Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 1, 1990

УДК 539.3 : 534.1

О. Ю. Жарий

МЕТОД РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ

Предлагается общая формулировка метода разложения по собственным функциям (МСФ) в нестационарных динамических задачах электроупругости. Доказывается ортогональность собственных функций (СФ) перемещений в объеме тела. Устанавливается, что решение для перемещений имеет ту же форму, что и в классической теории упругости, а потенциал электрического поля, кроме ряда по неортогональным СФ содержит несвязанную составляющую, определяемую из решения уравнения Лапласа для анизотропной среды при смешанных граничных условиях. В качестве примера рассматривается задача о мгновенном электрическом нагружении пьезокерамического стержня. Анализируются отражаемые общей схемой метода специфические особенности электроупругих волновых полей по сравнению с упругими.

Сравнительно редкое использование МСФ [1, 2] по сравнению, например, с методом интегральных преобразований обусловлено сложностью отыскания СФ в задачах со смешанными граничными условиями и для тел, ограниченных поверхностями, принадлежащими к различным координатным семействам, либо с уходящими на бесконечность границами. В последнем случае, впрочем, решение задачи может быть получено путем предельного перехода от конечного тела к бесконечному [3]. Вместе с тем МСФ имеет и ряд преимуществ перед методом интегральных преобразований, к числу которых относится большая физическая наглядность решения [3]. С использованием именно этого метода удается установить некоторые общие свойства нестационарных волновых полей в полубесконечных упругих волноводах [4].

1. Полная система уравнений движения пьезоэлектрической среды [5, 6] включает в себя линейные уравнения состояния, уравнения движения в напряжениях, уравнения электростатики и соотношения Коши

$$\tau_{ij} = c_{ijkl}^{E}\varepsilon_{kl} - e_{kij}E_k, \qquad D_i = e_{ikl}\varepsilon_{kl} + \varepsilon_{ik}^{S}E_k \tag{1.1}$$
$$\tau_{ij,j} + F_i - \rho u_i^{\cdot\cdot} = 0; \quad D_{i,i} = 0, \quad E_k = -\varphi_{,k}; \quad \varepsilon_{kl} = {}^1/_2(u_{k,l} + u_{l,k})$$

В этих уравнениях τ_{ij} — тензор механических напряжений, ε_{kl} — тензор деформаций, E_i — вектор напряженности электрического поля, D_i — вектор электрической индукции, u_i — вектор перемещения, ψ — электрический потенциал, c_{ijkl}^{E} — тензор упругих постоянных, измеренных при постоянном электрическом поле, e_{ikl} — тензор пьезомодулей. ε_{ik}^{S} — тензор диэлектрических проницаемостей при постоянных деформациях, F_i — вектор объемных сил, ρ — плотность материала. Свойства тензоров материальных постоянных описаны в [5]. Индекс после запятой означает дифференцирование по пространственной координате. Латинские индексы i, j, k, l пробегают значения 1, 2, 3, по повторяющимся индексам проводится суммирование.

Исключая из (1.1) все переменные, кроме u_i и ψ, получаем систему уравнений в частных производных второго порядка

$$c_{ijkl}^{E}u_{k,lj} + e_{kij}\psi_{,kj} + F_i - \rho u_i^{\cdot\cdot} = 0 \tag{1.2}$$
$$e_{ikl}u_{k,li} - \varepsilon_{ik}^{S}\psi_{,ki} = 0$$

Рассмотрим следующую начально-граничную задачу: найти решение системы (1.2) в объеме V с границей $S = S_1 + S_2 = S_3 + S_4$, в каждой точке которой задано одно из механических

$$u_i = f_i(x, t), \quad x \in S_1 \qquad (1.3)$$

$$n_j\tau_{ij} \equiv n_j(c^E_{ijkl}u_{k,l} + e_{kij}\psi_{,k}) = g_i(x, t), \quad x \in S_2$$

и электрических граничных условий [5, 6]

$$\psi = \psi_0(x, t), \quad x \in S_3 \qquad (1.4)$$

$$n_iD_i \equiv n_i(e_{ikl}u_{k,l} - \varepsilon^S_{ik}\psi_{,k}) = \sigma(x, t), \quad x \in S_4$$

В правых частях условий (1.3), (1.4) f_i — заданные перемещения, g_i — вектор внешних усилий, ψ_0 — заданный электрический потенциал, σ — известная плотность свободных зарядов, $x = \{x_i\}$ — трехмерная координата точки. Заметим, что физически реализуемые электрические граничные условия имеют, как правило, более частный характер, а именно: $\psi_0(x, t) = \psi_\nu(t)$ ($\nu = 1, 2, \ldots, N$) на каждом из N электродов, составляющих поверхность S_3, а на неэлектродированной поверхности (S_4) $\sigma = 0$. Общая форма записи используется в теоретическом анализе вследствие ее компактности.

