Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 6, 1989

УДК 539.3

И. Г. Терегулов

МОМЕНТНАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ЭФФЕКТОВ В АНИЗОТРОПНЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

Для анизотропных сред типа поляризуемых пьезокерамик строится моментная (полярная) теория деформируемых твердых тел. Подробно рассматривается линейная теория и дается объяснение эффекта нелинейного изменения электрического поля внутри поляризованного пьезоэлемента (эффект Мида).

Классическая теория электромагнитных эффектов в твердых телах не дает возможности описать некоторые наблюдаемые эффекты (например, эффект Мида [1]). Попытка устранить этот недостаток классической теории [2, 3] опирается на введение в энтальпию в качестве параметра процесса градиента поляризации. Построение моделей сплошных сред, учитывающих внутренние механические и электромагнитные моменты, проводилось в электродинамике (например, [4, 5]) при взаимодействии электромагнитных полей со средой. Ниже дается решение поставленной в заголовке задачи и приводится пример естественного описания эффекта Мида.

Пусть $x^i (i = 1, 2, 3)$ — лагранжева система координат, вмороженная в среду, занимающую объем V с границей S. Положение точки этой среды относительно неподвижной инерциальной системы y^{Γ} определяет вектор $\mathbf{r}(x^i, t)$, t — время. Вектор $\mathbf{r}^* = \mathbf{r} + \mathbf{u}(x^i, t)$ определяет положение материальных точек среды после деформации, $\mathbf{u}$ — вектор перемещения. Выполняемые далее построения преследуют цель описать поведение пьезокерамических сред, которые отличаются хрупкостью и, естественно, не допускают существенных деформаций и изгибаний. По этой причине дальнейшие построения приведены в геометрически линейной постановке. В режиме малых перемещений тензор деформации Грина имеет ковариантные составляющие

$$\mathbf{E} = \varepsilon_{ik}\mathbf{r}^i\mathbf{r}^k, \quad 2\varepsilon_{ik} = \nabla_i u_k + \nabla_k u_i = \mathbf{r}_i \cdot \partial\mathbf{u}/\partial x^k + \mathbf{r}_k \cdot \partial\mathbf{u}/\partial x^i$$

а тензор напряжения Коши имеет контрвариантные составляющие σ^{ik}. Вектор напряжения на площадке с ортом $\mathbf{n} = n^i\mathbf{r}_i$ есть

$$\mathbf{P}_n = \sigma^{ik}\mathbf{r}_k n_i; \quad \mathbf{\Sigma} = \sigma^{ik}\mathbf{r}_i\mathbf{r}_k \not\equiv \sigma^{ik}\mathbf{r}_k\mathbf{r}_i \tag{1}$$

а вектор внутреннего момента на той же площадке

$$\boldsymbol{\mu}_n = \mu^{ik} n_i \mathbf{r}_k; \quad \mathbf{M} = \mu^{ik}\mathbf{r}_i\mathbf{r}_k \not\equiv \mu^{ik}\mathbf{r}_k\mathbf{r}_i \tag{2}$$

где μ^{ik} — составляющие тензора моментов. Из уравнений равновесия для сил и моментов для элементарного объема следует, что

$$\nabla_i\sigma^{ik} + Q^k = 0, \quad \nabla_i\mu^{ij} + c^{ikj}\sigma_{ik} + \mu^i = 0 \tag{3}$$

где $Q^i\mathbf{r}_i$, $\mu^i\mathbf{r}_i$ — векторы отнесенных к единице объема массовых сил и моментов. Из (3) следует, что в общем случае $\sigma^{ik} \neq \sigma^{ki}$.

Примем условие, что для произвольного объема тела сумма моментов второго порядка $[\mathbf{r} \times [\mathbf{r} \times \mathbf{F}]]$ относительно внутренней точки уравновешена. Тогда получим равенство $\mu^{ik} = \mu^{ki}$, которое далее будем предполагать выполненным.

