

УДК 539.375

© 1990 г.

А. М. Линьков, С. Г. Могилевская

ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ В ПЛОСКИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Работа посвящена решению плоских задач теории упругости методом разрывных смещений с использованием конечночастных интегралов (КЧИ). Получены два разных — вещественное и комплексное — интегральных уравнения с КЧИ для плоской задачи о теле с трещинами. Это открывает путь для использования произвольных аппроксимаций разрывов смещений. Работа содержит квадратурные формулы для КЧИ при аппроксимации разрывов смещений полиномами любого порядка для внутренних элементов и специальными функциями, учитывающими асимптотику, для концевых элементов. Тем самым создаются предпосылки для повышения точности расчетов. Результаты проведенных численных экспериментов свидетельствуют о резком — на два порядка — повышении точности при решении задачи о трещине с использованием предложенных квадратурных формул.

Конечночастные интегралы (КЧИ), введенные Адамаром [1], в последнее десятилетие стали полезным инструментом для решения задач механики сплошной среды [2—8], особенно в случаях, когда искомые функции испытывают разрывы на некоторых поверхностях (линиях). В задаче о пространственной трещине в твердом теле высокая эффективность использования КЧИ показана в [4, 8]. КЧИ полезны и для задач о трещинах в плоскости. Достаточно заметить, что широко применяемый в расчетах метод разрывных смещений [9] по сути есть применение КЧИ при простейшей кусочно-постоянной аппроксимации трещины и разрыва смещений на ней. Однако в [9] не вывелось интегральное уравнение, решаемое путем упомянутой аппроксимации. Это затрудняло использование более точных аппроксимаций. Лишь недавно появились работы, в которых разрывы смещений представлены квадратичными функциями [10, 11]. Показано, что при этом существенно (иногда на порядок) повышается точность. Однако оставался открытым вопрос о произвольных аппроксимациях и, в частности, об аппроксимациях, учитывающих асимптотическое поведение разрывов смещений у концов трещин. Вопрос тем более актуален, что строго доказана [12] применимость КЧИ для концевых элементов прямолинейной трещины.

1. Рассмотрим бесконечную область с разрезом вдоль линии Γ (фигура). Зададим направление движения по Γ , направим нормаль \mathbf{n} вправо от этого направления и условимся отмечать знаком плюс (минус) предельные значения функций при подходе к Γ со стороны, по отношению к которой нормаль внешняя (внутренняя).

Пусть на берегах разреза действуют равные по величине и противоположные по направлению усилия. Тогда при фиксированной нормали вектор усилий $\sigma_{\mathbf{n}}$ остается непрерывным, равным заданному вектору $\sigma_{\mathbf{n}0}$ ($\sigma_{\mathbf{n}}^+ = \sigma_{\mathbf{n}}^- = \sigma_{\mathbf{n}0}$ на Γ).

