УДК 62—50

В. А. Байдосов

НЕЧЕТКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ

Рассматриваются дифференциальные уравнения, в которых часть параметров точно неизвестна, однако имеются некоторые сведения о предпочтении тех или иных значений этих параметров. Путем формализации таких сведений в соответствии с теорией нечетких множеств (НМ) вводится понятие дифференциального включения (ДВ) с нечеткой правой частью. Решение дифференциального включения определяется как НМ движений. Устанавливается, что его множество уровня совпадает с пучком решений обычного ДВ, правая часть которого — соответствующее множество уровня нечеткой правой части. Формулируются условия на правую часть исходного дифференциального уравнения и функцию принадлежности НМ параметров, обеспечивающие существование решения ДВ с нечеткой правой частью. Рассматривается частный случай линейной управляемой системы, где матрицы коэффициентов задаются при помощи прямого произведения одномерных НМ. Таким образом, предлагается новая формализация динамических систем с неточно известными параметрами. Устанавливается связь между теорией ДВ и теорией НМ.

Возникновение ДВ с нечеткой правой частью можно проиллюстрировать на следующем примере. Пусть имеется дифференциальное уравнение, моделирующее некоторый реальный процесс

$$x^{\cdot} = f(t, x, k) \tag{0.1}$$

где k — вектор параметров в правой части уравнения. Вектор k часто бывает точно неизвестен. Кроме того, k может меняться по неизвестному закону. Если можно определить некоторое множество K возможных значений k, то уравнение (0.1) целесообразно заменить ДВ

$$x^{\cdot} \in f(t, x, K) \tag{0.2}$$

Может случиться, что различные точки множества K не равноправны как возможные реализации значений k. Тогда естественно считать, что K — НМ. Если продолжить функцию $f(t, x, \cdot)$ на семейство НМ по принципу обобщения Заде [1], то справа в выражении (0.2) получим НМ.

1. Дифференциальные включения с нечеткой правой частью. Введем обозначения: $P(X)$ — множество нечетких подмножеств пространства X [1, 2], μ_M — функция принадлежности НМ M, $\langle \mu_M, x\rangle$ — значение μ_M в точке x.

Пусть заданы промежуток $T \triangleq [t_*, +\infty)$, область $G \subset T \times R^n$ и отображение

$$\Psi : G \to P(R^n) \tag{1.1}$$

Определение 1. ДВ с нечеткой правой частью назовем выражение

$$x^{\cdot} \in \Psi(t, x) \tag{1.2}$$

представляющее собой формальное символическое соотношение, содержательный смысл которого определяется через НМ решений ДВ (1.2).

Пусть $[t_*, t^*] \subset T$, АС $[t_*, t^*]$ — множество абсолютно непрерывных функций, заданных на $[t_*, t^*]$, графики которых содержатся в G.

Определение 2. НМ решений ДВ (1.2) на отрезке $[t_*, t^*]$ назовем НМ $R[t_*, t^*]$ в АС $[t_*, t^*]$, функция принадлежности которого определяется соотношением

$$\langle \mu_{R[t_*, t^*]}, x(\cdot)\rangle \triangleq \operatorname*{essinf}_{t\in[t_*, t^*]} \langle \mu_{\Psi(t, x(t))}, x^{\cdot}(t)\rangle \tag{1.3}$$

С точки зрения теории НМ смысл данного определения содержательно сводится к следующему. Пусть дано семейство пространств X_t, $t \in [t_*, t^*]$ и M_t — НМ в X_t. Элементы прямого произведения $X \triangleq \prod_t X_t$ — функции $x(\cdot)$, удовлетворяющие условию $x(t) \in X_t$. Прямое произведение $M \triangleq \prod_t M_t$ НМ M_t определяется функцией принадлежности

$$\langle \mu_M, x(\cdot)\rangle = \inf_t \langle \mu_{M_t}, x(t)\rangle$$

В рассматриваемом случае $X_t = R^n$, $M_t = \Psi(t, x(t))$ и степень принадлежности функции $x(\cdot)$ множеству решений включения (1.2) полагается равной степени принадлежности производной $x^{\cdot}(\cdot)$ прямому произведению $\prod_t M_t$ с точностью до множества значений t нулевой меры.