Решение задачи (1.2)—(1.4) однозначно определено, если кроме граничных заданы начальные условия для механических переменных [6]

$$u_i(x, 0) = u_{i0}(x), \quad u_i^{\boldsymbol{\cdot}}(x, 0) = v_{i0}(x), \quad x \in V \qquad (1.5)$$

где u_{i0}, v_{i0} — известные функции координат.

Исходя из общей идеи МСФ рассмотрим задачу на собственные значения: найти значения параметра Ω^2, для которых соответствующая (1.2)—(1.4) однородная граничная задача

$$c^E_{ijkl}U_{k,lj} + e_{kij}\Psi_{,kj} + \rho\Omega^2U_i = 0 \qquad (1.6)$$

$$e_{ikl}U_{k,li} - \varepsilon_{ik}{}^S\Psi_{,ki} = 0$$

$$U_i = 0, \quad x \in S_1; \quad n_j(c^E_{ijkl}U_{k,l} + e_{kij}\Psi_{,k}) = 0, \quad x \in S_2 \qquad (1.7)$$

$$\Psi = 0, \quad x \in S_3; \quad n_i(e_{ikl}U_{k,l} - \varepsilon_{ik}{}^S\Psi_{,k}) = 0, \quad x \in S_4$$

имеет ненулевые решения $U_i(x)$, $\Psi(x)$. Электроупругое поле $U_i(x)e^{-i\Omega t}$, $\Psi(x)e^{-i\Omega t}$ соответствует свободным колебаниям объема V при однородных механических и электрических граничных условиях.

Предполагая, что имеется бесконечное множество собственных значений $\Omega_m{}^2$ ($m = 1, 2, \ldots$), образующих дискретный (для ограниченного объема) ряд, обозначим найденные собственные функции $U_i^{(m)}(x)$, $\Psi^{(m)}(x)$. Как и в обычной теории упругости, существование бесконечного ряда $\Omega_m{}^2$ в каждом конкретном случае требует проверки, т. е. по сути решения задачи (1.6), (1.7).

Доказательства вещественности и положительности собственных чисел Ω^2 во многом повторяют рассуждения, проведенные [2] для упругого случая. Они основаны на применении теоремы Гаусса — Остроградского и используют условие положительности плотности внутренней энергии пьезоэлектрической среды $W = {}^1/_2(\tau_{ij}\varepsilon_{ij} + E_kD_k)$.

Для установления ортогональности СФ, соответствующих различным собственным частотам Ω_m и Ω_n, запишем очевидным образом следующее из (1.6) тождество:

$$(c^E_{ijkl}U^{(m)}_{k,lj} + e_{kij}\Psi^{(m)}_{,kj})U^{(n)}_i - (c^E_{ijkl}U^{(n)}_{k,lj} + e_{kij}\Psi^{(n)}_{,kj})U^{(m)}_i +$$
$$+ (e_{ikl}U^{(m)}_{k,li} - \varepsilon^S_{ik}\Psi^{(m)}_{,ki})\Psi^{(n)} - (e_{ikl}U^{(n)}_{k,li} - \varepsilon^S_{ik}\Psi^{(n)}_{,ki})\Psi^{(m)} +$$
$$+ \rho(\Omega_m{}^2 - \Omega_n{}^2)U^{(m)}_iU^{(n)}_i = 0$$

Интегрируя по V, с использованием теоремы Гаусса — Остроградского и граничных условий (1.7) имеем

$$(\Omega_m^2 - \Omega_n^2)\int\limits_V \rho U_i^{(m)} U_i^{(n)} dV = 0 \qquad (1.8)$$

т. е. векторные СФ перемещений ортогональны с весом $\rho(x)$ в объеме тела. Скалярные СФ элекрического потенциала $\Psi^{(m)}$ в соотношение ортогональности (1.8) не входят и, вообще говоря, ортогональными не являются.

