Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 6, 1989

УДК 539.3

Р. И. Мокрик, И. В. Олиярник

ПРИМЕНЕНИЕ ОРТОЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ И ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОСТИ

Рассматривается система ортогональных на интервале $t \in [0, \infty)$ ортоэкспоненциальных полиномов (ОЭП), представляющих собой частный случай ОЭП Якоби [1]. Предлагается использовать ОЭП в качестве ядер интегрального преобразования (ОЭП-преобразования) по времени, что упрощает по сравнению с преобразованием Лапласа процедуру получения оригиналов искомых величин. ОЭП-преобразование применяется для решения нестационарных уравнений термоупругости и термовязкоупругости. Исходные уравнения приводятся к соответствующим системам обыкновенных дифференциальных уравнений треугольного вида. Строятся их общие решения.

1. *Определение*. Полиномы $\mathrm{oep}_n(\varkappa, t)$ ($\varkappa$ — неотрицательное число, $n = 0, 1, 2, \ldots$), заданные на полубесконечном интервале $t \in [0, \infty)$ соотношениями

$$\mathrm{oep}_n(\varkappa, t) = \sum_{k=0}^{n} b_{nk} e^{-kt}; \quad b_{nk} = (-1)^{n+k} \binom{n}{k} \binom{n+k+\varkappa+1}{n} \qquad (1.1)$$

называются ортоэкспоненциальными полиномами (ОЭП).

Полиномы $\mathrm{oep}_n(\varkappa, t)$ являются частным случаем ОЭП Якоби $p_n(\alpha, \beta, t)$ [1] при $\alpha = 0$ и $\beta = \varkappa - 1$, выражения которых следуют из классических полиномов Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ [2] при замене аргумента $x = 2e^{-t} - 1$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$, т. е.

$$\mathrm{oep}_n(\varkappa, t) = = p_n(0, \varkappa - 1, t) = P_n^{(0, \varkappa-1)}(2e^{-t} - 1) \qquad (1.2)$$

Введем в рассмотрение класс функций $L_{2,w}[0, \infty)$ гильбертового пространства, для которого скалярное произведение определяется соотношением

$$(f \cdot g) = \int w(t) f(t) g(t)\, dt$$

где $w(t)$ — положительная на $t \in [0, \infty)$ функция; интегрирование здесь и всюду далее, если не оговорено противное, ведется от нуля до бесконечности. Действительнозначная функция $f(t)$, $t \in [0, \infty)$, принадлежит $L_{2,w}[0, \infty)$, если выполняется условие $\int f^2(t) w(t) dt < \infty$.

Из полноты и замкнутости на интервале $t \in [0, \infty)$ ОЭП Якоби и соотношений (1.2) следует, что $\mathrm{oep}_n(\varkappa, t)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ образуют ортогональную с весом $w(t) = e^{-\varkappa t}$, $\varkappa > 0$, систему функций, полную и замкнутую в классе функций $L_{2,w}[0, \infty)$.

Приведем некоторые свойства полиномов $\mathrm{oep}_n(\varkappa, t)$, справедливость которых следует из аналогичных свойств полиномов $p_n(\alpha, \beta, t)$ и $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$:

$$\int e^{-\varkappa t} \mathrm{oep}_n(\varkappa, t)\, \mathrm{oep}_k(\varkappa, t)\, dt = \frac{\delta_{nk}}{\varkappa + 2n}; \quad \delta_{nk} = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ 1, & n = k \end{cases} \qquad (1.3)$$

$$\mathrm{oep}_0(\varkappa, t) \equiv 1, \quad \mathrm{oep}_1(\varkappa, t) = (\varkappa+1)e^{-t} - \varkappa \tag{1.4}$$