Множеством уровня M_a, $a \in [0, 1]$, НМ M в X называется обычное (четкое) множество, определяемое соотношением

$$M_a \triangleq \{x \in X : \langle \mu_M, x\rangle \geqslant a\}$$

Множества уровня НМ $\Psi(t, x)$, $R[t_*, t^*]$ обозначим $\Psi_a(t, x)$, $R_a[t_*, t^*]$.

Предложение 1. Для того чтобы выполнялось условие

$$x(\cdot) \in R_a[t_*, t^*] \tag{1.4}$$

необходимо и достаточно, чтобы функция $x(\cdot)$ была решением обычного ДВ

$$x^{\cdot}(t) \in \Psi_a(t, x(t)) \tag{1.5}$$

Доказательство. Пусть выполнено условие (1.4). Значит,

$$\operatorname{essinf}_t \langle \mu_{\Psi(t, x(t))}, x^{\cdot}(t)\rangle \geqslant a \tag{1.6}$$

Обозначим T_0 множество тех t, для которых либо $\langle \mu_{\Psi(t, x(t))}, x^{\cdot}(t)\rangle < a$, либо не определена функция $x^{\cdot}(t)$. Множество T_0 имеет меру нуль. Поэтому почти всюду

$$\langle \mu_{\Psi(t, x(t))}, x^{\cdot}(t)\rangle \geqslant a \tag{1.7}$$

Значит, почти всюду выполнено ДВ (1.5).

Обратно, пусть для почти всех t выполняется ДВ (1.5). Значит, неравенство (1.7) выполнено для почти всех t. Отсюда следует неравенство (1.6), или $\langle \mu_{R[t_*, t^*]}, x(\cdot)\rangle \geqslant a$. Следовательно, выполнено условие (1.4).

Таким образом, множества уровня НМ решений ДВ (1.2) являются множествами решений семейства обычных ДВ (1.5) при $a \in [0, 1]$. В связи с этим становятся важными вопросы непустоты множеств $\Psi_a(t, x)$, их компактности, выпуклости и полунепрерывности сверху многозначных отображений $\Psi_a(t, x)$.

Выясним условия, гарантирующие непустоту множеств $\Psi_a(t, x)$ при всех $(t, x) \in G$. НМ называется пустым ($\varnothing$), если его функция принадлежности тождественно равна нулю. Предположим, что $\Psi(t, x) \neq \varnothing$ для всех $(t, x) \in G$.

Определение 3. НМ A назовем правильным, если оно не пусто, множества уровня A_a при $a > 0$ компактны и функция принадлежности μ_A полунепрерывна сверху.

Для правильного НМ A существует $\max\{a: A_a \neq \varnothing\}$.

Действительно, пусть $A_{a'} \neq \varnothing$. В силу полунепрерывности сверху μ_A и компактности $A_{a'}$ функция μ_A достигает на $A_{a'}$ максимума в некоторой точке x^*. Пусть $a^* \triangleq \langle \mu_A, x^*\rangle$. Покажем, что $a^* = \max\{a: A_a \neq \varnothing\}$. Имеем $A_{a^*} \neq \varnothing$, так как

$x^* \in A_{a^*}$. Если $a > a^*$, то $A_a = \varnothing$. В противном случае $\langle \mu_A, x\rangle \geqslant a > a^*$ для некоторого $x \in A_{a'}$, что противоречит определению a^*.

Пусть

$$\zeta(t, x) \triangleq \max\{a : \Psi_a(t, x) \neq \varnothing\}$$

Заметим, что $\zeta(t, x) > 0$ в силу $\Psi(t, x) \neq \varnothing$. Положим $a_* = \inf_G \zeta(t, x)$. Тогда для всех $(t, x) \in G$ и $a \leqslant a_*$ имеем $\Psi_a(t, x) \neq \varnothing$. Если же $a > a_*$, то существует точка $(t_0, x_0) \in G$, такая, что $\zeta(t_0, x_0) < a$ и, следовательно, $\Psi_a(t_0, x_0) = \varnothing$.

В дальнейшем считаем, что $a_* > 0$ и множества уровня $\Psi_a(t, x)$ рассматриваются для $a \in [0, a_*]$. Особо следует выделить случай $\zeta(t, x) \equiv \equiv \text{const} = a_*$ и, в частности, случай $a_* = 1$.