В дальнейшем считаем СФ перемещений ортонормированными

$$\int\limits_V \rho U_i^{(m)} U_i^{(n)}\, dV = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \qquad (1.9)$$

устраняя тем самым произвольный сомножитель как в $U_i^{(m)}$, так и в $\Psi^{(m)}$. Отметим, что предполагаемая далее полнота $U_i^{(m)}$ в V, как и структура спектра, в конкретных задачах требуют специального изучения.

Имея наборы СФ $U_i^{(m)}$, $\Psi^{(m)}$, ищем решение начально-граничной задачи (1.2)—(1.5) в виде (суммирование всюду далее ведется от $m = 1$ до $m = \infty$)

$$u_i = u_i^s(x, t) + \Sigma U_i^{(m)}(x)\, p_m(t), \quad \psi = \psi^s(x, t) + \Sigma \Psi^{(m)}(x)\, p_m(t) \qquad (1.10)$$

где u_i^s, ψ^s — решение «статической» задачи, соответствующей задаче (1.2)—(1.4) при $u_i^{\cdot\cdot} \equiv 0$, а $p_m(t)$ — неизвестные пока функции времени.

В последнюю задачу время входит как параметр, что делает ее существенно более простой по сравнению с исходной. Кроме того, далее будет видно, что знание явных выражений для u_i^s, ψ^s не является необходимым, поскольку они выпадают из окончательного решения.

Представления (1.10) удовлетворяют второму из уравнений (1.2) и граничным условиям (1.3), (1.4). Подставляя равенства (1.10) в первое уравнение (1.2), в силу первого уравнения (1.6) и соответствующего уравнения в «статической» задаче получим

$$\Sigma \rho U_i^{(m)} (p_m^{\cdot\cdot} + \Omega_m^2 p_m) = -\rho u_i^{s\cdot\cdot}$$

Домножая на $U_i^{(n)}$ и интегрируя по объему V, с учетом соотношений (1.9) находим

$$p_m^{\cdot\cdot} + \Omega_m^2 p_m = Q_m^{\cdot\cdot}(t), \quad m = 1, 2, \ldots \qquad (1.11)$$

$$Q_m(t) = -\int\limits_V \rho u_i^s(x, t)\, U_i^{(m)}(x)\, dV \qquad (1.12)$$

Общее решение уравнения (1.11) имеет вид

$$q_m(t) = q_m(0)\cos\Omega_m t + q_m^{\cdot}(0)\frac{\sin\Omega_m t}{\Omega_m} - \Omega_m \int\limits_0^t Q_m(\tau)\sin\Omega_m(t - \tau)\, d\tau \qquad (1.13)$$

$$q_m(t) = p_m(t) - Q_m(t)$$

Подставляя первое выражение (1.10) в начальные условия (1.5), имеем

$$u_i^s(x, 0) + \Sigma U_i^{(m)}(x)\, p_m(0) = u_{i0}(x)$$

$$u_i^{s\cdot}(x, 0) + \Sigma U_i^{(m)}(x)\, p_m^{\cdot}(0) = v_{i0}(x)$$

Домножение на $\rho U_i^{(n)}(x)$ и интегрирование по V дает

$$q_m(0) = \int\limits_V \rho u_{i0}(x)\, U_i^{(m)}(x)\, dV, \quad q_m^{\cdot}(0) = \int\limits_V \rho v_{i0}(x)\, U_i^{(m)}(x)\, dV \qquad (1.14)$$

Функции времени $q_m(t)$ удовлетворяют вследствие (1.11) уравнениям

$$q_m^{\cdot\cdot} + \Omega_m^2 q_m = -\Omega_m^2 Q_m(t) \qquad (1.15)$$

Начальные условия для $q_m(t)$ определяются формулами (1.14), а их явные выражения следуют из (1.13).

