаю ([3], с. 442).

Во второй задаче условия (2.18) являются следствиями условий (2.1) и (2.17), поэтому вместо них надо дополнительно задать еще $m - 1$ условий. Эти условия получаются, если известны разности смещений точек b_j, a_{j+1} . Тогда согласно равенствам (1.2), (2.3), (2.9)

$$\sum_{k=1}^4 (\kappa_1 S_{1k} - S_{3k}) \int_{b_j}^{a_{j+1}} F_k(t) dt = 2\mu_1 [u(a_{j+1}) + iv(a_{j+1}) - u(b_j) - iv(b_j)], \quad (2.20)$$

$$j = 1, 2, \dots, m - 1$$

Вместо разности смещений точек b_j и a_{j+1} можно задать также главные векторы внешних усилий, действующих на несоединенные берега разрезов l_j^+ в пластине E_1 и l_j^- в пластине E_2 совместно или только на один из берегов. Тогда должно быть выполнено одно из следующих условий ($j = 1, 2, \dots, m - 1$)

$$\sum_{k=1}^4 \int_{l_j} (S_{1k} F_k^+(t) + S_{3k} F_k^-(t)) dt = iQ_{j1} \quad (2.21)$$

$$\sum_{k=1}^4 \int_{l_j} (S_{2k} F_k^-(t) + S_{4k} F_k^+(t)) dt = -iQ_{j2} \quad (2.22)$$

$$\sum_{k=1}^4 \int_{l_j} ((S_{1k} - S_{4k}) F_k^+(t) + (S_{3k} - S_{2k}) F_k^-(t)) dt = iQ_j \quad (2.23)$$

где Q_{j1} , Q_{j2} и Q_j — главные векторы внешних усилий, действующих соответственно на берег l_j^+ в пластине E_1 , на берег l_j^- в пластине E_2 и на совокупность берегов l_j^+ в E_1 и l_j^- в E_2 . Условия (2.17), (2.19) и одно из условий (2.20)—(2.23) при каждом j ($j = 1, 2, \dots, m - 1$) образуют однозначно разрешимую систему $3m - 3$ уравнений для определения $3m - 3$ неизвестных постоянных c_{kj} , причем при разных j можно взять разные условия из группы условий (2.20)—(2.23).

В смешанной задаче для определения $4m - 4$ постоянных c_{kj} ($k = 1, 2, 3, 4; j = 0, 1, \dots, m - 2$) надо брать условия (2.17)—(2.19) и при каждом j одно из условий (2.20)—(2.23). Эти условия образуют однозначно разрешимую систему $4m - 4$ уравнений.

5°. Способы задания чисел P_1, P_2 . В первой задаче достаточно задать одно из этих чисел. Второе число найдется из равенства

$$h_1 P_1 + h_2 P_2 = - \sum_{j=1}^m \int_{l_j} (h_1 (\tau_{xy} + i\sigma_y)_1^+ - h_2 (\tau_{xy} + i\sigma_y)_2^-) dt$$

выражающего равновесие всей конструкции A . Оба эти числа также можно найти, если известна разность смещений каких-нибудь двух вершин разрезов, например точек a_1 и b_1 . Такая ситуация возникает, например, в следующей проблеме: при заданных на L_1^+ и L_2^- напряжениях подобрать числа P_1, P_2 так, чтобы смещения точек a_1 и b_1 отличались на заданное число.

Во второй задаче следует задать оба числа P_1, P_2 или одно из них, а для определения другого задать главный вектор внешних усилий, приложенных к одному из берегов L_1^+ или L_2^- или к совокупности берегов L_1^+, L_2^- . Числа P_1, P_2 также можно найти, если заданы главные векторы усилий, действующих на берега L_1^+ и L_2^- соответственно.

В смешанной задаче надо задать оба числа P_1, P_2 или одно из них и главный вектор внешних сил, действующих на L_2^- . Тогда второе число найдется из условия равновесия конструкции A . Кроме указанных способов задания чисел P_1, P_2 имеются и другие.