НМ A называется выпуклым, если все его множества уровня выпуклы ([1], с. 161). Если A^α — семейство НМ и $A \triangleq \bigcap\limits_\alpha A^\alpha$, то $A_a = \bigcap\limits_\alpha A_a{}^\alpha$ [1]. Отсюда следует, что пересечение любого семейства выпуклых НМ является выпуклым НМ. Пусть со A — пересечение всех выпуклых НМ, содержащих A (выпуклая оболочка A). Тогда $(\text{co}\, A)_a = \text{co}\,(A_a)$.

Для установления полунепрерывности сверху отображений $\Psi_a(t, x)$ может быть использован следующий критерий.

Предложение 2. Пусть $\zeta(t, x) = \text{const} = a_*$. Для того чтобы многозначное отображение $\Psi_a(t, x)$ было полунепрерывно сверху по (t, x) необходимо и достаточно, чтобы функция $\nu \triangleq \langle \mu_{\Psi(t, x)}, y\rangle$ была полунепрерывна сверху как функция (t, x, y).

Доказательство. Достаточность. Допустим, что функция ν полунепрерывна сверху, но отображение $\Psi_a(t, x)$ не является полунепрерывным сверху. Тогда график отображения Ψ_a не замкнут и существуют последовательности $(t_n, x_n) \to (t_0, x_0)$, $y_n \to y_0$, такие, что $y_n \in \Psi_a(t_n, x_n)$, $y_0 \notin \Psi_a(t_0, x_0)$. Следовательно, $\nu_n \geqslant a$, $\nu_0 < a$, где $\nu_m = \langle \mu_{\Psi(t_m, x_m)}, y_m\rangle$.

В силу полунепрерывности сверху функции ν для любого $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого n, выполняются неравенства $\nu_n < \nu_0 + \varepsilon$. Имеем $\nu_0 < a \leqslant \nu_n < \nu_0 + \varepsilon$. Устремляя ε к нулю, получаем $\nu_0 < \nu_0$.

Необходимость. Допустим, что функция ν не является полунепрерывной сверху в точке (t_0, x_0, y_0). Тогда найдутся $\varepsilon > 0$ и последовательность $(t_n, x_n, y_n) \to (t_0, x_0, y_0)$, такие, что $\nu_n \geqslant \nu_0 + \varepsilon$. Пусть $\nu_0 = a$. Тогда $y_n \in \Psi_{a+\varepsilon}(t_n, x_n)$. Следовательно, $y_0 \in \Psi_{a+\varepsilon}(t_0, x_0)$ и приходим к противоречию: $a \geqslant a + \varepsilon$.

2. ДВ с нечеткой правой частью, порождаемые дифференциальным уравнением. Пусть дано дифференциальное уравнение ($k(t)$ — вектор параметров (коэффициентов))

$$\dot{x} = f(t, x, k(t)),\ (t, x) \in G,\ k(t) \in R^r \tag{2.1}$$

Отображение $f(t, x, \cdot) : k \to f(t, x, k)$ продолжим до отображения $f(t, x, \cdot) : P(R^r) \to P(R^n)$, пользуясь принципом обобщения Заде [1]. При этом для $K \subset P(R^r)$ функция принадлежности НМ $f(t, x, K)$ определяется равенством

$$\langle \mu_{f(t,x,K)}, y\rangle = \sup_{k \in R^r} \{\langle \mu_K, k\rangle \wedge \langle \mu_{f(t,x,k)}, y\rangle\} = \sup\{\langle \mu_K, k\rangle : f(t, x, k) = y\}$$

Здесь и далее $\wedge$ означает операцию взятия минимума. Кроме того, предполагается, что $\sup \varnothing = 0$, поскольку $\langle \mu_K, k\rangle$ принимает значения в $[0, 1]$

Пусть $T_* = [t_*, t^*)$, причем если $(t, x) \in G$, то $t \in T_*$. Значение t^* может быть равным $+\infty$.

Зададим на T_* некоторую функцию $K(t)$ со значениями в $P(R^r)$ и поставим в соответствие уравнению (2.1) ДВ с нечеткой правой частью

$$\dot{x} \in f(t, x, K(t)) \tag{2.2}$$

т. е. здесь $\Psi(t, x) \triangleq f(t, x, K(t))$.