$$\mathrm{oep}_{n+1}(\varkappa, t) = (A_n e^{-t} - B_n)\,\mathrm{oep}_n(\varkappa, t) - D_n\,\mathrm{oep}_{n-1}(\varkappa, t), \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$A_n = \frac{(\varkappa+2n)(\varkappa+2n+1)}{(n+1)(\varkappa+n)}, \quad B_n = \frac{(\varkappa+2n)[(\varkappa+n)^2+n^2-\varkappa]}{(n+1)(\varkappa+n)(\varkappa+2n-1)}$$

$$D_n = \frac{n(\varkappa+n-1)(\varkappa+2n+1)}{(n+1)(\varkappa+n)(\varkappa+2n-1)}$$

$$\mathrm{oep}_n(\varkappa, 0) = 1; \quad \lim_{t\to\infty} \mathrm{oep}_n(\varkappa, t) = (-1)^n \binom{n+\varkappa-1}{n} = b_{n0}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.5}$$

$$\mathrm{oep}_n(\varkappa, t) = \frac{(-1)^n}{n!} e^{-(\varkappa-1)t} \left\{ \frac{d^n}{d\xi^n} [(1-\xi)^n \xi^{\varkappa+n-1}] \right\} \bigg|_{\xi=e^t}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1.6}$$

((1.3) — соотношение ортогональности, (1.4) — рекуррентные соотношения, (1.5) — граничные значения, (1.6) — аналог формулы Родрига).

Для $\mathrm{oep}_n(\varkappa, t)$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) справедлива формула дифференцирования (доказывается методом математической индукции с использованием соотношений (1.4))

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{oep}_0(\varkappa, t) = 0 \tag{1.7}$$

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{oep}_n(\varkappa, t) = -n\,\mathrm{oep}_n(\varkappa, t) - \sum_{k=0}^{n-1} (\varkappa+2k)\,\mathrm{oep}_k(\varkappa, t), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Выражения для производных высших порядков ОЭП следуют из (1.7):

$$\frac{d^k}{dt^k}\,\mathrm{oep}_n(\varkappa, t) = (-n)^k\,\mathrm{oep}_n(\varkappa, t) - \Phi_{kn}, \quad \begin{matrix} k = 0, 1, 2, \ldots \\ n = 1, 2, \ldots \end{matrix} \tag{1.8}$$

$$\Phi_{0n} \equiv 0, \quad \Phi_{1n} = \sum_{m=0}^{n-1} (\varkappa+2m)\,\mathrm{oep}_m(\varkappa, t)$$

$$\Phi_{kn} = -n\Phi_{k-1,n} + \sum_{m=0}^{n-1} (\varkappa+2m)[(-m)^{k-1}\,\mathrm{oep}_m(\varkappa, t) + (-1)^{k-1}\Phi_{k-1,m}]$$

Утверждение. Полином $\mathrm{oep}_n(\varkappa, t)$ имеет n простых нулей на полубесконечном интервале $t \in [0, \infty)$.

Доказательство. Предположим, что полином $\mathrm{oep}_n(\varkappa, t)$ на интервале меняет знак при переходе через k точек. Очевидно, что $0 \leqslant k \leqslant n$. Утверждение будет доказано, если $k = n$. Рассмотрим функцию

$$Q_k(t) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \prod_{j=0}^{k} (e^{-t} - e^{-t_j}), & 0 < k \leqslant n, \quad t \in [0, \infty) \end{cases}$$

Здесь t_k — точки, при переходе через которые полином $\mathrm{oep}_n(\varkappa, t)$ меняет знак. Произведение $Q_k(t)\,\mathrm{oep}_n(\varkappa, t)\,e^{-\varkappa t}$ очевидно, не меняет знак на $t \in [0, \infty)$. Поэтому

