Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 1, 1990

УДК 539.3; 534.1

И. П. Гетман, Ю. А. Устинов

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН В УПРУГОМ ПРОДОЛЬНО-НЕОДНОРОДНОМ ЦИЛИНДРЕ

Рассматривается задача о распространении стационарных волн в упругом волноводе, неоднородном вдоль его длины. Дается математическое обоснование алгоритма решения задач по определению волновых полей в рассматриваемых кусочно-однородных волноводах.

Приводятся результаты расчетов коэффициентов отражения и прохождения волн в полосе с двумя границами раздела свойств материала. Устанавливается связь между экстремальными свойствами этих коэффициентов и различными резонансными явлениями, возникающими в продольно-неоднородном волноводе.

1. Рассматривается задача о распространении стационарных волн, пропорциональных $\exp(-i\omega t)$ в неоднородном упругом анизотропном цилиндре $S\{|x_1|<\infty;\ x_2, x_3\in D\}$, состоящем из подобластей $S_0 = (-\infty, \xi_0]\times D$, $S_k = [\xi_{k-1}, \xi_k]\times D$ $(k=1,2,\ldots,n-1)$, $S_n = [\xi_{n-1}, \infty)\times D$ ($D \in R^2$ — поперечное сечение цилиндра, являющееся ограниченной областью с гладкой границей в плоскости x_2, x_3). Через Γ_k обозначим цилиндрическую часть границы подобласти S_k. Подобласти S_k в общем случае различаются характером граничных условий на Γ_k, модулями упругости c_{ijkl}, плотностью ρ.

Введем обозначения: $\mathbf{u} = \{u_n\}_{n=1}^3$, $\sigma_m = \{\sigma_{mn}\}_{n=1}^3$, $\boldsymbol{\varepsilon}_m(\mathbf{u}) = \{\varepsilon_{mn}\}_{n=1}^3 = \{{}^1/_2(\partial_m u_n + \partial_n u_m)\}_{n=1}^3$, где u_n, σ_{mn}, ε_{mn} — амплитуды смещений, напряжений и деформаций, $\partial_n = \partial/\partial x_n$. Вектор напряжений $\boldsymbol{\sigma}_m$ можно представить с учетом обобщенного закона Гука для анизотропного материала в следующем виде (A_m, B_m — матричные (3×3) операторы):

$$\boldsymbol{\sigma}_m(\mathbf{u}) = A_m \partial\mathbf{u}/\partial x_1 - iB_m\mathbf{u} \tag{1.1}$$

$$A_m = \|A_m(k,l)\| = \|c_{mkl1}\|,\ B_m = \|B_m(k,l)\| = i\,\|c_{mkl2}\partial_2 + c_{mkl3}\partial_3\|,\quad k,l = 1,2,3;\quad i^2=-1$$

Пусть $H = H(D)$ — гильбертово пространство трехкомпонентных вектор-функций, интегрируемых с квадратом в D, $H_\alpha = H_\alpha(D)$ — пространство Соболева — Слободецкого [1]. Введем в рассмотрение шестикомпонентный вектор $\mathbf{W} = \{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}_1\}$ и гильбертовы пространства шестикомпонентных вектор-функций $H' = H\oplus H$ и $H_{\alpha\beta}' = H_\alpha \oplus H_\beta$. Средний за период $T = 2\pi/\omega$ поток мощности P через сечение $x = x_1 = \mathrm{const}$ тогда можно представить в форме [2]

$$P(\mathbf{W}) = \frac{\omega}{4}(J\mathbf{W},\mathbf{W})_{H'} = \frac{\omega}{4}[\mathbf{W},\mathbf{W}],\quad J = i\begin{Vmatrix} O & -I \\ I & O\end{Vmatrix} \tag{1.2}$$

(O — нулевой, I — тождественный оператор в H).

Пусть $H_e(S_k)$ — энергетическое пространство вектор-функции с нормой

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \int\limits_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} \Pi(\mathbf{u},\mathbf{u})\,dx,\quad \Pi(\mathbf{u},\mathbf{u}) = \sum_{m=1}^{3}(\boldsymbol{\sigma}_m(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}_m(\mathbf{u}))_H \tag{1.3}$$

$C(H_\alpha)$, $C(H'_{\alpha\beta})$ — пространства непрерывных по $x \in R$ вектор-функций $\mathbf{u}(x)$, $\mathbf{W}(x)$ со значениями в H_α, $H'_{\alpha\beta}$ соответственно.