Сумму работ внешних сил и моментов

$$\delta A = \int \mathbf{Q}\cdot\delta\mathbf{u}\,dV + \int \mathbf{P}_n\cdot\delta\mathbf{u}\,dS + \int \boldsymbol{\mu}\cdot\delta\boldsymbol{\omega}\,dV + \int \boldsymbol{\mu}_n\cdot\delta\boldsymbol{\omega}\,dS$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — вектор вращения, при учете выражений (1) и (2) преобразуем к виду

$$\delta A = \int t^{ik}\delta\varepsilon_{ik}\,dV + \int \mu^{ik}\delta\xi_{ik}\,dV + \int \nu^i\delta\gamma_i\,dV$$

Здесь

$$2t^{ik} = \sigma^{ik} + \sigma^{ki}, \quad 2\nu^j = c^{jik}l_{ik}, \quad 2l^{ik} = \sigma^{ik} - \sigma^{ki}$$

$$2\varepsilon_{ik} = \nabla_i u_k + \nabla_k u_i, \quad 2\xi_{ik} = \nabla_i\omega_k + \nabla_k\omega_i, \quad 2\eta_{ik} = \nabla_i u_k - \nabla_k u_i$$

$$2\gamma^j = c^{jik}\eta_{ik} - \omega^j$$

В этих обозначениях уравнения (3) примут вид

$$\nabla_i t^{ik} - c^{ikj}\nabla_i\nabla_m\mu_{\cdot j}^{m} = c^{ikj}\nabla_i\mu_j - Q^k \qquad (4)$$

$$\nu^j = -\nabla_i\mu^{ij} - \mu^j \qquad (5)$$

Выше и всюду далее интегрирование ведется по объему V и поверхности S.

Приращение энергии электромагнитного поля в объеме V и количество выделенного тепла за счет потоков $\mathbf{q}_h$ и $\mathbf{q}_e$ магнитного $\mathbf{H}$ и электрического $\mathbf{E}$ полей выражаются следующим образом ($\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ — магнитная и электрическая индукции, $\mathbf{I}$ — сила тока):

$$\delta Э = \int q_h{}^i\delta E_i dS + \int q_e^i\delta H_i\,dS = \delta\int(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}^{\cdot} + \mathbf{H}\cdot\mathbf{B}^{\cdot})\,dV + \delta\int \mathbf{E}\cdot\mathbf{I}\,dV \qquad (6)$$

где правая часть принимается за энергию по определению [6].

Прибавляя к средней и правой частям члены

$$-\int n_j c^{ikj}H_i\delta E_k dS + \int n_j c^{jik}E_i\delta H_k dS$$

получим

$$\int (q_h{}^k - n_j c^{jik}H_i)\,\delta E_k dS + \int (q_e{}^k + n_j c^{jik}E_i)\,\delta H_k dS =$$

$$= \int (D^{\cdot k} + I^k - c^{jik}\nabla_j H_i)\,\delta E_k dV + \int (B^{\cdot k} + c^{jik}\nabla_j E_i)\,\delta H_k\,dV \qquad (7)$$

При выполнении уравнений Максвелла правая часть последнего равенства равна нулю и, следовательно, при произвольных вариациях δE_k и δH_k из (7) следуют краевые условия для потоков $\mathbf{q}_h$ и $\mathbf{q}_e$. Таким образом, соотношения (6) и (7) — аналоги вариационного уравнения Лагранжа, записанного для электромагнитного поля.