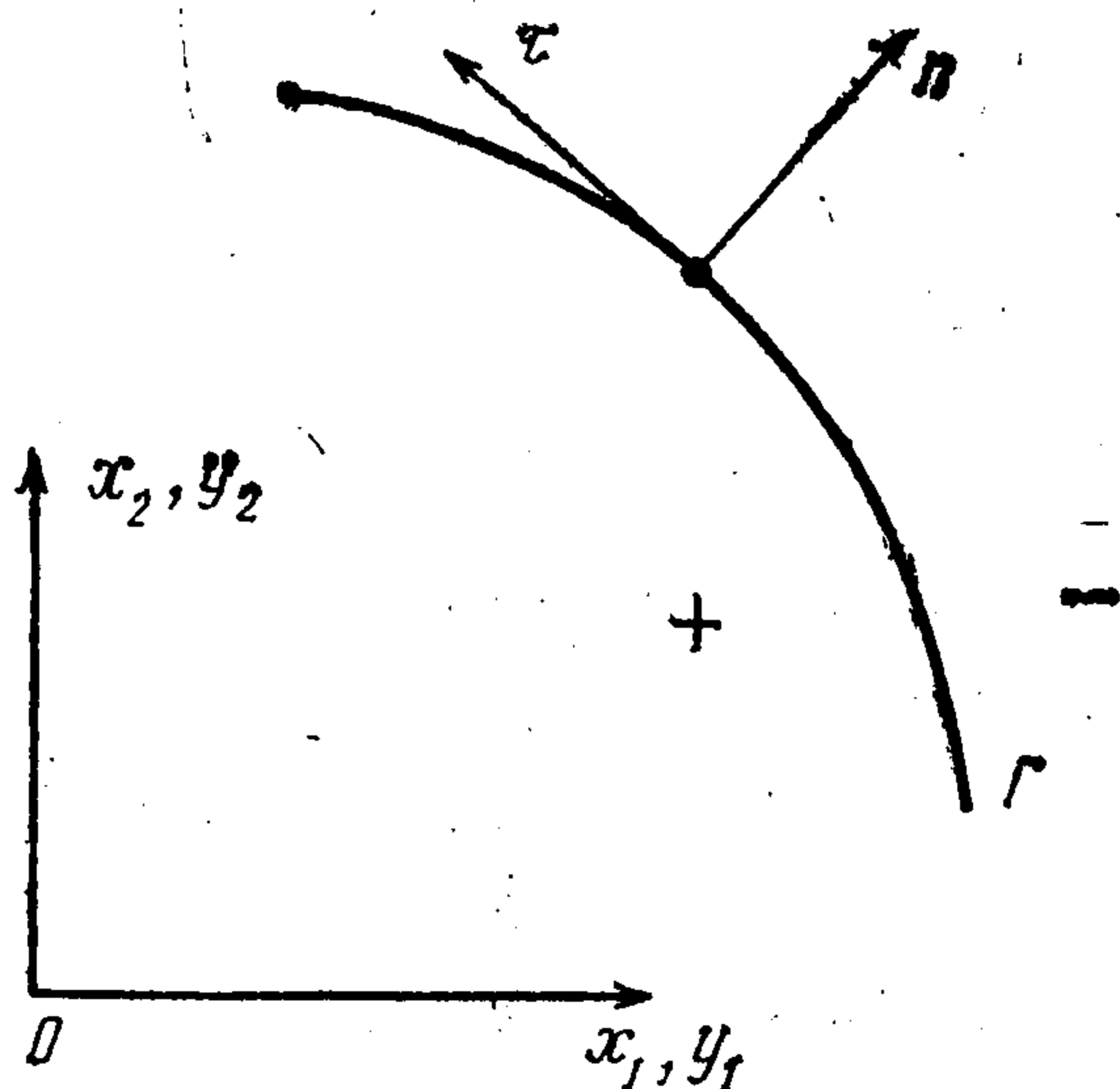
Вектор смещений в точках вне Γ можно представить потенциалом двойного слоя

$$u_i(\mathbf{x}) = - \int_{\Gamma} W_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta u_j(\mathbf{y}) d_y \Gamma, \quad \mathbf{x} \notin \Gamma \quad (1.1)$$

где для изотропного тела

$$W_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = - \frac{1}{2\pi} \left\{ \left[\frac{\nu}{1-\nu} n_j(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial x_i} + n_i(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial x_j} + \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial n} \right] \ln \frac{1}{R} - \frac{1}{8(1-\nu)} \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial n} (R^2 - 2R^2 \ln R) \right. \\ \left. R^2 = (x_i - y_i)^2, \quad \partial/\partial \mathbf{n} = n_k \partial/\partial x_k \right. \quad (1.2)$$

ν — коэффициент Пуассона, Δu — вектор плотности потенциала, δ_{ij} — символ Кронекера; по повторяющемуся в произведении латинскому индексу подразумевается суммирование, знак минус перед интегралом в (1.1) поставлен для того, чтобы в дальнейшем в частных случаях иметь выражения, совпадающие с традиционно используемыми формулами. Все последующие рассуждения остаются в силе и для пространственного случая, когда Γ — поверхность. Отличие лишь в том, что в (1.1) функция $\ln(1/R)$ заменяется на $1/(2R)$, а функция $R^2 - 2R^2 \ln R$ — на $2R$ [5, 7, 8, 13].