$$\int e^{-\varkappa t} Q_k(t)\,\mathrm{oep}_n(\varkappa, t)\,dt \neq 0$$

Отсюда следует, что $k = n$, так как при $k < n$

$$\int e^{-\varkappa t}\,\mathrm{oep}_n(\varkappa, t)\,e^{-kt} dt = 0$$

Рассмотрим вопрос о разложении некоторой функции из $L_{2,w}[0, \infty)$, где $w(t) = e^{-\varkappa t}$, $\varkappa > 0$, в ряд по ОЭП. С использованием теоремы Рау [3] была доказана [1] теорема разложения функции $f(t) \in L_{2,w}[0, \infty)$, $w(t) = e^{-(\beta+1)t}(1-e^{-t})^\alpha$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$, в ряд по $p_n(\alpha, \beta, t)$. По аналогии с этой теоремой сформулируем теорему разложения функции из $L_{2,w}[0, \infty)$, $w(t) = e^{-\varkappa t}$ в ряд по полиномам $\text{оер}_n(\varkappa, t)$.

Теорема 1. Пусть ограниченная и непрерывная на $t \in [0, \infty)$ функция $f(t)$ имеет кусочно-непрерывную производную, которая удовлетворяет условию $\lim e^t f'(t) < \infty$ при $t \to \infty$. Тогда при $\varkappa > 0$ ряд

$$\sum_{n=0} f_n(\varkappa + 2n)\, \text{оер}_n(\varkappa, t) \quad \left(f_n = \int f(t)\, e^{-\varkappa t}\, \text{оер}_n(\varkappa, t)\, dt\right)$$

равномерно сходится к $f(t)$ на каждом замкнутом интервале $t \in [t_1, t_2]$, $0 < t_1 < t_2 < \infty$.

Простым и вместе с тем практически важным частным случаем рассматриваемого класса ОЭП является случай $\varkappa = 0$.

2. Ортоэкспоненциальное преобразование (ОЭП-преобразование) некоторой функции из $L_{2,w}[0, \infty)$, $w(t) = e^{-\varkappa t}$ определяется парой соотношений:

$$\text{ОЭП}\{f\} \equiv f_n = \int e^{-\varkappa t} f(t)\, \text{оер}_n(\varkappa, t)\, dt, \quad f(t) = \sum_{n=0} (\varkappa + 2n)\, f_n\, \text{оер}_n(\varkappa, t) \quad (2.1)$$

Функция $f(t)$ называется функцией-оригиналом или просто оригиналом, f_n — изображением функции $f(t)$.

Соответствующее преобразование при $\varkappa = 0$ было успешно использовано [1] для исследования нестационарных процессов в упругих и вязкоупругих средах при импульсных воздействиях.

Идея получения оригинала в виде ряда по ортогональной системе функций использовалась в преобразовании Лагерра [4], в конечномерных интегральных преобразованиях. Однако имеется существенная разница в способе использования этой идеи в последних преобразованиях и преобразованиях Лагерра, (см. (2.1)).

Приведем некоторые свойства преобразования (2.1). В дальнейшем предполагается, что $f(t)$ и $g(t)$ — непрерывно-дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям теоремы 1.

Линейность. Если f_n — изображение функции $f(t)$, а g_n — функции $g(t)$, то изображением функции $F(t) = af(t) + bg(t)$, где a, b — постоянные величины, является $F_n = af_n + bg_n$.

Изображение производной функции. Пусть f_n — изображение функции $f(t)$. Тогда существует изображение функции $F(t) = f'(t)$, определяющееся выражением

$$F_n = (\varkappa + n) f_n + \sum_{k=0}^{n-1} (\varkappa + 2k) f_k - f(0) \quad (2.2)$$

Интегрирование оригинала. Пусть f_n — изображение функции $f(t)$. Тогда изображение F_n функции

$$F(t) = \int_0^t f(x)\, dx$$

определяется выражением

$$F_n = (\varkappa + n)^{-1} \left[f_n - \sum_{k=0}^{n-1} (\varkappa + 2k) F_k\right] \quad (2.3)$$

Доказательство формул (2.2), (2.3) проводится с использованием соотношений (2.1) и интегрирования по частям с учетом равенств (1.7).