Предложение 3. Пусть функция $f(t, x, k)$ непрерывна по k и НМ $K(t)$ — правильное. Тогда для $a > 0$

$$f_a(t, x, K(t)) = f(t, x, K_a(t))$$

Доказательство. Пусть $a > 0$ и $y \in f_a(t, x, K(t))$. Имеем $a' \triangleq \langle \mu_{f(t, x, K(t))}, y\rangle = \sup\{\langle \mu_{K(t)}, k\rangle : f(t, x, k) = y\} \geqslant a$. Положим

$$M \triangleq \{k : \langle \mu_{K(t)}, k\rangle \geqslant a'', f(t, x, k) = y\} =$$
$$= \{k : k \in K_{a''}(t), f(t, x, k) = y\}, 0 < a'' < a$$

Из неравенства $a'' < a'$ следует, что

$$\sup\{\langle \mu_{K(t)}, k\rangle : k \in M\} = a'$$

Так как функция $\mu_{K(t)}$ полунепрерывна сверху, то существует элемент $k' \in M$, такой, что $a' = \langle \mu_{K(t)}, k'\rangle$. При этом $y = f(t, x, k')$ и $k' \in K_{a''}(t) \subset K_a(t)$. Следовательно, $y \in f(t, x, K_a(t))$.

Обратно, пусть $y \in f(t, x, K_a(t))$. Тогда $y = f(t, x, k')$, где $k' \in K_a(t)$. Отсюда

$$\langle \mu_{f(t, x, K(t))}, y\rangle = \sup\{\langle \mu_{K(t)}, k\rangle :$$
$$f(t, x, k) = y\} \geqslant \langle \mu_{K(t)}, k'\rangle \geqslant a$$

Следовательно, $y \in f_a(t, x, K(t))$.

Следствия. 1°. Пусть функция $f(t, x, k)$ непрерывна по k и $K(t)$ — правильное НМ. Тогда при $a > 0$ множества уровня $f_a(t, x, K(t))$ компактны.

2°. Пусть функция $f(t, x, k)$ непрерывна по k и для всякого t НМ $K(t)$ — правильное. Тогда $\zeta(t, x) = \max\{a: K_a(t) \neq \varnothing\}$.

Предложение 4. Пусть функция $f(t, x, k)$ непрерывна по (t, x, k) (непрерывна по (x, k)), $K(t)$ — правильное НМ при всех t и для $a \in (0, a_*]$ отображение $K_a(t)$ полунепрерывно сверху по t. Тогда при $a \in (0, a_*]$ отображение $f_a(t, x, K(t))$ полунепрерывно сверху по (t, x) (полунепрерывно сверху по x

Доказательство проведем для случая непрерывности по (t, x, k). В случае непрерывности по (x, k) оно аналогично.

Допустим противное. Тогда найдем такое открытое множество $B \subset R^n$, что множество

$$H \triangleq \{(t, x) : f_a(t, x, K(t)) \subset B\}$$

не будет открытым. Значит, найдутся такие $(t_0, x_0) \in H$, $(t_n, x_n) \in H$ $(n = 1, 2, \ldots)$, что $(t_n, x_n) \to (t_0, x_0)$. Выберем последовательность

$$y_n \in f_a(t_n, x_n, K(t_n)) \setminus B \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Пусть $k^n \in K_a(t_n)$ таковы, что $y_n = f(t_n, x_n, k^n)$. Так как отображение $K_a(t)$ компактнозначно и полунепрерывно сверху, то образ компактного множества $\{t_n, t_0\}_{n=1}^{\infty}$ при этом отображении компактен ([3], с. 133). Поэтому, не нарушая общности, можно считать, что последовательность k^n сходится к некоторому $k^0 \in K_a(t_0)$. Следовательно, существует $y_0 \triangleq \lim y_n = f(t_0, x_0, k^0)$. Так как $y_n \notin B$, то $y_0 \notin B$. С другой стороны, $y_0 \in f(t_0, x_0, K_a(t_0)) \subset B$. Получили противоречие.

Следствие. Если функция $f(t, x, k)$ непрерывна по (t, x, k), $K(t) \equiv K$ и НМ K — правильное, то отображение $f_a(t, x, K)$ полунепрерывно сверху по (t, x) при $a \in (0, a_*]$.