По свойству потенциала двойного слоя [14] вектор Δu представляет разрыв вектора смещений на Γ : $\Delta u = u^+ - u^-$. Смещения $u(x)$, вне Γ удовлетворяют всем уравнениям теории упругости. По ним находим напряжения $\sigma_{ij}(x)$ и усилия $\sigma_{ni}(x)$ на единичной площадке с нормалью $n(x)$:

$$\sigma_{ij}(x) = - \int_{\Gamma} D_{ijk}(x, y) \Delta u_k(y) d_y \Gamma, \quad x \in \Gamma \quad (1.3)$$

$$\sigma_{ni}(x) = - \int_{\Gamma} F_{nik}(x, y) \Delta u_k(y) d_y \Gamma, \quad x \in \Gamma \quad (1.4)$$

где для изотропного тела (E — модуль упругости)

$$\begin{aligned} D_{ijk}(x, y) &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{ij} \frac{\partial W_{sk}}{\partial x_s} + \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial W_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial W_{jk}}{\partial x_i} \right) = \\ &= - \frac{E}{2\pi(1-\nu^2)} \left\{ \left[\nu \delta_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial n} + \nu n_k(y) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1-\nu}{2} \left(n_i(y) \frac{\partial}{\partial x_j} + n_j(y) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1-\nu}{2} \left(\delta_{ik} \frac{\partial}{\partial x_j} + \delta_{jk} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial n} \right] \ln \frac{1}{R} - \frac{1}{8} \frac{\partial^4}{\partial x_k \partial x_i \partial x_j \partial n} (R^2 - 2R^2 \ln R) \right\} \\ F_{nik}(x, y) &= D_{ijk}(x, y) n_j(x) = - \frac{E}{2\pi(1-\nu^2)} \left\{ \left[\nu n_i(x) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial n} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \nu n_j(x) n_k(y) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1-\nu}{2} n_j(x) \left(n_i(y) \frac{\partial}{\partial x_j} + n_j(y) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1-\nu}{2} n_j(x) \left(\delta_{ik} \frac{\partial}{\partial x_j} + \delta_{jk} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial n} \right] \ln \frac{1}{R} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8} n_j(x) \frac{\partial^4}{\partial x_k \partial x_i \partial x_j \partial n} (R^2 - 2R^2 \ln R) \right\} \end{aligned}$$

(использовано соотношение (1.2)).

Потенциал (1.4) непрерывен на Γ [13]. Поэтому остается потребовать, чтобы предельные значения вектора $\sigma_n(x)$ были равны заданному на Γ вектору усилий σ_{n0} . В результате имеем уравнение

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left\{ - \int_{\Gamma} F_{nik}(x, y) \Delta u_k(y) d_y \Gamma \right\} = \sigma_{n i 0}(x_0), \quad x_0 \in \Gamma \quad (1.5)$$

которое можно также записать в виде

$$- \nu. f. \int_{\Gamma} F_{nik}(x_0, y) \Delta u_k(y) d_y \Gamma = \sigma_{n i 0}(x_0), \quad x_0 \in \Gamma \quad (1.6)$$

где интеграл в левой части понимается как КЧИ. На дуге Γ выделяется

интервал Γ_0 , включающий точку x_0 . Если интеграл по Γ_0 от членов типа $\Delta u_k(y)/R^2$ берется в квадратурах, то КЧИ может вычисляться подстановкой пределов интегрирования, отвечающих концам Γ_0 , в соответствующее формальное выражение. В противном случае вычитается и прибавляется выражение типа $\Delta u_k(x_0)/R^2$ и формально вычисляется интеграл от $1/R^2$ с подстановкой пределов интегрирования [3, 8]. При этом интеграл, содержащий разность $\Delta u_k(y) - \Delta u_k(x_0)$, понимается в смысле главного значения по Коши.