Включая в рассмотрение приток тепла за счет вектора потока его $\mathbf{q}$ через поверхность S и за счет внутренних источников интенсивности r, для приращения внутренней энергии среды получим

$$dU = \delta A + \delta Э + \left(\int r\,dV\right)dt - \left(\int \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\,dS\right)dt \qquad (8)$$

Полное количество тепла, поглощенное телом за время dt:

$$\delta Q = \left(-\int \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\,dS + \int r\,dV + \int \mathbf{E}\cdot\mathbf{I}\,dV + \int W^{\cdot}dV\right)dt$$

где $W^{\cdot}$ — скорость образования тепла за счет перехода в тепло механической энергии и энергии взаимодействия электромагнитных и механических полей. Используя теорему Остроградского — Гаусса для скорости $s^{\cdot}$ приращения энтропии в единице объема, получим (T — абсолютная температура)

$$Ts^{\cdot} = -\nabla_i q^i + r + \sigma, \quad \sigma = E\cdot I + W^{\cdot} \qquad (9)$$

В силу $q_i \nabla^i T \leqslant 0$ и $\sigma \geqslant 0$ для необратимых процессов из (9) следует неравенство Клазиуса — Дюгема

$$s^{\cdot} + \nabla_i (q^{\cdot}/T) - r/T \geqslant 0$$

Вводя свободную энергию $F = u - Ts$, из (8) получим

$$F^{\cdot} = t^{ik}\varepsilon_{ik}^{\cdot} + \mu^{ik}\xi_{ik}^{\cdot} + \nu^i\gamma_i^{\cdot} + E^iD_i^{\cdot} + H^iB_i^{\cdot} - sT^{\cdot} - W^{\cdot}$$
$$W^{\cdot} = \sum W_\chi{}^A\chi_A^{\cdot}$$

где χ_A — дополнительные параметры процесса с обобщенным тензорным индексом A, $W_\chi{}^A$ — соответствующие им обобщенные силы.

Дальнейшие построения зависят от выбора параметров χ_A и функций $W_\chi{}^A$. Если, например, $\varepsilon_{ij(n)}$, $\xi_{ij(n)}$, $\gamma_{i(n)}$ — необратимые составляющие деформаций, на которых t_{ik}, μ_{ik}, ν_i совершают рассеиваемую в виде тепла работу с мощностями

$$t^{ij}\dot{\varepsilon}_{ij(n)} \geqslant 0, \quad \mu^{ij}\dot{\xi}_{ij(n)} \geqslant 0, \quad \nu^i\dot{\gamma}_{i(n)} \geqslant 0$$

то при обозначениях

$$\dot{\varepsilon}_{ij(e)} = \varepsilon_{ij}^{\cdot} - \dot{\varepsilon}_{ij(n)}, \quad \dot{\xi}_{ij(e)} = \xi_{ij}^{\cdot} - \dot{\xi}_{ij(n)}, \quad \dot{\gamma}_{i(e)} = \gamma_i^{\cdot} - \dot{\gamma}_{i(n)} \tag{10}$$

из выражения для $F^{\cdot}$ получим

$$t^{ij} = \partial F/\partial\varepsilon_{ij(e)}, \quad \mu^{ij} = \partial F/\partial\xi_{ij(e)}, \quad \nu^j = \partial F/\partial\gamma_{j(e)} \tag{11}$$
$$E^k = \partial F/\partial D_k, \quad H^k = \partial F/\partial B_k, \quad s = -\partial F/\partial T$$

Очевидно, что $\dot{\varepsilon}_{ij(e)}$, $\dot{\xi}_{ij(e)}$, $\dot{\gamma}_{i(e)}$ — скорости прирастания упругих (локально обратимых) деформаций, а первые три группы равенств (11) представляют собой обобщения известных в теории упругости формул Грина на случай неупругих деформаций. Аналогичные обобщения возможны и для групп формул (11) для E_k и H_k, если допустить возможность существования необратимых частей приращений величин D_i и B_i. Для $\chi_A^{\cdot}$ следует ввести эволюционные уравнения [7]. Заменив в (9) $s^{\cdot}$ его выражением

$$s^{\cdot} = -d\,(\partial F/\partial T)/dt$$

следующим из (11), получим уравнение для потока тепла.

Далее будем считать $I = 0$, что имеет место в диэлектриках, и положим, что процесс деформирования обратим на рассматриваемом интервале изменения параметров процесса.