Если учесть, что согласно соотношению (1.12) ряд с коэффициентами $Q_m(t)$ представляют собой разложение векторной функции $-u_i^s(x, t)$ по полной системе $U_i^{(m)}(x)$, первое разложение (1.10) запишется в виде

$$u_i = \Sigma U_i^{(m)}(x)\, q_m(t) \tag{1.16}$$

$$q_m(t) = q_m(0)\cos\Omega_m t + q_m^{\cdot}(0)\frac{\sin\Omega_m t}{\Omega_m} + \frac{1}{\Omega_m}\int\limits_0^t \Phi_m(\tau)\sin\Omega_m(t-\tau)\,d\tau \tag{1.17}$$

Введенные здесь функции $\Phi_m(t)$ определяются через $Q_m(t)$, для которых путем несложных, но достаточно громоздких выкладок, аналогичных проведенным ранее [2], удается получить представление, не использующее «статического» решения

$$\Phi_m(t) = \int\limits_V F_i U_i^{(m)}\,dV - \int\limits_{S_1} n_j\left(c_{ijkl}^E U_{k,l}^{(m)} + e_{kij}\Psi_{,k}^{(m)}\right) f_i(x, t)\,dS +$$
$$+ \int\limits_{S_2} U_i^{(m)} g_i(x, t)\,dS - \int\limits_{S_3} n_i\left(e_{ikl}U_{k,l}^{(m)} - \varepsilon_{ik}^S\Psi_{,k}^{(m)}\right)\psi_0(x, t)\,dS +$$
$$+ \int\limits_{S_4}\Psi^{(m)}\sigma(x, t)\,dS = -\Omega_m^2 Q_m(t) \tag{1.18}$$

Из переписанного с учетом введенных функций $q_m(t)$ разложения (1.10) для потенциала следует, что здесь «статическое» решение ψ^s в общем случае не уничтожается суммой с коэффициентами $Q_m(t)$.

Если, как это имеет место в большинстве прикладных задач, для собственных частот Ω_m справедлива асимптотическая оценка

$$\Omega_m \sim \mathrm{const}\cdot m, \quad m\to\infty \tag{1.19}$$

то можно избавиться от необходимости нахождения ψ^s.

Представим ψ в виде

$$\psi = \varphi(x, t) + \Sigma\Psi^{(m)}(x)\, q_m(t) \tag{1.20}$$

$$\varphi = \psi^s(x, t) + \Sigma\Psi^{(m)}(x)\, Q_m(t) = \psi^s(x, t) - \Sigma\Omega_m^{-2}\Psi^{(m)}(x)\,\Phi_m(t) \tag{1.21}$$

и попытаемся сформулировать для новой функции φ отдельную граничную задачу.

Подстановка разложений (1.16) и (1.20) во второе равенство (1.2) дает уравнение

$$\varepsilon_{ik}^S\varphi_{,ki} = 0, \quad x\in V \tag{1.22}$$

Для получения граничных условий заметим, что в силу свойств функций u_i^s, ψ^s, $U_i^{(m)}$, $\Psi^{(m)}$ в представлениях (1.10) и входящих в (1.3), (1.4) комбинациях их производных пределы сумм равны суммам пределов на соответствующих частях границы S. Сравнение выражений (1.17) для q_m и коэффициентов ряда в (1.21) показывает, что последние убывают при $m\to\infty$ не медленнее чем $p_m(t)$, и поэтому в рядах, получаемых подстановкой (1.16), (1.20) в (1.3), (1.4), также возможен почленный переход к пределу. Отсюда находим, что функция φ должна удовлетворять граничным условиям

$$\psi = \psi_0(x, t), \quad x\in S_3; \quad -n_i\varepsilon_{ik}^S\psi_{,k} = \sigma(x, t), \quad x\in S_4 \tag{1.23}$$

Таким образом, функция $\varphi(x, t)$ определяется из решения несвязанной задачи, а именно удовлетворяет уравнению Лапласа для анизотропной среды (1.22) при смешанных граничных условиях (1.23).

Общую схему МСФ в динамических задачах электроупругости можно представить в следующем виде. После нахождения системы СФ $U_i^{(m)}$, $\Psi^{(m)}$ из решения задачи (1.6), (1.7) по формулам (1.18) определяются функции $\Phi_m(t)$. Затем из (1.17) и (1.14) вычисляются функции $q_m(t)$. Решение начально-граничной задачи (1.2)—(1.5) представляется формулами (1.16), (1.20), причем для определения несвязанного электрического потенциала $\varphi(x, t)$ следует решать граничную задачу (1.22), (1.23).