2. Уравнения стационарных колебаний

$$\partial_m \sigma_m + \rho\omega^2 \mathbf{u} = 0 \tag{2.1}$$

в каждой подобласти S_k при учете соотношений (1.1) в терминах вектора $\mathbf{W}$ можно представить в виде (T^k — матричная дифференциальная (6×6) форма)

$$\left(i\frac{\partial}{\partial x} + T^k\right)\mathbf{W}^k = 0, \quad T^k = \begin{Vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{Vmatrix} \tag{2.2}$$

$$t_{11} = A_1^{-1}B_1, \quad t_{21} = i\,(B_1^* A_1^{-1} B_1 - V + \rho\omega^2 I)$$

$$t_{12} = -iA_1^{-1}, \quad t_{22} = B_1^* A_1^{-1}, \quad V = i\,(\partial_2 B_2 + \partial_3 B_3)$$

На боковых поверхностях Γ_k для определенности задается одно из следующих условий:

$$\mathbf{u}\,|_{\Gamma_k} = 0 \tag{2.3}$$

либо

$$\sigma_n\,|_{\Gamma_k} = (\sigma_2 n_2 + \sigma_3 n_3)\,|_{\Gamma_k} = 0 \tag{2.4}$$

($\mathbf{n}$ — вектор нормали к боковой поверхности).

В сечениях $x = \xi_k$ выполняются условия непрерывности

$$\mathbf{W}^k(\xi_k) = \mathbf{W}^{k+1}(\xi_k) \tag{2.5}$$

Источником колебаний является нормальная волна, падающая на границу $x = \xi_0 = 0$ из $-\infty$ и определяемая элементарным решением $\mathbf{W}_s^0(x) = \mathbf{W}_*(x)$ (см. формулу (3.2)), для которого $P(\mathbf{W}_*) > 0$.

3. Матричная дифференциальная форма T^k с граничными условиями (2.3) или (2.4) порождает соответственно операторы T_0^k и T_1^k. Задачам (2.2), (2.3) и (2.2), (2.4) соответствуют линейные пучки

$$(T_\beta^k - \gamma^k)\,\mathbf{V}^k = 0 \quad (\beta = 0, 1) \tag{3.1}$$

эквивалентные квадратичным пучкам, исследованным в [3]. В дальнейшем верхний индекс k, указывающий на принадлежность к подобласти S_k, там где это не приводит к недоразумениям, будем опускать.

Пусть γ_t — собственное значение оператора T_β, $\mathbf{V}_{0t}, \mathbf{V}_{1t}, \ldots, \mathbf{V}_{pt}$ — соответствующие собственная и присоединенные вектор-функции (жорданова цепочка). Элементарным решением уравнения (2.2), удовлетворяющим условиям (2.3) или (2.4), называется вектор-функция вида

$$\mathbf{W}_t(x) = \exp(i\gamma_t x)\left[\frac{(ix)^p}{p!}\mathbf{V}_{0t} + \frac{(ix)^{p-1}}{(p-1)!}\mathbf{V}_{1t} + \ldots + \mathbf{V}_{pt}\right] \tag{3.2}$$

Опираясь на результаты работ [2—5], можно сформулировать следующие свойства операторов T_β, их спектров $\sigma(T_\beta)$ и системы элементарных решений.

1°. Оператор T_β является J-самосопряженным в H', т. е. $(JT_\beta)^* = JT_\beta$.

2°. Спектр $\sigma(T_\beta) = \Lambda^+ \cup \Lambda^- \cup \Lambda^\circ$, где $\gamma_t^+ \in \Lambda^+$, если $\operatorname{Im}\gamma_t^+ > 0$, $\gamma_t^- \in \Lambda^-$, если $\operatorname{Im}\gamma_t^- < 0$, $\gamma_s^\circ \in \Lambda^\circ$, если $\operatorname{Im}\gamma_s^\circ = 0$. Множества $\Lambda^\pm$ имеют предельные точки на бесконечности ($t = \pm 1, \pm 2, \ldots$), множество Λ° конечно ($s = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N$). Собственные значения $\gamma_t^\pm$, γ_s° удовлетворяют следующим свойствам симметрии: $\gamma_t^+ = \gamma_t$, $\gamma_t^- = \gamma_t^*$, $\gamma_{-t}^+ = -\gamma_t^*$, $\gamma_{-t}^- = -\gamma_t$, $\gamma_{-s}^\circ = -\gamma_s^\circ$. Звездочкой отмечены комплексно-сопряженные величины.