[1] *Мокрик Р. И., Олиярник И. В.* Нестационарная связанная задача термовязкоупругости для полупространства. Львов, 1984. 14 с.— Деп. в УкНИИНТИ 2.10.84, № 1569 Ук-84.

Изображение свертки двух функций. Пусть f_n — изображение функции $f(t)$, а g_n — функции $g(t)$. Тогда существует изображение h_n функции

$$h(t)=\int_0^t f(t-\xi)\,g(\xi)\,d\xi$$

определяющееся выражением

$$h_n = b_{nn}^{-1}\sum_{i=0}^{n} f_i\alpha_{ni}\sum_{i=0}^{n} g_i\alpha_{ni}-\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_{nk}h_k$$

$$\alpha_{nk}=b_{nk}\sum_{i=0}^{k}(\varkappa+2i)\,\alpha_{ki}^{*} \tag{2.4}$$

$$\alpha_{k0}^{*}=(\varkappa+k)^{-1},\qquad \alpha_{ki}^{*}=\prod_{j=0}^{i-1}(k-j)\Big/\prod_{j=0}^{i}(\varkappa+k+j),\qquad i\geqslant 1$$

где b_{nn} определяются из (1.1).

Доказательство. Функция $h(t)$ непрерывно-дифференцируема и удовлетворяет условиям теоремы 1. Это следует из соответствующих свойств функций $f(t)$ и $g(t)$. Таким образом, h_n существует.

Согласно определению (2.1) имеем

$$h_n=\int e^{-\varkappa t}\,\mathrm{oep}_n(\varkappa,t)\,dt\int_0^t f(t-\xi)\,g(\xi)\,d\xi=\int e^{-\varkappa t}\,\mathrm{oep}_n(\varkappa,t)\,dt\int f(t-\xi)\,g(\xi)\,H(t-\xi)\,d\xi$$

где $H(t)$ — единичная функция Хевисайда. После изменения порядка интегрирования с последующей заменой переменных во внутреннем интеграле получим

$$h_n=\int g(\xi)\,e^{-\varkappa\xi}\sum_{k=0}(\varkappa+2k)\,f_k L_{nk}(\varkappa,\xi)$$

$$L_{nk}(\varkappa,\xi)=\int e^{-\varkappa t}\,\mathrm{oep}_n(\varkappa,t+\xi)\,\mathrm{oep}_k(\varkappa,t)\,dt=\sum_{j=0}^{n-k}a_j^{(n,k)}(\varkappa)\,e^{-(n-j)\varkappa}$$

Отметим, что $L_{nk}(\varkappa,\xi)=0$ для $k>n$. Подстановка значения $L_{nk}(\varkappa,\xi)$ в выражение h_n с использованием разложения

$$e^{-m\xi}=\sum_{i=0}^{m}\alpha_{mi}^{*}\,\mathrm{oep}_i(\varkappa,\xi)$$

приводит к соотношению (2.4).

3. Возможности предлагаемого интегрального преобразования проиллюстрируем на уравнениях термоупругости и термовязкоупругости. Малые возмущения некоторой исходно невозмущенной термоупругой или термовязкоупругой среды описываются системой уравнений

$$L_1\,\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{u}-L_2\,\mathrm{rot\,rot}\,\mathbf{u}-L_3\,\mathrm{grad}\,T=L_4\,(\rho\partial_t^2\mathbf{u}-\mathbf{F})$$

$$\Delta T-a^{-1}l\partial_t T-L_5 l\,\mathrm{div}\,(\partial_t\mathbf{u})+\lambda_T^{-1}lW=0,\ l=1+t_r\partial_t \tag{3.1}$$

Здесь $\mathbf{u}$ — вектор перемещений, T — изменение абсолютной температуры среды, ρ — ее плотность, $\mathbf{F}$ — вектор массовых сил, W — функция тепловых источников, λ_T — коэффициент теплопроводности, a — коэффициент температуропроводности, t_r — время релаксации теплового потока [5].