Важным частным случаем является задание НМ $K(t)$ как прямого произведения НМ, которым принадлежат параметры дифференциального уравнения (2.1). Пусть

$$k(t) \triangleq (k_1(t), \ldots, k_r(t)), \quad K(t) \triangleq \prod_{i=1}^{r} K^i(t)$$

$$\text{Тогда } \langle \mu_{K(t)}, k \rangle = \langle \mu_{K^1(t)}, k_1 \rangle \wedge \ldots \wedge \langle \mu_{K^r(t)}, k_r \rangle$$

$$\left(K_a(t) = \prod_{i=1}^{r} K_a{}^i(t) \quad ([1], \text{с. } 28)\right).$$

Отсюда следует, что если множества $K^i(t)$ правильны, то и $K(t)$ — равильное множество.

Если для $a \in (0, a_*]$ множества уровня $K_a{}^i(t)$ полунепрерывны сверху по t, то и $K_a(t)$ полунепрерывны сверху по t.

Действительно, допустим, что это не так. Тогда найдется такое открытое множество $B \subset R^r$, что множество $T_0 = \{t : K_a(t) \subset B\}$ не открыто, т. е. существуют $t_0 \in T_0$, $t_n \notin T_0$, такие, что $t_n \to t_0$. Пусть $k^n \in K_a(t_n) \setminus B$ и $k^n = (k_1{}^n, \ldots, k_r{}^n)$, где $k_i{}^n \in K_a{}^i(t_n)$. Так как отображения $K_a{}^i(t)$ компактнозначны и полунепрерывны сверху, то можно считать, что $k_i{}^n \to k_i{}^0 \in K_a{}^i(t_0)$. Пусть $k^\circ = (k_1{}^\circ, \ldots, k_r{}^\circ)$. Тогда $k^n \to k^\circ$. И так как $k^n \notin B$, то $k^\circ \notin B$. С другой стороны,

$$k^\circ \in \prod_{i=1}^{r} K_a{}^i(t_0) = K_a(t_0)$$

Следовательно, $k^\circ \in B$.

Предложение 5. Пусть функция $f(t, x, k)$ непрерывна по t, x, k, $K(t)$ — правильные НМ, для $a \in (0, a_*]$ отображения $K_a(t)$ полунепрерывны сверху по t. Пусть также для всех $a \in (0, a_*]$ множества $f(t, x, K_a(t))$ выпуклы. Тогда, если $(t_0, x_0) \in G$ и $a \in (0, a_*]$, то существует такое $d > 0$, что множество решений $R_a[t_0, t_0 + d]$ ДВ $x^\cdot \in f_a(t, x, K(t))$, удовлетворяющих начальному условию $x(t_0) = x_0$, не пусто.

Из условий предложения 5 и предыдущих утверждений следует, что правая часть $f_a(t, x, K(t))$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1 ([4], с. 60—61). Доказательство сводится к применению этой теоремы. Если область G содержит цилиндр

$$Z = \{(t, x) : t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + c, \quad |x - x_0| \leqslant b\}$$

то, в качестве d можно взять число

$$d = \min\{c, b/m\}, \quad m = \sup_{(t, x) \in Z} |f_a(t, x, K(t))|$$

Если $K(t)$ не зависит от t, то в формулировке предложения 5 требование полунепрерывности сверху $K(t)$ опускается.

Рассмотрим в качестве примера линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$x^\cdot = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u(t), \quad x \in R^n, \quad u(t) \in R^s \tag{2.3}$$

где $\mathbf{A}$ — $(n \times n)$ — матрица, $\mathbf{B}$ — $(n \times s)$ — матрица, $u(t)$ — непрерывная функция. Пусть $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $\mathbf{B} = [b_{ml}]$, $k = [a_{11}, \ldots, a_{nn}, b_{11}, \ldots, b_{ns}]$. Зададим на вещественной оси НМ A^{ij}, B^{ml} $(i, j, m = 1, \ldots, n;\ l = 1, \ldots, s)$. Обозначим A НМ матриц с функцией принадлежности

$$\langle \mu_A, \mathbf{A} \rangle = \min_{i,j} \langle \mu_{A^{ij}}, a_{ij} \rangle$$