3°. Для оператора T_0° существует критическая частота $\omega_0 > 0$ такая, что при $\omega < \omega_0$ $\Lambda^{\circ} = \{0\}$.

4°. Система жордановых цепочек $\{\mathbf{V}_{lt}\}$ полна в пространстве $H^{\prime}_{\alpha, \alpha-1/2}$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1/2$.

Обозначим через $M = \{\mathbf{W}_t(x)\}$ систему элементарных решений и в соответствии со свойством 2° представим $M = M^+ \bigcup M^- \bigcup M^{\circ}$.

5°. Существует разбиение $M^{\circ} = M_0^+ \bigcup M_0^-$, такое, что для любого $\mathbf{W}_s^+(x) \in M_0^+$ $P(\mathbf{W}_s^+) > 0$, а для любого $\mathbf{W}_s^-(x) \in M_0^-$ $P(\mathbf{W}_s^-) < 0$. Элементарное решение $\mathbf{W}_s^+(x) \in M_0^+$ переносит энергию слева направо, элементарное решение $\mathbf{W}_t^+(x) \in M^+$ экспоненциально затухает слева направо. Противоположными свойствами обладают элементарные решения $\mathbf{W}_s^-(x) \in M_0^-$, $\mathbf{W}_t^-(x) \in M^-$.

6°. Для элементов множеств $M^{\pm}$, $M_0^{\pm}$ имеют место следующие условия ортогональности:

$$\begin{gathered}
[\mathbf{W}_s^{\pm}, \mathbf{W}_l^{\pm}](x) = \pm\delta_{sl}, \ [\mathbf{W}_s^{\pm}, \mathbf{W}_l^{\mp}](x) = 0, \ \mathbf{W}_s^{\pm}, \mathbf{W}_l^{\pm} \in M_0^{\pm} \\
[\mathbf{W}_t^{\pm}, \mathbf{W}_r^{\pm}](x) = 0, \ [\mathbf{W}_t^{\pm}, \mathbf{W}_r^{\mp}](x) = \exp(\pm i\theta_r)\,\delta_{tr} \\
\mathbf{W}_t^{\pm}, \mathbf{W}_r^{\pm} \in M^{\pm} \\
[\mathbf{W}_s, \mathbf{W}_t](x) = 0, \ \mathbf{W}_s \in M_0^{\pm}, \ \mathbf{W}_t \in M^{\pm}
\end{gathered} \tag{3.3}$$

В каждой подобласти S_k $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ определим пространство однородных обобщенных решений $H_0(S_k)$. В случае, когда на Γ_k задано граничное условие (2.3), будем говорить, что вектор-функция $\mathbf{u}^k(x) \in H_0(S_k)$, если $\mathbf{u}(x)$ удовлетворяет условию (2.3) и интегральному тождеству

$$\int\limits_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} [\Pi(\mathbf{u}^k, \boldsymbol{\varphi}^k) - \omega^2(\rho^k\mathbf{u}^k, \boldsymbol{\varphi}^k)_H]\, d\xi = 0 \tag{3.4}$$

для произвольной гладкой финитной на отрезке $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}^k(x)$.

В случае граничных условий (2.4) при определении пространства однородных решений достаточно потребовать выполнения только интегрального тождества (3.4).

Для подобластей S_0, S_n будем допускать, что тождество (3.4) выполняется и для вектор-функции, удовлетворяющей условию

$$\Pi(\mathbf{u}^{\alpha}, \mathbf{u}^{\alpha}) \leqslant c(1 + |x|^l), \quad (\alpha = 0, n), \quad l \geqslant 2\max_{\alpha, s} p_s^{\alpha}$$

(p_s^{α} — длины жордановых цепочек).