Для кристаллов класса ($6mm$) [8] с одной осью механической и электрической симметрии, за которую примем ось x_3 декартовой системы координат $x_1x_2x_3$, в число основных параметров процесса входят: скаляры ε_{33}, ξ_{33}, D_3, B_3, γ_3, T; векторы $\varepsilon_{\alpha 3}$, $\xi_{\alpha 3}$, D_α, B_α, γ_α, тензоры $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\xi_{\alpha\beta}$ (α, $\beta = 1, 2$).

Введем ограничения. Пусть процесс изотермичен и влияние магнитного поля мало. Последнее наблюдается в диэлектриках. Кроме того, примем, что $\gamma_3 \simeq 0$, $\gamma_\alpha \simeq 0$ (аналогично гипотезам Кирхгофа в теории тонких плит). В этом случае величины ν^i определяются из условий (5) после решения уравнения (4), которые сводятся к трем уравнениям с тремя искомыми функциями $u_i\,(x_k, t)$. Кроме того, примем, что $W^{\cdot} = 0$. При этих ограничениях аргументами функции F будут

$$\varepsilon_{33}, \xi_{33}, D_3; \quad \varepsilon_{\alpha 3}\varepsilon^{\alpha 3}, \quad \xi_{\alpha 3}\xi^{\alpha 3}, \quad D_\alpha D^\alpha; \quad \varepsilon^{\alpha}_{\alpha\cdot}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon^{\alpha\beta}, \quad \varepsilon_{3\alpha}\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta 3};$$
$$\xi^{\alpha}_{\alpha\cdot}, \quad \xi_{\alpha\beta}\xi^{\alpha\beta}, \quad \xi_{\alpha 3}\xi^{\alpha\beta}\xi_{\beta 3} \tag{12}$$

и смешанные (совместные) инварианты

$$\varepsilon_{3\alpha}D^{\alpha},\quad \xi_{3\alpha}D^{\alpha},\quad \xi_{\alpha 3}\varepsilon^{\alpha 3},\quad \xi_{\alpha\beta}\varepsilon^{\alpha\beta},\quad \varepsilon_{3\alpha}\varepsilon^{\alpha\beta}\xi_{\beta 3},\quad \xi_{3\alpha}\xi^{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta 3},\ldots \tag{13}$$

которые характеризуют взаимную ориентацию входящих в них тензоров и векторов. Из смешанных инвариантов (13) в число аргументов функции F может быть включена лишь часть из них в пределах выполнения условия независимости всей совокупности аргументов из числа (12) и (13). Например, совокупность компонент ε_{ik}, ξ_{ik}, D_i содержит пятнадцать параметров. Поэтому к двенадцати базовым аргументам (12) можно дополнительно включить не более трех инвариантов из (13), тогда как остальные численно будут зависимы от выбранных ранее независимых пятнадцати.

Определяющие соотношения (11) и введенная система аргументов (12), (13), которая, естественно, допускает обобщение на кристаллы с меньшей симметрией, дают возможность построить при конкретизации достаточно общие формы связи между полями с учетом физической нелинейности и влияния температуры.

Чтобы показать возможность в пределах построенных соотношений описать эффект Мида, введем ряд упрощающих предположений. Пусть поля ε_{ik} и ξ_{ik} слабо связаны. Тогда из инвариантов (13) следует сохранить лишь два первых. С учетом сказанного и сохраняя в разложении для F по степеням основных параметров лишь вторые степени, с учетом ненапряженности исходного состояния определяющие соотношения (11) получим в виде