Для термоупругой среды

$$L_1=\lambda_0+2\mu_0,\quad L_2=\mu_0,\quad L_3=\gamma_0=\alpha_T\,(3\lambda_0+2\mu_0),\quad L_4\equiv 1,$$

$$L_5=\eta_0=\gamma_0T_0\lambda_T^{-1} \tag{3.2}$$

(λ_0, μ_0 — коэффициенты Ламе, α_T — коэффициент линейного теплового расширения среды, T_0 — начальная температура среды).

Для термовязкоупругой среды $L_1, \ldots, L_5$ — операторы вида

$$L_1\varphi = (\lambda + 2\mu)\cdot\varphi, \quad L_2\varphi = \mu\cdot\varphi, \quad L_3\varphi = \alpha_T\ (3\lambda + +2\mu)\cdot\varphi, \quad L_4\varphi = \varphi$$

$$L_5\varphi = \alpha_T\lambda_T^{-1}T_0\,(3\lambda + 2\mu)\cdot\varphi \tag{3.3}$$

$$\lambda\cdot\varphi = \lambda_0\Big[\varphi - \int\limits_0^t \lambda(t-\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi\Big], \quad \mu\cdot\varphi = \mu_0\Big[\varphi - \int\limits_0^t \mu(t-\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi\Big]$$

или

$$L_1 = \frac{2}{3}\,(\bar P_1\bar P_4 + 2\bar P_2\bar P_3), \quad L_2 = \bar P_2\bar P_3, \quad L_3 = 2\bar P_1\bar P_4, \quad L_4 = 2\bar P_1\bar P_3,$$

$$L_5 = T_0\lambda_T^{-1}L_3, \quad \bar P_i = \sum_{k=0}^{N_i} a_k^{(i)}\partial_t^{\,k}, \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad \partial_t^{\,k} = \frac{\partial^k}{\partial t^k} \tag{3.4}$$

Для простоты выкладок ограничимся рассмотрением случая осесимметричных возмущений рассматриваемых сред в цилиндрической системе координат (r, θ, z). Тогда вектор перемещений $\mathbf{u}$ (u_r, 0, u_z) и температура T — функции времени t и двух пространственных координат r и z. Представим вектор перемещений $\mathbf{u}$ в виде

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad}\Phi + \operatorname{rot}\boldsymbol{\Psi}; \quad \Phi \equiv \Phi\,(t, r, z), \quad \boldsymbol{\Psi} \equiv (0, \Psi, 0)\quad (t, r, z)$$

(Φ и $\boldsymbol{\Psi}$ — скалярный и векторный потенциалы). Уравнения (3.1) в областях, свободных от массовых сил и источников ($F \equiv 0$, $W \equiv 0$), сводятся к следующим:

$$L_1\Delta\Phi - L_4\rho\partial_t^{\,2}\Phi = L_3T, \quad L_2\,(\Delta\Psi - r^{-2}\Psi) - L_4\rho\partial_t^{\,2}\Psi = 0$$

$$\Delta T - a^{-1}l\partial_t T + L_5 l\partial_t\Delta\Phi = 0 \quad (\Delta = \partial_r^{\,2} + r^{-1}\partial_r + \partial_z^{\,2}) \tag{3.5}$$

Выполним в уравнениях (3.5) ОЭП-преобразование (2.1) по времени t и Ганкеля по радиальной координате r. Принимая во внимание свойства указанных преобразований, получим (штрих означает производную по z)

$$\Phi_n'' - p_n\Phi_n - \gamma_nT_n = \sum_{k=0}^{n-1} F_1(T_k, \Phi_k, \Phi_k''), \quad \Psi_n'' - s_n\Psi_n = \sum_{k=0}^{n-1} F_2(\Psi_k, \Psi_k'')$$

$$T_n'' - q_nT_n + \eta_n(\Phi_n'' - \xi^2\Phi_n) = \sum_{k=0}^{n-1} F_3(T_k, \Phi_k, \Phi_k'') \tag{3.6}$$

$$q_n = \xi^2 + a^{-1}t_{rn}, \quad t_{rn} = (\varkappa + n)\,[1 + (\varkappa + n)\,t_r]$$

$$\zeta_{nk} = (\varkappa + 2k)\,[1 + (\varkappa + n + k)\,(n - k)\,t_r], \quad \omega_{nk} = (\varkappa + 2k)\,(n - k)\cdot\cdot(\varkappa + n + k)$$