6°. Поведение напряжений и производных от смещений вблизи вершин разрезов. В первой и второй задачах, согласно (2.12), функции $F_k(z)$ вблизи

точки $z = a_j$ имеют вид [5]

$$F_1(z) = D_{0j} \ln(z - a_j) + O(1), \quad D_{0j} = -g_1(a_j)/2\pi i \quad (2.24)$$

$$F_k(z) = D_{kj} (z - a_j)^{-\alpha_k - i\beta_k} + O(1), \quad k = 2, 3, 4 \quad (2.25)$$

$$D_{kj} = \eta_{kj}(a_j) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g_k(t)}{X_k^+(t)} \frac{dt}{t - z} + c_{k0} + c_{k1}a_j + \dots + c_{km}a_j^m \right) \quad (2.26)$$

$$\eta_{kj}(z) = X_k(z) (z - a_j)^{\alpha_k + i\beta_k}$$

Функции X_k , g_k даются формулами (2.13), числа c_{kj} определены выше, а под $(z - a_j)^{\alpha_k + i\beta_k}$ понимается ветвь, однозначная в плоскости с разрезом по лучу $[a_j, +\infty)$ действительной оси, принимающая на верхнем берегу разреза при $z - a_j = 1$ значение 1. Интеграл в (2.26) существует как несобственный. В смешанной задаче все функции F_k , в том числе и F_1 , имеют вид (2.25). Из (1.2), (2.3), (2.9), (2.24), (2.25) в первой и второй задачах получим следующие асимптотические представления напряжений и производных от смещений вблизи точки $z = a_j$ в пластине E_1 :

$$(\sigma_x + \sigma_y)_1 = 4 \operatorname{Re} \left(\sum_{k=2}^4 S_{1k} D_{kj} \omega_{kj}(z) \right) + O(\ln r) \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} (\sigma_y - i\tau_{xy})_1 \\ 2\mu_1(u' + iv')_1 \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ \kappa_1 \end{array} \right\} \left(\sum_{k=2}^4 S_{1k} D_{kj} \omega_{kj}(z) \right) + \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ -1 \end{array} \right\} \left(\sum_{k=2}^4 [S_{3k} D_{kj} \omega_{kj}(\bar{z}) + \right. \\ &+ (\alpha_k - i\beta_k) \bar{S}_{1k} \bar{D}_{kj} (1 - (z - a_j) / \overline{(z - a_j)}) \overline{\omega_{kj}(z)}] \left. \right) + O(\ln r) \\ r = |z - a_j|, \quad \omega_{kj}(z) &= (z - a_j)^{-\alpha_k - i\beta_k}, \quad j = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

Постоянные α_k , β_k , S_{jk} и D_{kj} даются формулами (2.6), (2.8), (2.13) и (2.26) соответственно.

В смешанной задаче в этих представлениях надо все суммы брать по k от 1 до 4. При этом постоянные α_k , β_k определяются из равенств (2.13) и (2.7).

Чтобы получить аналогичные представления вблизи точки $z = b_j$ в пластине E_1 , надо в формулах (2.24)–(2.27) заменить a_j на b_j , $\alpha_k + i\beta_k$ на $1 - \alpha_k - i\beta_k$, а чтобы получить представления вблизи вершин разрезов в пластине E_2 надо заменить κ_1 на κ_2 , μ_1 на μ_2 , а числа S_{1k} и S_{3k} на числа S_{2k} и S_{4k} ($k = 1, 2, 3, 4$) соответственно.

Числа D_{kj} в представлениях (2.25) и (2.27) играют роль коэффициентов интенсивности напряжений. С помощью них вычисляются и инвариантные Γ -интегралы [7, 8].

