

УДК 539.375 + 550.348

© 1989

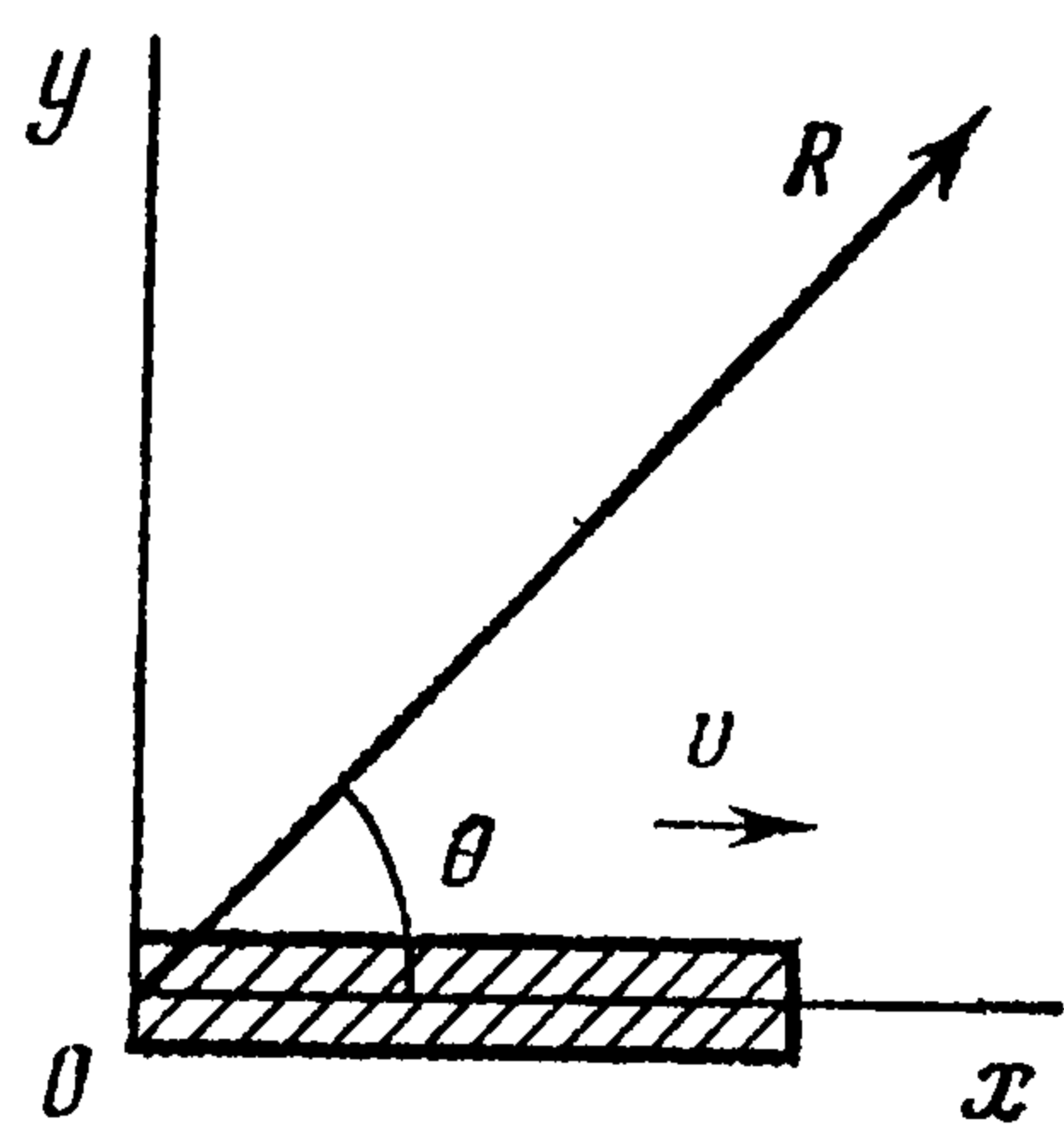
А. С. Быковцев, Д. Б. Крамаровский

## НЕСТАЦИОНАРНОЕ СВЕРХЗВУКОВОЕ ДВИЖЕНИЕ СЛОЖНОГО РАЗРЫВА

Строится точное аналитическое решение нестационарной плоской задачи о стартовой со сверхзвуковой скоростью площадки разрушения, на которой задан сложный процесс разрушения (сдвиг с отрывом). Для описания процесса разрушения, происходящего на разрыве, используется кинематический подход, при котором на всей площадке разрушения задаются величина и направление вектора подвижки на разрыве в качестве граничного условия. Для получения решения применяются преобразования Лапласа и Фурье, а для обращения решения — метод Каньяра — де Хупа. Исследуются особенности полей перемещений в упругих и ударных волнах, возникающих при сверхзвуковом движении разрыва, и дается детальный анализ полученных решений.