Доказательство эквивалентности уравнений (1.5) и (1.6) в классе обобщенных функций повторяет доказательства, данные [2] для пространственной задачи. При этом используется теория псевдодифференциальных операторов [15]. Результат остается в силе и в пространстве функций, имеющих производную класса H^* (по классификации [16]).

2. Другое уравнение с КЧИ можно получить, используя граничное интегральное уравнение с комплексными переменными [17]

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w'(\tau)}{\tau - t} d\tau + k_3 w' = f_1(t), \quad t \in \Gamma \quad (2.1)$$

$$t = x_1 + ix_2, \quad \tau = y_1 + iy_2, \quad f_1(t) = \sigma_{nn}^{\circ} + i\sigma_{n\tau}^{\circ}, \quad k_3 = k_4 + k_5$$

$$k_4 w' = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} w'(\tau) \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\bar{\tau} - \bar{t}}{\tau - t} d\tau$$

$$k_5 w' = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \overline{w'(\tau)} \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\tau - t}{\bar{\tau} - \bar{t}} d\tau$$

$$w'(t) = \frac{dw}{dt}, \quad w = \frac{E}{4(1-\nu^2)} \Delta u, \quad \Delta u = \Delta u_1 + i\Delta u_2$$

$$\Delta u_1 = u_1^+ - u_1^-, \quad \Delta u_2 = u_2^+ - u_2^-$$

Черта над символом означает сопряжение; нормаль n направлена вправо от направления обхода Γ , τ — касательная в этом направлении (фигура), σ_{nn}° и $\sigma_{n\tau}^{\circ}$ — составляющие вектора усилий, заданного на Γ .

Функция $w'(t)$ (как и $w(t)$) представляет разность предельных значений голоморфной вне Γ функции. Поэтому [17]

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w'(\tau)}{\tau - t} d\tau = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w(\tau)}{\tau - t} d\tau \right) = \frac{1}{\pi i} \text{v. f.} \int_{\Gamma} \frac{w(\tau)}{(\tau - t)^2} d\tau \quad (2.2)$$

причем последнее равенство в этой цепочке доказывается точно так же, как в [3].

Подстановка равенства (2.2) в (2.1) и учет того, что член $k_3 w'$ допускает интегрирование по частям, дает

$$\frac{1}{\pi i} \text{v. f.} \int_{\Gamma} \frac{w(\tau)}{(\tau - t)^2} d\tau + k_6 w = \sigma_{nn}^{\circ} + i\sigma_{n\tau}^{\circ} \quad (2.3)$$

$$k_6 w = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} w \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial t} \ln \frac{\bar{\tau} - \bar{t}}{\tau - t} d\tau - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \bar{w} \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial t} \frac{\tau - t}{\bar{\tau} - \bar{t}} d\tau$$

Окончательно имеем комплексное уравнение с КЧИ

$$\frac{E}{4(1-\nu^2)} \left\{ \frac{1}{\pi i} \text{v. f.} \int_{\Gamma} \frac{\Delta u_1 + i\Delta u_2}{(\tau - t)^2} d\tau + k_6 (\Delta u_1 + i\Delta u_2) \right\} = \sigma_{nn}^{\circ} + i\sigma_{n\tau}^{\circ} \quad (2.4)$$

У него то достоинство, что при его решении на ЭВМ можно использовать аппроксимации функциями одной (комплексной) переменной (например, полиномами Лагранжа $L_n(z)$ с узлами в точках $z_k = x_{1k} + ix_{2k}$; $k = 1, \dots, n$).