Функции $\Phi_n(\xi, z)$, $\Psi_n(\xi, z)$, $T_n(\xi, z)$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) определяются формулой

$$(\Phi_n, \Psi_n, T_n)(\xi, z) = \iint e^{-\varkappa t}\operatorname{oep}_n(\varkappa, t)\,rJ_i(\xi r)\,(\Phi, \Psi, T)\,(t, r, z)\,dtdr \tag{3.7}$$

$i = 0$ для Φ, T, $i = 1$ для Ψ; ξ — параметр преобразования Ганкеля, $J_i(\xi r)$ — функция Бесселя первого рода i-го порядка.

Значения остальных величин таковы:

в случае термоупругости

$$p_n = \xi^2 + (\varkappa + n)^2/c_1^{\,2}, \quad \gamma_n = \gamma_0/(\lambda_0 + 2\mu_0), \quad s_n = \xi^2 + (\varkappa + n)^2/c_2^{\,2}$$

$$\eta_n = \eta_0t_{rn}, \quad F_1(\ldots) = \omega_{nk}\Phi_k(\xi, z)/c_1^{\,2}, \quad F_2(\ldots) = \omega_{nk}\Psi_k(\xi, z)/c_2^{\,2}$$

$$F_3(\ldots) = \zeta_{nk}\,[a^{-1}T_k(\xi, z) - \eta_0\,(\Phi_k''(\xi, z) - \xi^2\Phi_k(\xi, z))]$$

в случае термовязкоупругости для соотношений (3.3)

$$p_n = \xi^2 + \frac{(\varkappa + n)^2}{c_1^2(1 - g_{nn})}, \quad \gamma_n = \beta_0 - \beta^*, \quad \beta_0 = \frac{\gamma_0}{\lambda_0 + 2\mu_0}$$

$$\beta^* = \frac{\alpha_{nn}\alpha_T(3\lambda^* + 2\mu^*)}{(\lambda_0 + 2\mu_0)\, b_{nn}}, \quad s_n = \xi^2 + \frac{(\varkappa + n)^2}{c_2^2(1 - \chi_{nn})}, \quad \eta_n = (\eta_0 - \eta^*)\, t_{rn}$$

$$\eta^* = \alpha_T T_0 \frac{3\lambda^* + 2\mu^*}{\lambda_T}, \quad \lambda^* = \lambda_0 \sum_{k=0}^{n} \alpha_{nk}\lambda_k^*, \quad \mu^* = \mu_0 \sum_{k=0}^{n} \alpha_{nk}\mu_k^*$$

$$(\mu_k^*, \lambda_k^*) = \int e^{-\varkappa t}\, \mathrm{oep}_k(\varkappa, t)(\mu, \lambda)(t)\, dt$$

$$F_1(\ldots) = [(\omega_{nk}/c_1^2 - \xi^2 g_{nk})\,\Phi_k + g_{nk}\Phi_k'' - \beta^* T_k](1 - g_{nn})^{-1}$$

$$F_2(\ldots) = [(\omega_{nk}/c_2^2 - \xi^2\chi_{nk})\,\Psi_k + \chi_{nk}\Psi_k''](1 - \chi_{nn})^{-1}$$