Пространство однородных решений уравнения (2.2) $H_0'(S_k)$ определим как множество вектор-функций $\mathbf{W}^k(x) = \{\mathbf{u}^k(x), \boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{u}^k)\}$, где $\mathbf{u}^k(x) \in H_0(S_k)$, а $\boldsymbol{\sigma}_1(\ldots)$ — оператор, действующий из $H_{1/2}(D)$ в $H_{-1/2}(D)$.

Из свойств 4°—6° вытекает

Теорема 1. Пусть вектор-функция $\mathbf{u}^k \in H_0(S_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Тогда: 1) условие непрерывности (2.5) следует понимать в смысле метрики пространства $C'(H^{f}_{1/2, -1/2})$; 2) справедливы представления

$$\mathbf{W}^k(x) = \sum_s{}_1 C_s^{k+}\mathbf{W}_s^{k+}(x - \xi_{k-1}) + \sum_s{}_2 C_s^{k-}\mathbf{W}_s^{k-}(x - \xi_k) +$$

$$+ \sum_t{}_3 C_t^{k+}\mathbf{W}_t^{k+}(x - \xi_{k-1}) + \sum_t{}_4 C_t^{k-}\mathbf{W}_t^{k-}(x - \xi_k) \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{3.5}$$

Здесь $\Sigma_{1,2,3,4}$ означает суммирование по всем элементарным решениям из M_0^{k+}, M_0^{k-}, M^{k+}, M^{k-} соответственно, $C_s^{k\pm}$, $C_t^{k\pm}$ — постоянные. В случае $k = 0$ в (3.5) следует положить $\Sigma_3 = 0$, в случае $k = n$ $\Sigma_4 = 0$.

Замечание 1. Постоянные $C_s^{\circ +}$, C_s^{n-} отличны от нуля, если имеются источники колебаний при $x \to -\infty$ и $x \to \infty$ соответственно.

Замечание 2. Если вектор $\mathbf{u}^k(x)$ каким-то образом уже определен, то постоянные $C_r^{k\pm}$ можно найти из соотношений

$$\begin{aligned}
&C_s^{k+} = [\mathbf{W}_0^k, \mathbf{W}_s^{k+}(0)], \quad C_s^{k-} = [\mathbf{W}_0^k, \mathbf{W}_s^{k-}(-l_k)], \quad \mathbf{W}_s^{k\pm} \in M_0^{k\pm} \\
&C_t^{k+} = \exp(-i\theta_t)[\mathbf{W}_0^k, \mathbf{W}_t^{k-}(0)] \\
&C_t^{k-} = \exp(i\theta_t)[\mathbf{W}_0^k, \mathbf{W}_t^{k+}(-l_k)], \quad \mathbf{W}_t^{k\pm} \in M^{k\pm} \\
&\mathbf{W}_0^k = \{\mathbf{u}^k(\xi_{k-1}), \sigma_1^k(\xi_{k-1})\}, \quad l_k = \xi_k - \xi_{k-1}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Эти представления обобщают результаты работы [6], связанные с переразложением решений, полученных методом суперпозиции в ряды по однородным решениям.

На всей оси $x \in R$ определим вектор-функции $\mathbf{u}(x) = \{\mathbf{u}^k(x), x \in [\xi_{k-1}, \xi_k]\}$, $\mathbf{W}(x) = \{\mathbf{W}^k(x), x \in [\xi_{k-1}, \xi_k]\}$. Будем говорить, что $\mathbf{u}(x) \in H_0(S)$, $\mathbf{W}(x) \in H_0'(S)$, если $\mathbf{u}^k(x) \in H_0(S_k)$, $\mathbf{W}^k(x) \in H_0'(S_k)$.

4. В соответствии с поставленной задачей $\mathbf{W}^\circ(x) = \mathbf{W}_* + \mathbf{W}^{\circ -}$ и условия излучения имеют следующий вид:

$$P(\mathbf{W}^{\circ -}) \leqslant 0, \quad P(\mathbf{W}^n) \geqslant 0 \tag{4.1}$$

Имея в виду возможность применения различных приближенных методов решения задачи (2.2)—(2.5), приведем несколько определений ее обобщенного решения.