В частном случае, когда Γ — отрезок прямой $[a, b]$, имеем $k_3 w = 0$. Тогда, если ось x_2 направить по нормали \mathbf{n} , то $\tau - t = x_1 - y_1$, $d\tau = -dy_1$. Уравнение (2.4) принимает вид

$$(-1)^{k-1} \frac{E}{4\pi(1-\nu^2)} \text{v. f.} \int_a^b \frac{\Delta u_k}{(x_1 - y_1)^2} dy_1 = \sigma_{nk}^\circ, \quad k = 1, 2; \quad a < x_1 < b \quad (2.5)$$

Для прямолинейной трещины нормального разрыва ($\sigma_{n1}^\circ = 0$; $k = 2$) уравнение (2.5) получено в [3] (непринципиальное отличие состоит в том, что вместо Δu_2 и σ_{n2}° использованы [3] величины $f = -\Delta u_2/2$; $p = -\sigma_{n2}^\circ$).

По сравнению с сингулярным уравнением типа (2.1) уравнение с КЧИ (2.4) имеет ту полезную особенность, что в него входят именно те механические величины, которые представляют интерес при решении прикладных задач, — разрывы смещений и усилия.

3. Из результатов п. 1 следует, что для вычисления КЧИ в уравнении (1.6) полезно иметь квадратурные формулы по отрезку прямой. Рассмотрим интеграл по отрезку $[a, b]$

$$J(x) = \text{v. f.} \int_a^b \frac{f(\xi)}{(x - \xi)^2} d\xi \quad (3.1)$$

Пусть на этом отрезке в n точках x_k заданы значения f_k функции $f(x)$. Точки x_k служат узлами квадратурной формулы. Для аппроксимации $f(x)$ удобно использовать функции

$$G_k(x_i) = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \quad (i, k = 1, \dots, n)$$

Тогда

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^n f_k G_k(x) \quad (3.2)$$

и подстановка (3.2) в (3.1) дает квадратурную формулу

$$J(x) \approx \sum_{k=1}^n A_k(x) f_k, \quad A_k(x) = \text{v. f.} \int_a^b \frac{G_k(\xi)}{(x - \xi)^2} d\xi \quad (k = 1, \dots, n) \quad (3.3)$$

Для внутренних элементов контура Γ в качестве функции формы можно принять полиномы Лагранжа

$$G_k(x) = L_k(x) = \prod_{i \neq k} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \quad (3.4)$$

Тогда, подставляя (3.4) в (3.3), получаем

$$A_k(x) = d^{-1} (M_{n-1} + a_1 M_{n-2} + \dots + a_{n-1} M_0) \quad (3.5)$$

Здесь

$$M_s = \text{v. f.} \int_a^b \frac{\xi^s d\xi}{(x - \xi)^2} = s x^{s-1} \ln \left| \frac{x-b}{x-a} \right| +$$

$$+ \sum_{k=0, k \neq s-1}^s C_s^k (-1)^{s+1-k} x^k \frac{(x-b)^{s-k-1} - (x-a)^{s-k-1}}{s-k-1}, \quad a_1 = - \sum_{m \neq k}^n x_m$$

$$a_2 = \sum_{m \neq j \neq k}^n x_m x_j, \dots, a_{n-1} = (-1)^{n-1} \prod_{i \neq k} x_i, \quad d = \prod_{i \neq k} (x_k - x_i)$$

На элементах, прилегающих к краям линии Γ , целесообразно использовать аппроксимацию, учитывающую асимптотическое поведение

функции $f(x)$. Обычно разрыв смещений в концевых точках обращается в нуль, стремясь к нему пропорционально \sqrt{r} (r — расстояние до края). Поэтому на краевых элементах можно принять следующие функции формы:

$$G_k(x) = \sqrt{(x-a)/(x_k-a)} L_k(x) \quad (\text{для левого края}) \quad (3.6)$$

$$G_k(x) = \sqrt{(b-x)/(b-x_k)} L_k(x) \quad (\text{для правого края}) \quad (3.7)$$

Подстановка (3.6), (3.7) в (3.3) и интегрирование дают ту же формулу (3.5), но с измененными выражениями для моментов и величины d :