Из представлений 2.27 видно, что напряжения и производные от смещений вблизи точки $z = a_j$ имеют в общем случае особенности не только степенного типа, но и осциллирующего типа, определяемые функциями вида $(z - a_j)^{-i\beta_k}$ или, что не уменьшает общности, функциями вида $[(z - a_j)/(b_j - a_j)]^{-i\beta_k}$. При этом в случае первой и второй задач наивысшая особенность определяется функцией $(z - a_j)^{-i\beta_{k-3/4}}$. Подобная картина наблюдается, например ([3], гл. 6), в классической задаче о штампе или в смешанной задаче для плоскости с прямолинейными разрезами. Согласно равенствам (2.13), (2.6)

$$\beta_1 = \beta_3 = 0, \quad \beta_2 = \beta_4 = -\frac{1}{4\pi} \ln \frac{\nu_2(1 + \mu h \kappa_1)}{\nu_1(\mu h + \kappa_2)}$$

В частности, если $\mu h = (\nu_1 \kappa_2 - \nu_2) / (\nu_2 \kappa_1 - \nu_1)$, то $\beta_2 = \beta_4 = 0$ и особенности осциллирующего типа отсутствуют. Так как выражение под логарифмом как функция от μh возрастает, то его значения при $5/3 < \kappa_1$,

$\kappa_2 < 3$ (таковы эти постоянные для реальных пластин) и $\mu h > 0$ заключены между $1/3$ и 3 . Следовательно,

$$|\beta_2| = |\beta_4| < (\ln 3)/4\pi \approx 0,0874$$

и особенности осциллирующего типа будут сказываться существенно лишь при

$$|z - a_j| < (b_j - a_j) \exp[-2\pi^2/\ln 3] \approx 1,573 \cdot 10^{-8} (b_j - a_j) \quad (2.28)$$

где $(b_j - a_j)$ — длина отрезка l_j . Очевидно, представления (2.27) имеют место вблизи точки $z = a_j$ вне достаточно малой окрестности, определяемой неравенством (2.28).

7°. *Частный случай.* Рассмотрим случай, когда имеется лишь один разрез $[a_1, b_1] = [-a, a]$ и $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$, $\mu_1 = \mu_2$, $h_1 = h_2$, т. е. когда конструкция A представляет однородную риманову поверхность постоянной толщины. Тогда решения всех задач A можно записать в единой форме

$$\Phi(z) = SF(z), \quad \Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} \lambda_k \\ 1 \\ -\nu\lambda_k^2 \\ -\nu\lambda_k^3 \end{pmatrix}_{k=1,2,3,4}$$

$$F = \|F_k\|_4^{k=1}, \quad F_k(z) = X_k(z) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{g_k(t)}{X_k^+(t)} \frac{dt}{t-z} + c_{k0} + c_{k1}z \right)$$

$$\|c_{k0} + q_k c_{k1}\|_4^{k=1} = S^{-1}H, \quad \|c_{k1}\|_4^{k=1} = S^{-1}G, \quad \|g_k\|_4^{k=1} = S^{-1}A^{-1}f(t)$$

где в первой и смешанной задачах $\nu = \nu_1 = 1$, во второй задаче $\nu = -\kappa$, в первой и второй задачах

$$\lambda_{1,3} = \pm 1, \quad \lambda_{2,4} = \pm i, \quad q_{1,3} = 0, \quad q_{2,4} = \pm a/2$$

$$X_1(z) = \frac{1}{z}, \quad X_k(z) = (z-a)^{(k-5)/4} (z+a)^{(1-k)/4}, \quad k = 2, 3, 4$$

в смешанной задаче

$$\lambda_k = \kappa^{1/4} \exp[i\pi(2k-1)/4], \quad q_k = a(5-2k+8i\beta)/4$$

$$X_k(z) = (z-a)^{-i\beta+(2k-9)/8} (z+a)^{i\beta+(1-2k)/8}, \quad \beta = \frac{\ln \kappa}{8\pi}, \quad k = 1, 2, 3, 4$$

а вектор-столбцы G, H, f и матрица A даются формулами (2.5), (1.4), (2.3).