$$F_3(\ldots) = \zeta_{nk}\,[a^{-1}T_k - \eta_0(\Phi_k'' - \xi^2\Phi_k) + \alpha_T T_0(3\lambda_0 H_k + 2\mu_0 G_k)\,\lambda_T^{-1}] + {}$$
$$+ \eta^* t_{rn}\alpha_{nk}(\Phi_k'' - \xi^2\Phi_k)\, b_{nn}^{-1}$$

$$g_{nk} = \frac{\alpha_{nk}(\lambda^* + 2\mu^*)}{b_{nn}(\lambda_0 + 2\mu_0)}, \quad \chi_{nk} = \frac{\alpha_{nk}\mu^*}{b_{nn}\mu_0}$$

$$H_k = b_{kk}^{-1} \sum_{i=0}^{k} \alpha_{ki}(\Phi_i'' - \xi^2\Phi_i) \sum_{i=0}^{k} \alpha_{ki}\lambda_i^*$$

$$G_k = b_{kk}^{-1} \sum_{i=0}^{k} \alpha_{ki}(\Phi_i'' - \xi^2\Phi_i) \sum_{i=0}^{k} \alpha_{ki}\mu_i^*$$

в случае соотношений (3.4)

$$p_n = \xi^2 + \rho \sum_{i=0}^{N_1+N_3} A_i(\varkappa + n)^{i+2} \Big[\sum_{i=0}^{M} B_i(\varkappa + n)^i\Big]^{-1}$$

$$\gamma_n = \sum_{i=0}^{N_1+N_4} C_i(\varkappa + n)^i \Big[\sum_{i=0}^{M} B_i(\varkappa + n)^i\Big]^{-1}, \quad \eta_n = [1 + (\varkappa + n)\, t_r] \sum_{i=0}^{N_1+N_4} C_i(\varkappa + n)^i$$

$$s_n = \xi^2 + 2\rho \sum_{i=0}^{N_1} a_i^{(1)}(\varkappa + n)^{i+2} \Big[\sum_{i=0}^{N_2} a_i^{(2)}(\varkappa + n)^i\Big]^{-1}$$

$$M = \max\{N_1 + N_4,\ N_2 + N_3\}$$

Вид функций $F_j(\ldots)$ $(j = 1, 2, 3)$ для конкретной модели вязкоупругого тела определяется согласно (1.8), (2.2) и (3.4), постоянные A_i, B_i и C_i выражаются через постоянные модели вязкоупругого тела.

Таким образом, решение исходной системы уравнений (3.5) сведено к решению последовательности неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений. Отметим, что правые части уравнений (3.5) (неоднородные члены) представляют собой комбинацию решений предыдущих уравнений. И наконец, добавим, что в случае ненулевых начальных условий в правые части уравнений (3.6) будут входить члены, определяющие значения искомых величин и их производных в начальный момент времени.

В случае конечной области изменения радиальной переменной r вместо преобразования Ганкеля (3.7) следует использовать конечномерное преобразование Ганкеля. Результат тот же: последовательность неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений.

4. Перейдем к вопросу построения общего решения системы уравнений (3.6), которые являются частным случаем бесконечных треугольных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Была доказана [6] теорема существования системы фундаментальных решений таких систем.

В отличие от систем треугольного типа, изученных в [4], дифференциальный оператор левых частей уравнений (3.6) зависит от параметра n. Эта существенная особенность дает возможность сравнительно просто записать общее решение рассматриваемых систем дифференциальных уравнений.

После преобразований уравнения (3.6) приводятся к виду

$$\Phi_n'''' - (p_n + q_n - \gamma_n\eta_n)\Phi_n'' + (p_n q_n - \gamma_n\eta_n\xi^2)\Phi_n = \\ = \sum_{k=0}^{n-1} [\gamma_n F_3(\ldots) + F_1''(\ldots) - q_n F_1(\ldots)], \qquad \Psi_n'' - s_n\Psi_n = \\ = \sum_{k=0}^{n-1} F_2(\ldots); \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.1}$$

Функции $T_n(\xi, z)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ после определения $\Phi_n(\xi, z)$ из первого уравнения (4.1) находятся с помощью первого уравнения (3.6).