Аналогично определяется НМ матриц B. Тогда, полагая $K \triangleq A \times B$, получаем ДВ, порождаемое уравнением (2.3) и множеством K. Это включение символически можно записать в виде

$$x^{\cdot} \in Ax + Bu(t) \quad (f(t, x, K) = Ax + Bu(t)) \tag{2.4}$$

Пусть НМ A^{ij} и B^{ml} — правильные и выпуклые. Тогда K будет правильным выпуклым НМ. Рассмотрим отображение $\xi(t, x)$: $R^r \to R^n$, $r = n^2 + ns$, переводящее (A, B) в $Ax + Bu(t)$. Это отображение линейно и, следовательно, всякое выпуклое множество из пространства R^r коэффициентов переводится этим отображением в выпуклое множество из R^n. Следовательно, множества

$$f_a(t, x, K) \overset{\Delta}{=} A_a x + B_a u(t)$$

будут выпуклы и к ДВ (2.4) применимо предложение 5.

3. ДВ с правой частью, измеримой по t. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x^{\cdot} = f(t, x, w(t), k(t)), \ (t, x) \in G, \ w \in R^s, \ k \in R^r \tag{3.1}$$

Будем считать, что функция $f(t, x, w, k)$ непрерывна по (t, x, w, k), $w(t)$ измерима по t. Пусть выбрана многозначная функция $K(t)$. Тогда получим ДВ

$$x^{\cdot} \in f(t, x, w(t), K(t)) \tag{3.2}$$

Многозначное отображение $F(p)$, $p \in E$, называется измеримым по p, если множество E измеримо и для всякого замкнутого B измеримо множество $\{p : F(p) \cap B \neq \varnothing\}$. Оказывается, что изучение ДВ с нечеткой правой частью вида (3.2) сводится к изучению ДВ с правой частью, измеримой по t.

Предложение 6. Пусть НМ $K(t)$ — правильные и для любого $a \in (0, a_*]$ отображение $K_a(t)$ полунепрерывно сверху. Тогда $f_a(t, x, w(t), K(t))$ измеримо по t при любых x и $a \in (0, a_*]$.

Доказательство. Положим $h \overset{\Delta}{=} (t, w)$, $f_1(h, x, k) \overset{\Delta}{=} f(t, x, w, k)$, B — замкнутое множество в R^n, $M \overset{\Delta}{=} \{h : B \cap f_1(h, x, K_a(t)) \neq \varnothing\}$. Вектор $h \in M$ тогда и только тогда, когда существует такое $k(t) \in K_a(t)$, что $f_1(h, x, k(t)) \in B$. Пусть $h_n \overset{\Delta}{=} (t_n, w_n) \in M$ сходится к $h_0 \overset{\Delta}{=} (t_0, w_0)$ и $f_1(h_n, x, k(t_n)) \in B$. Так как множество $\{t_n, t_0\}_{n=1}^{\infty}$ компактно, а отображение $K_a(t)$ полунепрерывно сверху и компактнозначно, то $(\bigcup_n K(t_n)) \cup K(t_0)$ — компакт. Поэтому, не нарушая общности, можно считать, что $k(t_n)$ сходится к $k(t_0) \in K(t_0)$. Но тогда $f_1(h_n, x, k(t_n)) \to f_1(h_0, x, k(t_0)) \in B$. Отсюда следует, что $h_0 \in M$ и M — замкнутое множество.

Обозначим T_* множество тех t, для которых

$$B \cap f(t, x, w(t), K_a(t)) \neq \varnothing$$

Множество T_* совпадает с множеством тех t, для которых $h(t) \overset{\Delta}{=} (t, w(t)) \in M$. Так как функция $w(t)$ измерима, то и функция $h(t)$ измерима ([5], с. 82). Следовательно, T_* — измеримое множество.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chang S. S. L., Zadeh L. A.* On fuzzy mapping and control // IEEE Trans. Syst. Man and Cybern. 1972. V. SMC — 2. N 1. p. 30—34.
2. *Орловский С. А.* Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. М.: Наука, 1981. 206 с.
3. *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В.* Многозначные отображения // Итоги науки и техники. Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1982. Т. 19. С. 127—230.
4. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
5. *Бурбаки Н.* Элементы математики. Т. 3. Общая топология. Числа и связанные с ними группы и пространства. М.: Физматгиз, 1959. 247 с.
6. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 623 с.

Свердловск

Поступила в редакцию 2.II.1989