Определение 1. Обобщенным решением задачи назовем вектор-функцию $\mathbf{u} \in H_0(S)$, удовлетворяющую условию непрерывности

$$\mathbf{u}^k(\xi_k) = \mathbf{u}^{k+1}(\xi_k) \tag{4.2}$$

в метрике $C(H_{1/2})$, условиям излучения (4.1) и интегральному тождеству

$$\Psi_1(\mathbf{u}, \varphi) + l_1(\varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in H_0(S) \tag{4.3}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
&\Psi_1(\mathbf{u}, \varphi) = \sum_{k=0}^{n} [(\sigma_1^k - \sigma_1^{k+1}, \varphi^k)_H(\xi_k) - (\sigma_1^k - \sigma_1^{k-1}, \varphi^k)_H(\xi_{k-1})] \\
&l_1(\varphi) = (\sigma_*, \varphi^0 + \varphi^1)_H(\xi_0), \quad \sigma_* = \sigma_1(\mathbf{u}_*)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Определение 2. Обобщенным решением задачи назовем вектор-функцию $\mathbf{u} \in H_0(S)$, удовлетворяющую условию непрерывности

$$\sigma_1^k(\xi_k) = \sigma_1^{k+1}(\xi_k) \tag{4.5}$$

в метрике $C(H_{-1/2})$, условиям излучения (4.1) и интегральному тождеству

$$\Psi_2(\mathbf{u}, \varphi) + l_2(\varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in H_0(S) \tag{4.6}$$

Здесь

$$\Psi_2(\mathbf{u}, \varphi) = \sum_{k=0}^{n} [(\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k+1}, \sigma_1(\varphi^k))_H(\xi_k) - (\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}, \sigma_1(\varphi^k))_H(\xi_{k-1})] \tag{4.7}$$

$$l_2(\varphi) = (\mathbf{u}_*, \sigma_1(\varphi^0) + \sigma_1(\varphi^1))_H(\xi_0)$$

Определения 1 и 2 основываются на использовании известных вариационных принципов Гамильтона — Лагранжа и Костильяно соответственно. В каждом из приведенных определений фигурирует условие непрерыности либо (4.2), либо (4.5). Сформулируем ниже определение обобщенного решения, в котором условия непрерывности являются естественными, т. е. вытекающими из вариационного принципа. Для этого введем функционалы

$$\Psi(\mathbf{u}, \varphi) = i[\Psi_2(\mathbf{u}, \varphi) - \Psi_1(\mathbf{u}, \varphi)] \tag{4.8}$$
$$l(\varphi) = i[l_2(\varphi) - l_1(\varphi)]$$

Здесь $\mathbf{u}, \varphi \in H_0(S)$.

Полагая $\mathbf{W} = \{\mathbf{u}, \sigma_1(\mathbf{u})\}$, $\eta = \{\varphi, \sigma_1(\varphi)\}$, и используя соотношение $[\mathbf{W}^k, \eta^k](x) = \text{const}$, вытекающее из закона сохранения энергии, функционалам (4.8) можно придать вид

$$\Psi(\mathbf{u}, \varphi) = \Phi(\mathbf{W}, \eta) = [\mathbf{W}^\circ - \mathbf{W}^1, \eta^\circ](\xi_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \{[\mathbf{W}^{k-1}, \eta^k](\xi_{k-1}) -$$
$$- [\mathbf{W}^{k+1}, \eta^k](\xi_k)\} + [\mathbf{W}^{n-1} - \mathbf{W}^n, \eta^n](\xi_{n-1}), \quad l(\varphi) = m(\eta) = [\mathbf{W}_*, \eta^\circ + \eta^1](\xi_0) \tag{4.9}$$

Определение 3. Обобщенным решением задачи назовем вектор-функцию $\mathbf{W} \in H_0'(S)$, удовлетворяющую условиям излучения (4.1) и интегральному тождеству

$$\Phi(\mathbf{W}, \eta) + m(\eta) = 0, \quad \forall \eta \in H_0'(S) \tag{4.10}$$

На основании представлений (3.5) исходную краевую задачу можно свести к системе линейных алгебраических уравнений относительно постоянных $C_r^{k\pm}$. Для этого достаточно подставить в (4.10) выражения (3.4) и затем последовательно положить, например, $\eta^k = \mathbf{W}_r^{k+}, \mathbf{W}_r^{k-}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1, n)$.