$$t_{11} = c_{11}\varepsilon_{11} + c_{12}\varepsilon_{22} + c_{13}\varepsilon_{33} - e_{31}D_3,\quad t_{22} = c_{12}\varepsilon_{11} + c_{11}\varepsilon_{22} + c_{13}\varepsilon_{33} - {}$$
$$- e_{31}D_3,\quad t_{33} = c_{13}\varepsilon_{11} + c_{13}\varepsilon_{22} + c_{33}\varepsilon_{33} - e_{33}D_3$$
$$t_{13} = 2c_{44}\varepsilon_{13} - e_{15}D_1,\quad t_{23} = 2c_{44}\varepsilon_{23} - e_{15}D_2$$
$$t_{12} = 2c_{66}\varepsilon_{12} = (c_{11} - c_{22})\varepsilon_{12}$$
$$E_1 = -e_{15}\varepsilon_{13} - d_{15}\xi_{13} + \lambda_1 D_1,\quad E_2 = -e_{15}\varepsilon_{23} - d_{15}\xi_{23} + \lambda_1 D_1,$$
$$E_3 = -e_{31}\varepsilon_{11} - e_{31}\varepsilon_{22} - e_{33}\varepsilon_{33} - f_{31}(\xi_{11} + \xi_{22}) - f_{33}\xi_{33} + \lambda_3 D_3 \tag{14}$$

(соотношения для μ_{ik} получаются из соотношений для t_{ik} при замене ε_{ik}, c_{ik}, e_{ik} соответственно на ξ_{ik}, d_{ik}, f_{ik}).

Соотношения для t_{ik}, E_i без учета членов с ξ_{ik} повторяют обычно используемые ([8—11] и др.).

Для кинематических характеристик имеем (невыписанные соотношения получаются круговой перестановкой индексов 1, 2, 3)

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1},\quad 2\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$
$$\xi_{11} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right),\quad 2\xi_{12} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)$$

Рассмотрим поляризованный в направлении оси x_3 пьезокерамический элемент толщины $2h$ по оси x_1, на который действует внешнее электростатическое поле с вектором напряженности $\mathbf{E} = E_1\mathbf{e}_1$. При этом во всем кристалле $t_{11} = t_{22} = t_{33} = 0$, $D_3 = D_2 = 0$ и, следовательно, $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 0$. Так как под действием поля E_1 на диполи, ориентированные по оси x_3, действуют лишь дополнительные моменты $\mu_2 = \alpha E_1$, имеем $\varepsilon_{12} = 0$, $\varepsilon_{23} = 0$, $2\varepsilon_{13} = \partial u_3/\partial x_1$ при $u_1 = 0$, $u_3 = u_3(x_1)$. Кроме того, $\xi_{11} = \xi_{22} = \xi_{33} = 0$, $2\xi_{12} = -\partial^2 u_3/\partial x_1{}^2$. Наряду с этим

$$t_{13} = c_{44}dw/dx - e_{15}D_1,\quad \mu_{13} = -D_1 d_{15},\quad \mu_{23} = 0$$
$$\mu_{12} = -{}^1/_2\,(d_{11} - d_{22})d^2w/dx^2\quad (w = u_3,\ x = x_1)$$

Уравнение (4) при $k = 3$ запишется в виде

$$2d^2w/dx^2 - (d_{11} - d_{22})d^4w/dx^4 + \alpha dE_1/dx = 0 \tag{15}$$

Кроме того, согласно (14), имеем

$$2E_1 = -e_{15}dw/dx + 2\lambda_1 D_1 \tag{16}$$

В рассматриваемом поляризованном кристалле под действием внешнего электрического поля E_{1e} появляются некомпенсированные заряды на границах $x = \pm h$, тогда как внутри плотность зарядов равна нулю. Отсюда в силу уравнения Максвелла для дивергенции индукции следует, что $D_{1d} = \text{const}$ внутри диэлектрика при $-h < x < h$. Исключая из уравнений (15) и (16) напряженность E_{1d} электрического поля в диэлектрике, получим однородное уравнение, решение которого

$$w(x) = A \operatorname{sh} \omega x + B \operatorname{ch} \omega x + Cx + D$$
$$\omega^2 = (d_{11} - d_{22})/(2c_{11} - \alpha e_{15})$$