Сравнивая полученную схему с той, которая имеется в обычной теории упругости [2], можно сделать вывод о том, что в обоих случаях «статическое» перемещение u_i^s полностью выпадает из решения (1.16). В выражении для потенциала (1.20) часть «статического» решения все же остается в виде функции φ, хотя последняя определяется из решения более простой задачи (1.22), (1.23). Причина этого состоит в том, что полная система уравнений электроупругости (1.1) использует квазистатическое приближение уравнений Максвелла и, следовательно, допускает мгновенное изменение электрического поля в объеме материала, в то время как возмущения перемещений распространяются с конечной скоростью [6]. Функция $\varphi(x, t)$ как раз и отвечает за изменение потенциала в объеме, не сопровождаемое изменениями полей перемещений и деформаций.

2. Специфические особенности электроупругих волновых полей по сравнению с чисто упругими, отражаемые общей схемой метода собственных функций, наиболее ярко проявляются в задачах о мгновенном электрическом нагружении (разряде) пьезокерамических тел [6—8] и иллюстрируются следующим примером.

Пьезокерамический стержень $-h < z < h$ поляризован вдоль оси z. Одномерные уравнения пьезоэффекта имеют вид [6]

$$\varepsilon_z = s_{33}^E \sigma_z + d_{33} E_z, \quad D_z = \varepsilon_{33}^T E_z + d_{33}\sigma_z \tag{2.1}$$

Полная система уравнений динамической электроупругости, в дополнение к (2.1), включает уравнение движения, уравнения электростатики и соотношение Коши

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0, \quad E_z = -\frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{2.2}$$

Рассмотрим задачу о мгновенном электрическом нагружении стержня разностью потенциалов $2V_0$. Граничные условия для механически свободного стержня таковы:

$$\psi = \pm V_0, \quad \sigma_z = 0, \quad z = \pm h \tag{2.3}$$

начальные условия — нулевые:

$$u_z = 0, \quad u_z^{\cdot} = 0, \quad t = 0 \tag{2.4}$$

Решение задачи (2.1)—(2.4) по методу разд. 1 имеет вид

$$\begin{gathered} u_z = -d_{33}(1 - k_{33}^2) V_0 \Sigma \alpha_m \sin \varkappa_m z (1 - \cos \Omega_m t) \\ \psi = V_0 z h^{-1} - k_{33}^2 V_0 \Sigma \alpha_m (\sin \varkappa_m z - z h^{-1} \sin \varkappa_m h)(1 - \cos \Omega_m t) \\ \alpha_m = 2\{[(\varkappa_m h)^2 - k_{33}^2(1 - k_{33}^2)] \sin \varkappa_m h\}^{-1}, \quad k_{33}^2 = d_{33}^2 (\varepsilon_{33}^T s_{33}^E)^{-1} \end{gathered} \tag{2.5}$$

где k_{33}^2 — продольный коэффициент электромеханической связи, $\varkappa_m = \Omega_m c^{-1}$ — корни трансцендентного уравнения

$$\operatorname{ctg} \varkappa_m h = k_{33}^2 (\varkappa_m h)^{-1}$$

$c = [\rho s_{33}^E (1 - k_{33}^2)]^{-1/2}$ — скорость распространения волн в стержне с разомкнутыми электродами [6]. Система собственных функций $\sin \varkappa_m z$ ортогональна на $(-h, h)$ [9], а для собственных частот справедлива согласующаяся с (1.19) оценка

$$\Omega_m = (m - 1/2)\pi c h^{-1} + o(1), \quad m \to \infty$$

Слагаемое $V_0 z h^{-1}$ в выражении для ψ аналогично функции φ общей теории и является решением несвязанной задачи

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0,\quad -h<z<h;\quad \varphi=\pm V_0,\quad z=\pm h$$

С целью более подробного анализа структуры разложений (2.5) найдем решение той же задачи в области комплексного преобразования Фурье по времени [6]

$$\begin{gathered} u_z^F(z,\omega)=-d_{33}(1-k_{33}^2)V_0(T\omega^2\Delta)^{-1}i\sin(\omega zc^{-1}) \\ \psi^F(z,\omega)=V_0(\omega\Delta)^{-1}i\left[zh^{-1}\cos\omega T-k_{33}^2(\omega T)^{-1}\sin(\omega zc^{-1})\right] \\ \Delta=\cos\omega T-k_{33}^2(\omega T)^{-1}\sin\omega T \end{gathered} \tag{2.6}$$