Из соотношений (1.2), (3.3), (3.5) вытекает следующая

Теорема 2. Средний за период поток мощности $P(\mathbf{W}^k)$ через поперечное сечение $x = \text{const}$ подобласти S_k определяется соотношением

$$P(\mathbf{W}^\circ) = P(\mathbf{W}_*) + P(\mathbf{W}^{\circ-}), \quad P(\mathbf{W}^{\circ-}) = -\frac{\omega}{4}\sum_{s=1}^{N_0} |C_s^{\circ-}|^2$$

$$P(\mathbf{W}^k) = \frac{\omega}{4}\left\{\sum_{s=1}^{N_k}(|C_s^{k+}|^2 - |C_s^{k-}|^2) + 2\,\mathrm{Re}\sum_t {}_3\exp(i\gamma_t^k l_k)\exp(i\theta_t^k)C_t^{k+}C_t^{k-*}\right\}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{4.11}$$

$$P(\mathbf{W}^n) = \frac{\omega}{4}\sum_{s=1}^{N_n} |C_s^{n+}|^2$$

Положим $P(\mathbf{W}_*) = 1$, величину $K_0 = -P(\mathbf{W}^{\circ-})$ назовем коэффициентом отражения, $K_n = P(\mathbf{W}^n)$ — коэффициентом прохождения, $K_0 + K_n = 1$.

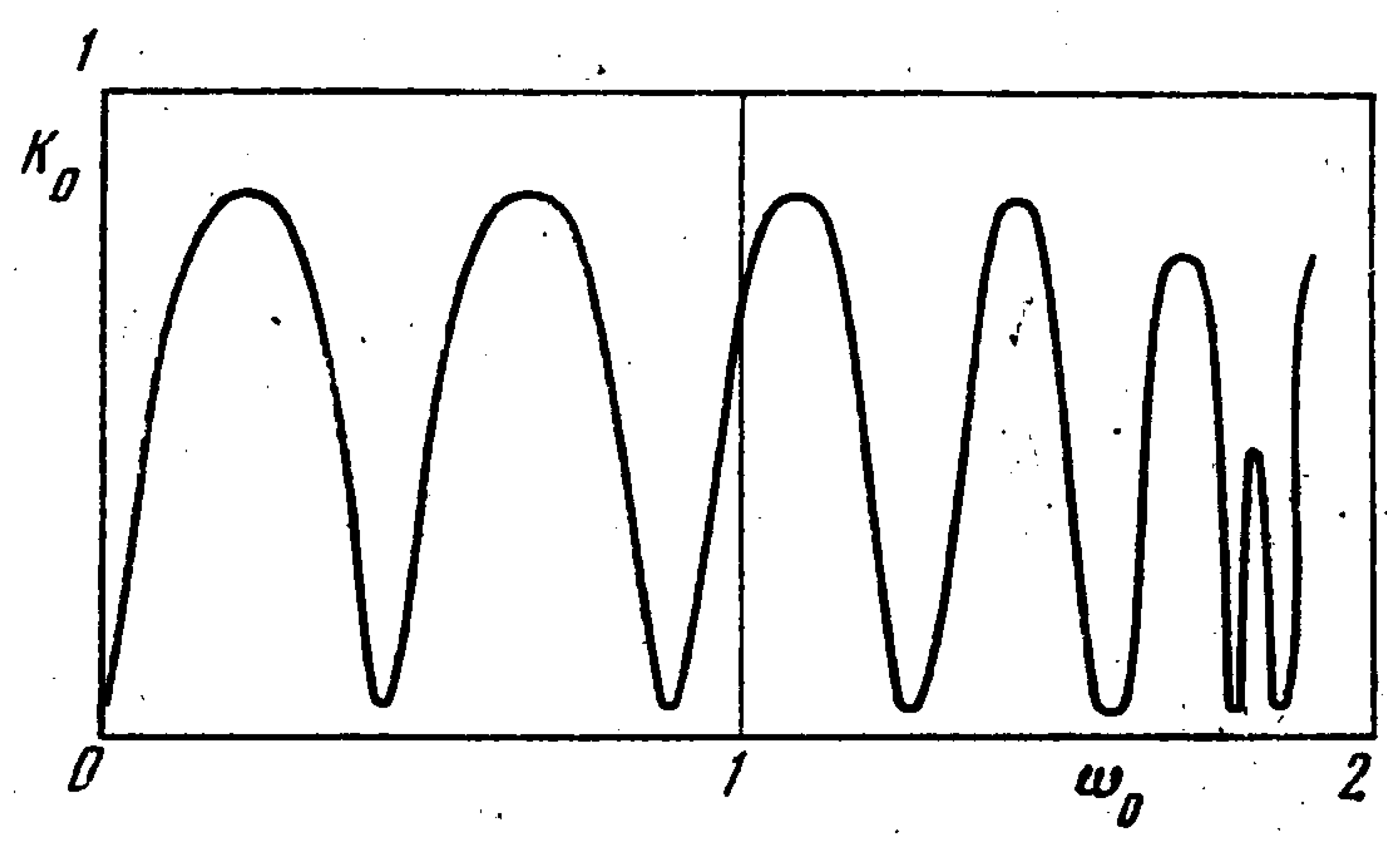
Выражения (4.11) позволяют в ряде случаев сделать некоторые общие выводы о свойствах неоднородных волноводов и управлять ими. Так, например, пусть существует хотя бы одна подобласть S_q, в которой однородные волны отсутствуют (см. свойство 3°). В этом случае в соответствующем выражении в (4.11) $C_s^{q+} = C_s^{q-} = 0$ и перенос энергии осуществляется за счет взаимодействия пар неоднородных волн $\mathbf{W}_t^{q+}(x - \xi_{q-1})$, $\mathbf{W}_t^{q-}(x - \xi_q)$. При этом видно, что с ростом $l_q = \xi_q - \xi_{q-1}$ поток экспоненциально убывает и асимптотически $P(\mathbf{W}^q) = O[\exp(-l_q\,\mathrm{Im}\,\gamma_1^{q+})]$.