для левого края

$$M_s = \sum_{k=2}^s \sum_{m=0}^{k-2} C_s^k C_{k-2}^m (-1)^{k+m} x^{s-k} (x-a)^{k-2-m} \frac{(b-a)^{m+3/2}}{m+3/2} + x^s B_0 + s x^{s-1} B_1$$

$$B_0 = \frac{\sqrt{b-a}}{x-b} + \frac{1}{2\sqrt{x-a}} \Lambda, \quad B_1 = 2\sqrt{b-a} + \sqrt{x-a} \Lambda,$$

$$\Lambda = \ln \left| \frac{\sqrt{x-a} - \sqrt{b-a}}{\sqrt{x-a} + \sqrt{b-a}} \right|, \quad d = \sqrt{x_k-a} \prod_{i \neq k}^n (x_k - x_i)$$

для правого края

$$M_s = \sum_{k=2}^s \sum_{m=0}^{k-2} C_s^k C_{k-2}^m (-1)^k x^{s-k} (x-b)^{k-2-m} \frac{(b-a)^{m+3/2}}{m+3/2} + x^s B_0 + s x^{s-1} B_1$$

$$B_0 = \frac{\sqrt{b-a}}{a-x} + \frac{1}{2\sqrt{b-x}} \Lambda, \quad B_1 = -2\sqrt{b-a} - \sqrt{b-x} \Lambda,$$

$$\Lambda = \ln \left| \frac{\sqrt{b-x} - \sqrt{b-a}}{\sqrt{b-x} + \sqrt{b-a}} \right|, \quad d = \sqrt{b-x_k} \prod_{i \neq k}^n (x_k - x_i)$$

Нет нужды приводить численные значения весов A_k при конкретных n , x , a , b — полученные аналитические выражения весьма просты и вычисления по ним точнее и легче выполнять непосредственно на ЭВМ.

Приведенные формулы можно использовать и для решения комплексного уравнения с КЧИ (2.4), заменив вещественную координату на комплексную координату $t = x_1 + ix_2$. Здесь даже проявляется упомянутое преимущество комплексной формы: используя (2.4), не обязательно считать элемент контура Γ прямолинейным или отображенным на прямолинейный отрезок, достаточно в качестве узлов x_k брать комплексные координаты z_k элемента Γ .

4. Полученные уравнения с КЧИ и квадратурные формулы позволяют повысить точность расчетов неизвестных разрывов смещений. В качестве иллюстрации приведем результаты численных экспериментов для изучавшейся [9] задачи о прямолинейной трещине под постоянным внутренним давлением $\sigma_{n2}^0 = -p$ ($\sigma_{n1}^0 = 0$). Трещина располагается вдоль отрезка $[-1, 1]$.

Эта задача имеет аналитическое решение [18]

$$\Delta u_2(x) = 4E^{-1} (1 - \nu^2) p \sqrt{1 - x^2} \quad (4.1)$$

что позволяет контролировать точность решения уравнения (2.4).

В рассматриваемом случае уравнение (2.4) принимает вид (2.5) при $k = 2$. Решение уравнения (2.5) проводилось при разбиении отрезка $[-1, 1]$ на разное число элементов одинаковой длины и при разных аппроксимациях в пределах элементов. Однако для сопоставимости результатов суммарное число узловых точек оставалось неизменным, равным 15 или 30.

На элементах использовались аппроксимирующие полиномы следующих степеней: а) нулевой ($n = 1$); б) второй ($n = 3$); в) четвертой ($n = 5$). Кроме того, рассматривалась аппроксимация полиномами второй степени во внутренних элементах отрезка

в сочетании с учетом одного члена в асимптотике в краевых элементах ($G_1 = \sqrt{1 \pm x}$, вариант *г*). Ниже приведены погрешности расчетов (при 15 узловых точках) для каждого из этих четырех вариантов в процентах по отношению к точному решению (4.1):

x		0	0,1	0,3	0,4	0,5	0,7	0,8	0,9
$\delta, \%$	<i>a</i>	3,4	3,4	3,7	4,0	4,6	7,1	9,5	24
	<i>б</i>	1,8	1,8	1,9	2,1	2,4	3,5	6,5	14,7
	<i>в</i>	1,8	1,8	1,8	1,9	2,4	4,4	6,3	13,0
	<i>г</i>	0,038	0,036	0,040	0,13	0,26	0,23	0,19	0,16

Результаты свидетельствуют о заметном повышении точности при переходе от кусочно-постоянной к квадратичной аппроксимации. Дальнейшее увеличение точности с повышением степени полинома до четвертой уже не сказывается столь рельефно (вариант *в*). Но очень существенно, даже при аппроксимациях на внутренних элементах второго порядка, влияет учет асимптотического поведения искомой функции в концевых элементах (вариант *г*); при этом погрешность снижается на два порядка.