здесь

$$(u_z^F,\psi^F)=\int\limits_0^\infty(u_z,\psi)e^{i\omega t}dt$$

— преобразования искомых функций, $T=hc^{-1}$ — время прохождения упругой волной половины длины стержня. Вычисление обращений (2.6) путем замыкания контура интегрирования в формуле обратного преобразования

$$(u_z,\psi)=(2\pi)^{-1}\int\limits_{i\delta-\infty}^{i\delta+\infty}(u_z^F,\psi^F)\,e^{i\omega t}d\omega,\quad \delta>0$$

полуокружностью большого радиуса в нижней полуплоскости комплексной ω-плоскости и применения теории вычетов приводит в точности к выражениям (2.5). Однако в любом конечном интервале времени для u_z и ψ могут быть получены простые формулы путем разложения Δ^{-1} в ряд по степеням $e^{i\omega T}$ и почленного интегрирования. Не останавливаясь на деталях, подробно изложенных в [6] для сходных задач, приведем решение, справедливое в интервале времени $0<t<2T$:

$$\begin{gathered} u_z=-d_{33}(1-k_{33}^2)V_0\left[U(t+zc^{-1}-T)-U(t-zc^{-1}-T)\right] \\ \psi=V_0zh^{-1}H(t)-k_{33}^2V_0\left[U(t+zc^{-1}-T)-U(t-zc^{-1}-T)-zh^{-1}U(t)\right] \\ U(t)=(k_{33}^2)^{-1}[\exp(k_{33}^2tT^{-1})-1]\,H(t) \end{gathered}$$

($H(t)$ — единичная функция Хевисайда.)

До момента времени $t=T$ перемещения отличны от нуля лишь в примыкающих к торцам областях $|z|>h-ct$, а потенциал ψ не равен нулю и в невозмущенной волновым движением области $|z|<h-ct$. Причем кроме постоянной несвязанной составляющей $\varphi=V_0zh^{-1}H(t)$ он имеет и переменную во времени добавку $k_{33}^2V_0zh^{-1}U(t)$, обусловленную пьезоэффектом. Таким образом, решение для перемещений состоит только из распространяющихся волн, а сумма по собственным функциям электрического потенциала содержит наряду с волновыми и неволновые составляющие.

В общем случае, метод разложения по собственным формам колебаний позволяет выделить в явном виде лишь одну компоненту неволновой составляющей электрического поля — несвязанный потенциал φ. Компонента, обусловленная пьезоэффектом и также имеющая бесконечную скорость распространения, неявно содержится в сумме $\Psi^{(m)}$ и определяется после решения задачи (1.2)—(1.5).

В заключение отметим, что описанный метод позволяет решать задачи при более сложных по сравнению с (1.4) электрических граничных условиях. При рассмотрении прикладных задач вместо значений потенциалов на электродах часто задаются величины токов через них или характеристики внешних электрических цепей. В этих случаях в граничном условии (1.4) вводятся неизвестные значения потенциалов, определяемые затем из уравнений для токов во внешних цепях или условий сохранения заряда [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Pao Y.-H.* Elastic waves in solids // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1983. V. 50. № 4b. P. 1151—1164.
2. *Eringen A. C.*, *Suhubi E. S.* Elastodynamics. Vol. 2. Linear theory. N. Y.: Acad. Press., 1975. 660 p.
3. *Weaver R. L.*, *Pao Y.-H.* Axisymmetric elastic waves excited by a point source in a plate // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1982. V. 49. № 4. P. 821—836.

4. *Жарий О. Ю.* Закономерности формирования волн Рэлея при нестационарных колебаниях полуплоскости // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 4. С. 633—637.
5. *Партон В. З., Кудрявцев Б. А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 471 с.
6. *Жарий О. Ю., Улитко А. Ф.* Введение в механику нестационарных колебаний и волн. Киев: Вища шк. 1989. 184 с.
7. *Жарий О. Ю.* Волновые процессы в пьезокерамических импульсных генераторах при электрическом разряде // Прочность поликристаллических сегнетоэлектриков. Л.: Ин-т физики тв. тела им. А. Ф. Иоффе, 1981. С. 32—41.
8. *Жарий О. Ю., Улитко А. Ф.* Электрический разряд пьезокерамического стержня при стационарном механическом возбуждении // Математические методы и физико-механические поля. Киев: Наук. думка, 1981. Вып. 13. С. 57—63.
9. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. М.: Наука, 1969. 656 с.

Киев

Поступила в редакцию
19.XII.1988