В силу условий задачи функция $w(x)$ кососимметрична по x и, следовательно, $B = D = 0$. На границах $x = \pm h$ имеем $t_{13} = 0$, а исключение жесткого вращения условием $dw/dx = 0$ при $x = 0$ дает

$$C = -\omega A, \quad A = e_{15}E_1/[c_{44}\omega(\operatorname{ch}\omega h - 1)] \tag{17}$$

Так как при переходе через границу диэлектрика индукция D_1 должна сохранять свое значение, а в вакууме $D_{1e} = E_{1e}$ и в то же время в диэлектрике наряду с (16) должно быть $D_{1d} = E_{1d} + 4\pi P$, где P — поляризация, которая в рассматриваемом случае, согласно (16), представлена членом с dw/dx, то $\lambda_1 = 1$. Таким образом, в диэлектрике электрическое поле дается формулой

$$E_{1d} = E_1 - e_{15}A\omega(\operatorname{ch}\omega x - 1)/2$$

где A определяется согласно второму равенству (17). Таким образом, электрическое поле внутри диэлектрика оказалось нелинейно переменным, что приводит к объяснению эффекта Мида. При $E_1 = 0$, $E_2 = 0$, $E_3 \neq 0$ этот эффект в рассматриваемого типа кристаллах наблюдаться не должен.

При построении нелинейной теории в число аргументов функции F в общем случае следует включить инварианты (12), (13). Учет нелинейности, связанной с рассеянием энергии, обеспечивает соответствующая форма задания функции или функционала $W^{\bullet}$, в котором есть возможность учесть и рассеяние собственно энергии электромагнитного поля в его взаимодействии со средой с построением, например, моделей типа Максвелла, Фойгта, Больцмана — Вольтерры и др.

Для описания эффекта Мида в кристаллах, изначально неполяризованных, но поляризуемых за счет появления внешнего электрического поля, в качестве аргумента функции F в (11) следует ввести тензор $\nabla_i D_j$ и пересмотреть систему определяющих соотношений (14) путем расширения системы инвариантов (12), (13).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mead C. A.* Electron transport in thin insulating films // Proc. Intern. Symp. on Basis Problem in thin Film Physics. Göttingen: Vandenhoek and Ruprecht, 1966. P. 674—678.
2. *Mindlin R. D.* Polarization gradient in elastic dielectrics // Intern. J. Solids and Stract. 1968. V. 4. № 6. P. 637—642.
3. *Mindlin R. D.* Continuum and lattice theories of influence of electromechanical

coupling on capacitance of thin dielectric films // Intern. J. Solids and Stract. 1969. V. 5. № 11. P. 1197—1208.
4. *Седов Л. И., Цыпкин А. Г.* О построении моделей сплошных сред, взаимодействующих с электромагнитным полем // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 3. С. 387—400.
5. *Желнорович В. А.* Об уравнениях для жидкостей с внутренним магнитным и механическим моментами // Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. № 5. С. 174—177.
6. *Ильюшин А. А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1978. 287 с.
7. *Коларов Д., Балтов А., Бончева Н.* Механика пластических сред. М.: Мир, 1979. 302 с.
8. *Берминкур Д., Керран Д., Шаффе Г.* Пьезокерамические и пьезомагнитные материалы // Физическая акустика. Т. 1. Ч. А. Методы и приборы ультразвуковых исследований. М.: Мир, 1966. 204—326 с.
9. *Новацкий В.* Электромагнитные эффекты в твердых телах. М.: Мир, 1986. 159 с.
10. *Гетман И. П., Устинов Ю. А.* К теории неоднородных электроупругих плит // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 5. С. 923—932.
11. *Гетман И. П., Рябов А. П., Устинов Ю. А.* О возможностях метода осреднения в задаче о распространении волн в электромагнитоупругом слое с периодической неоднородностью по толщине // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 3. С. 118—124.

Казань

Поступила в редакцию
24.III.1988