Для напряжений и производных от смещений вблизи точки a справедливы представления (2.27), в которых надо положить

$$\omega_{kj}(z) = (z-a)^{(k-5)/4} \quad \text{или} \quad \omega_{kj}(z) = (z-a)^{-i\beta+(2k-9)/8}$$

Наибольшая особенность в этих представлениях определяется в первой и второй задачах функцией $(z-a)^{-3/4}$, а в смешанной задаче — функцией $(z-a)^{-i\beta-7/8}$.

3. **Задача Б.** Как и в задаче A , будем считать, что на несоединенных берегах L_1^+ и L_2^+ заданы либо напряжения (первая задача B), либо смещения (вторая задача B), либо на одном из берегов заданы напряжения, а на другом — смещения (смешанная задача B). Кроме того, надо задать граничные условия на линии соединения берегов L_1^- и L_2^- (фиг. 2, б). Если на этой линии заданы смещения, то задача B распадается на две самостоятельные задачи отдельно для пластин E_1 и E_2 , решенные в [3]. Будем считать, что на этой линии заданы внешние усилия $(X + iY)_{\text{ext}}$. Тогда для нахождения комплексных потенциалов $\Phi_1, \Phi_2, \Omega_1, \Omega_2$, образующих вектор-столбец $\Phi(z)$, получим матричную задачу Римана (2.2)

с коэффициентами

$$A = \begin{vmatrix} v_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 1 \\ 0 & 0 & 1 & h \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -\mu\kappa_1 & \kappa_2 & 0 & 0 \\ -1 & -h & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad f(t) = \begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ 0 \\ f_4 \end{vmatrix}$$

$$h = h_2/h_1, \quad \mu = \mu_2/\mu_1, \quad f_4(t) = -i (X + iY)_{\text{ext}}$$

где

$$v_k = 1, \quad f_k(t) = (\sigma_y - i\tau_{xy})_k^+$$

или

$$v_k = -\kappa_k, \quad f_k(t) = -2\mu_k (u' + iv')_k^+ \quad (k = 1, 2)$$

в зависимости от того, что задано на L_k^+ : напряжения или смещения. Далее задача B решается аналогично задаче A . Более того, все результаты по задаче A , полученные в п. 3°–6° разд. 2, справедливы и для задачи B с той лишь разницей, что изменятся собственные числа λ_k матрицы $A^{-1}B$ и матрица S , столбцами которой являются собственные вектора матрицы $A^{-1}B$. В случае первой и второй задач B

$$\lambda_{1,3} = \pm 1, \quad \lambda_{2,4} = \pm i [(\mu h \kappa_1 + \kappa_2) / (v_1 v_2 (\mu h + 1))]^{1/2}$$

а в смешанной задаче все λ_k комплексны и находятся из уравнения

$$\kappa_2 (\mu h + 1) \lambda^4 + (\mu h (1 + \kappa_1 \kappa_2) - 2\kappa_2) \lambda^2 + \mu h \kappa_1 + \kappa_2 = 0$$

Матрица S имеет вид

$$S = \begin{vmatrix} \kappa_2 - h + v_2 \lambda_k^2 (h + 1) \\ 1 + \mu \kappa_1 + v_1 \lambda_k^2 (\mu - 1) \\ -v_1 \lambda_k (\kappa_2 - h + v_2 \lambda_k^2 (h + 1)) \\ -v_2 \lambda_k (1 + \mu \kappa_1 + v_1 \lambda_k^2 (\mu - 1)) \end{vmatrix}_{k=1, 2, 3, 4}$$

Автор благодарит Д. Д. Ивлева за постоянную помощь при выполнении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 247 с.
2. Фридель Ж. Дислокации. М.: Мир, 1967. 643 с.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
4. Смирнов В. И. Курс высшей математики. М.: Наука, 1974. Т. 3. Ч. 1. 323 с. Ч. 2. 672 с.
5. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
6. Чеботарев Н. Г. Теория алгебраических функций. М.—Л.: Гостехиздат, 1948. 396 с.
7. Черепанов Г. П. Инвариантные Г-интегралы и некоторые их приложения в механике // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 3. С. 399—412.
8. Черепанов Г. П. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1983. 296 с.

Чебоксары

Поступила в редакцию
19.1.1989