Так как уравнения (4.1) можно решать последовательно, то, очевидно, общее решение n-го уравнения записывается следующим образом:

$$\Phi_n(\xi, z) = \sum_{i=1}^{4} c_{nn}^{(i)}(\xi) U_{ni}(\xi, z) + \Phi_n^*(\xi, z)$$

$$\Psi_n(\xi, z) = \sum_{i=1}^{2} c_{nn}^{(i)*}(\xi) U_{ni}^*(\xi, z) + \Psi_n^*(\xi, z)$$

где $U_{ni}(\xi, z)$ и $U_{nj}^*(\xi, z)$ $(i = 1, 2, 3, 4;\ j = 1, 2)$ — фундаментальные системы решений однородных дифференциальных уравнений, соответствующих (4.1), $c_{nn}^{(i)}$, $c_{nn}^{(i)*}$ — неизвестные величины, $\Phi_n^*(\xi, z)$ и $\Psi_n^*(\xi, z)$ — частные решения уравнений (4.1). Как уже отмечалось выше, дифференциальный оператор левых частей уравнений (3.6), а следовательно, и (4.1) зависят от n. Поэтому естественно представить частные решения в виде линейной комбинации решений предыдущих уравнений:

$$\Phi_n^*(\xi, z) = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{4} c_{nk}^{(i)} U_{ki}(\xi, z), \qquad \Psi_n^*(\xi, z) = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{2} c_{nk}^{(i)*} U_{ki}^*(\xi, z)$$

Постоянные $c_{nk}^{(i)}$ и $c_{nk}^{(i)*}$ определяются из уравнений (4.1). С учетом последних соотношений общее решение можно записать в виде

$$\Phi_n(\xi, z) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{4} c_{nk}^{(i)} U_{ki}(\xi, z), \qquad \Psi_n(\xi, z) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{2} c_{nk}^{(i)*} U_{ki}^*(\xi, z) \tag{4.2}$$

где $U_{ki}(\xi, z)$, $U_{ki}^*(\xi, z)$ — фундаментальные, согласно определению в [6], системы решений уравнений (4.1).

Постоянные $c_{nk}^{(i)}$, $c_{nk}^{(i)*}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, как уже отмечалось, определяются подстановкой в уравнения (4.1). Важным свойством ОЭП-преобразования является тот факт, что независимо от вида правых частей уравнений (4.1), т. е. независимо от модели среды, формула определения постоянных одна и та же:

$$(c_{nk}^{(i)}, c_{nk}^{(j)*}) = (-1)^{n+k}\binom{n+k+\varkappa-1}{n-k}(c_{kk}^{(i)}, c_{kk}^{(j)*}); \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad j = 1, 2 \tag{4.3}$$

Оставшийся произвол в определении $c_{nn}^{(i)}$, $c_{nn}^{(j)*}$ позволяет удовлетворить граничным условиям на искомые величины.

Остается отметить, что все сказанное для преобразования (2.1) при $\varkappa > 0$ переносится и на случай $\varkappa = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Otakar Jaroch.* Orthoexponential Jacobi polynomials and the inversion of Laplace transforms // Scientific Papers of the Institute of Chemical Technology. Automatic Control Systems and Computing Methods. Prague. 1930. R3. P. 5—27.

2. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1976. 328 с.
3. *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимация. М.: Мир, 1980. 608 с.
4. *Галазюк В. А.* Метод полиномов Чебышева — Лагерра в смешанной задаче для линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами // Докл. АН УССР. Сер. А. 1981. № 1. С. 3—7.
5. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Обобщенная термомеханика. Киев: Наук. думка, 1976. 310 с.
6. *Галазюк В. А., Горечко А. Н.* Общее решение бесконечной треугольной системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. 1983. Т. 35 № 6. С. 742—745.

Поступила в редакцию 6.II.1989

Львов