При исследовании процессов разрушения, происходящих со скоростями, превышающими скорости распространения упругих волн в среде, рассматривались стационарные задачи о распространении разрывов для диапазона скоростей, лежащих между скоростями волн сдвига и волн расширения [1—3], а также задачи о сверхзвуковом расклинивании упругой и упругопластической среды [4—7]. Несмотря на значительное число работ, посвященных динамике разрывов, вопрос о полях перемещений, возникающих при нестационарно распространяющемся со сверхзвуковой скоростью разрыве, практически не исследован. Поэтому основная цель данной работы — получение и анализ волновых полей для стартового со сверхзвуковой скоростью дислокационного разрыва. Анализ волновых полей для дозвуковых скоростей распространения дислокационных разрывов дан в работах [8—13].

**1. Постановка задачи.** Пусть в однородной упругой изотропной среде в начальный момент времени  $t = 0$  из начала декартовой системы координат  $xuz$  вдоль положительного направления оси  $x$  начинает распространяться с постоянной скоростью  $v$  обобщенный дислокационный разрыв, на котором задан постоянный скачок вектора смещений  $[U (U_x, U_y, U_z)] = B (B_x, B_y, B_z) = \text{const}$  (левый конец разрыва покоится и совпадает с осью  $z$ ). Будем считать, что разрыв стартует со сверхзвуковой скоростью, т. е.  $v > c_p > c_s$  ( $c_p$  и  $c_s$  — скорости продольной и поперечной волн), а размер разрыва вдоль оси  $z$  очень большой (плоская задача, ось  $z$  перпендикулярна плоскости фиг. 1). Начальные условия нулевые, на бесконечности среда покоится.



Фиг. 1

Обобщенный дислокационный разрыв можно представить в виде суммы сдвигового, отрывного и антиплоского сдвигового разрывов. Тогда на верхнем берегу разрыва при  $y = 0$  имеем: для сдвигового разрыва

$$U_x = 1/2 B_x H(x) H(t - xv^{-1}), \quad \sigma_{yy} = 0 \quad (1.1)$$

для отрывного разрыва

$$U_y = 1/2 B_y H(x) H(t - xv^{-1}), \quad \sigma_{xy} = 0 \quad (1.2)$$

для антиплоского сдвигового разрыва

$$U_z = 1/2 B_z H(x) H(t - xv^{-1}) \quad (1.3)$$

где  $H$  — единичная функция Хевисайда. На нижнем берегу разрыва смещения имеют такую же величину, но противоположного знака.

Задача определения волнового поля, генерируемого стартовым со сверхзвуковой скоростью дислокационным разрывом, сводится к решению (при заданных граничных условиях (1.1)–(1.3) и нулевых начальных условиях) системы уравнений для потенциалов  $\varphi$  и  $\psi$ , а также для компоненты  $U_z$ , которые имеют вид

$$\varphi_{,xx} + \varphi_{,yy} = c_p^{-2} \varphi'', \quad \psi_{,xx} + \psi_{,yy} = c_s^{-2} \psi'', \quad U_{z,xx} + U_{z,yy} = c_s^{-2} U_z'' \quad (1.4)$$

где запятая перед нижним индексом означает производную по соответствующей координате, а точкой обозначается производная по времени.

Потенциалы  $\varphi$  и  $\psi$  связаны с компонентами вектора смещения соотношениями

$$U_x = \varphi_{,x} + \psi_{,y}, \quad U_y = \varphi_{,y} - \psi_{,x} \quad (1.5)$$

Компоненты тензора напряжений определяются следующим образом:

$$\sigma_{ij} = \lambda U_{k,k} \delta_{ij} + \mu (U_{i,j} + U_{j,i}) \quad (1.6)$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера,  $\lambda$  и  $\mu$  — постоянные Ламе.

**2. Построение решения.** Решение поставленной задачи получим, применяя преобразования Лапласа и Фурье:

$$f_L(x, y, k) = \int_0^{\infty} f(x, y, t) \exp(-kt) dt \quad (2.1)$$

$$f_F(\xi, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, t) \exp(-i\xi x) dx$$

и метод Каньяра — де Хупа для обращения решения.