Изложенная теория была применена для исследования волновых полей в плоском неоднородном изотропном волноводе ($D = [-h, h]$, $x_3 \equiv 0$) с двумя границами раздела свойств материала, т. е. при $n = 2$ и граничных условиях (2.4) (случай $n = 1$ исследован в работе [7]). В расчетах принималось $\lambda_0 = \lambda_2 = 2{,}06$, $\mu_0 = \mu_2 =$

$= 1{,}53$, $\lambda_1 = 0{,}59$, $\mu_1 = 0{,}26$ $(\times 10^{11} Н/м^2)$, $\rho_0 = \rho_2 = 1{,}87$; $\rho_1 = 0{,}27$ $(\times 10^4$ кг/м$^3)$, $l_1 = \xi_1 - \xi_0 = 5h$.

На фигуре изображено поведение коэффициента отражения K_0 в зависимости от безразмерной частоты $\omega_0 = \omega h\,(\rho_0/\mu_0)^{1/2}$ при падении первой нормальной волны сжатия — растяжения.

Резко выраженные минимумы $K(\omega_0)$ соответствуют интенсивному росту амплитуды колебаний в прямоугольнике S_1. Соответствующие частоты можно рассматривать



как резонансные для S_1. В отличие от результатов, полученных по прикладным одномерным теориям, учет дисперсии в волноводе приводит к уплотнению точек минимума K_0. На частоте граничного резонанса ω_* [7] коэффициент отражения также имеет минимум, который, как показали расчеты, мало зависит от изменения длины вставки l_1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лионс Ж. Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 371 с.
2. *Краснушкин П. Е.* Резонансы в упругом бесконечном цилиндре и трансформация комплексных волн в незатухающие // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266. № 1. С. 44—48.
3. *Костюченко А. Г., Оразов М. Б.* Задача о колебаниях упругого полуцилиндра и связанные с ней самосопряженные квадратичные пучки // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1981. № 6. С. 97—146.
4. *Костюченко А. Г., Оразов М. Б.* О некоторых свойствах корней самосопряженного квадратичного пучка // Функциональный анализ и его приложения. 1975. Т. 9. Вып. 4. С. 28—40.
5. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
6. *Гомилко А. М., Мелешко В. В.* Гармонические волны в полубесконечном упругом слое. // Докл. АН УССР. Сер. А. 1985. № 2. С. 28—32.
7. *Гетман И. П., Лисицкий О. Н.* Отражение и прохождение звуковых волн через границу раздела двух состыкованных упругих полуполос // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 6. С. 1044—1048.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
25.I.1989