Увеличение общего числа узловых точек до 30 в вариантах *a*, *б*, *в* сказалось лишь в центральных элементах. Вблизи же концов погрешность почти не изменилась. Но в варианте *г* (при учете асимптотики) погрешность заметно снизилась по сравнению со случаем 15 узловых точек: втрое в элементах у середины трещины, вдвое при $x = 0,7$ и на 13% при $x = 0,9$.

Из этих результатов и ряда других аналогичных численных экспериментов следует, что само по себе увеличение порядка аппроксимации и общего числа узлов не обеспечивает повышения точности вблизи концов контура. Лишь использование специальных концевых элементов, учитывающих асимптотическое поведение функций, позволяет резко снизить погрешность. Введение таких элементов благоприятно влияет также на точность расчетов в точках, удаленных от краев. Это полностью согласуется с теоретическим анализом ([19], с. 488), причем для внутренних элементов вполне достаточно применять аппроксимацию полиномами второго порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978. 351 с.
2. Канаун С. К. К задаче о пространственной трещине в анизотропной среде // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 2. С. 361—370.
3. Ioakimidis N. I. Application of finite-part integrals to the singular integral equations of crack problems in plane and three-dimensional elasticity. // Acta Mech. 1982. V. 45. № 1—2. P. 31—47.
4. Петузов И. М., Зубков В. В., Зубкова И. А. и др. Напряженное состояние массива горных пород около очистных выработок произвольной формы в плане // Физ.-техн. пробл. разраб. полезных ископаемых. 1982. № 5. С. 3—8.
5. Лазарев М. И., Скворода А. Р. Определение упругих напряжений методом потенциала в трехмерном случае // Изв. АН СССР МТТ. 1983. № 5. С. 58—62.
6. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 253 с.
7. Угодчиков А. Г., Хуторянский Н. М. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1986. 295 с.
8. Линьков А. М., Могилевская С. Г. Конечностные интегралы в задачах о пространственных трещинах // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 5. С. 844—850.
9. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. М.: Мир, 1987. 328 с.
10. Willment T., Bhattacharyya P. K. Displacement discontinuity method with quadratic variation elements // BETECH'86: Proc. 2nd Boundary Elem. Technol. Conf. Mass. Inst. Technol. Southampton, 1986. P. 633—649.
11. Curran J. H. Numerical modelling of the stress and displacement fields around two- and three-dimensional cracks // Rock mechanics in production and protection: Proc. 25th Symp. Rock Mech. Evangton. 1987. N. Y., 1987. P. 223—230.
12. Ioakimidis N. I. On the validity of the singular integral equations of crack problems at the crack tips // Acta Mech. 1983. V. 48. № 3—4. P. 185—191.
13. Кит Г. С., Хай М. В. Интегральные уравнения пространственных задач термоупругости для тел с трещинами // Докл. АН УССР. Сер. А. 1975. № 12. С. 1105—1109.
14. Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976. 663 с.

15. Эскин Г. И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973. 232 с.
16. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
17. Линьков А. М. Интегральные уравнения теории упругости для плоскости с разрезами, нагруженными уравновешенными системами сил // Докл. АН СССР. 1974. Т. 218. № 6. С. 1294—1297.
18. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
19. Costabel M., Stephan E. P. An improved boundary element Galerkin method for three-dimensional crack problems // Integral Equations and Operator Theory. 1987. V. 10. P. 467—504.

Пермь

Поступила в редакцию
20.III.1989