Применяя преобразования (2.1) к выражениям (1.4) и (1.5), получим

$$\begin{aligned} \varphi_{LF} &= C \exp(-yn_p), \quad \psi_{LF} = C_1 \exp(-yn_s) \\ U_{xLF} &= i\xi C \exp(-yn_p) - C_1 n_s \exp(-yn_s) \\ U_{yLF} &= -C n_p \exp(-yn_p) - i\xi C_1 \exp(-yn_s) \\ U_{zLF} &= C_2 \exp(-yn_s); \quad n_{p,s}^2 = k^2 c_{p,s}^{-2} + \xi^2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Применяя преобразования (2.1) поочередно к выражениям (1.1)–(1.3) и учитывая (2.2), получаем системы линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных постоянных  $C, C_1, C_2$ . Из этих систем находим:

для сдвигового разрыва

$$C = A_1 B_x \cdot 2i\xi, \quad C_1 = -A_1 B_x (k^2 c_s^{-2} + 2\xi^2) n_s^{-1}$$

для отрывного разрыва

$$C = -A_1 B_y (k^2 c_s^{-2} + 2\xi^2) n_p^{-1}, \quad C_1 = -A_1 B_y \cdot 2i\xi$$

$$A_1 = c_s^2 [2k^3 \sqrt{2\pi} (kv^{-1} + i\xi)]^{-1}$$

для антиплоского сдвигового разрыва

$$C_2 = B_z [2] \sqrt{2\pi} k (kv^{-1} + i\xi)^{-1}$$

Подставляя найденные значения  $C, C_1, C_2$  в (2.2), после замены переменных  $\xi = -ikPc_p^{-1}$  и применения обратного преобразования Фурье получаем

$$U_{jL}^{p,s} = -\frac{i}{4\pi k \beta^2} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{F_j^{p,s} dP}{P + \gamma} \exp[kc_p^{-1} (Px - ym_{p,s})] \quad (2.3)$$

$$j = x, y, z, \quad m_{p,s}^2 = \beta_{p,s}^2 - P^2, \quad \gamma = c_p v^{-1}, \quad \beta_p = 1, \quad \beta_s = \beta = c_p c_s^{-1}$$

для сдвигового разрыва

$$F_x^p = 2B_x P^2, \quad F_x^s = B_x (\beta^2 - 2P^2)$$

$$F_y^p = -2B_x P m_p, \quad F_y^s = B_x P (\beta^2 - 2P^2) m_s^{-1}$$

для отрывного разрыва

$$F_x^p = -B_y P (\beta^2 - 2P^2) m_p^{-1}, \quad F_x^s = 2B_y P m_s$$

$$F_y^p = B_y (\beta^2 - 2P^2), \quad F_y^s = 2B_y P^2$$

для антиплоского сдвигового разрыва  $F_z^s = B_z \beta^2$ , остальные значения  $F_j^{p,s}$  равны нулю.

Выражение (2.3) во временную область обращается методом Каньяра [14]. Определим контур Каньяра следующим образом:

$$t = - (Px - y m_{p,s}) c_p^{-1}$$

Тогда получим

$$P = -\tau \cos \theta \pm iT_{p,s} \sin \theta, \quad m_{p,s} = \tau \sin \theta \pm iT_{p,s} \cos \theta \quad (2.4)$$

$$T_{p,s}^2 = \tau^2 - \beta_{p,s}^2, \quad \tau = t c_p R^{-1}, \quad R^2 = x^2 + y^2, \quad \operatorname{tg} \theta = y/x$$

В комплексной плоскости  $P$  первое из соотношений (2.4) определяет ветвь гиперболы при  $\tau > \beta_{p,s}$  (фиг. 2). Части контура  $\Gamma_{p,s}^+$  соответствует знак плюс в выражениях (2.4), а  $\Gamma_{p,s}^-$  — минус. При  $\tau < \beta_{p,s}$  контур Каньяра совпадает с осью  $\operatorname{Re} P$  (на фиг. 2 эта часть контура не показана).

Перейдем от интегрирования по мнимой оси к интегрированию по замкнутому контуру (фиг. 2). Особенности подынтегрального выражения в (2.3) — точки ветвления  $P = \pm \beta_{p,s}$  и полюс  $P = -\gamma$ . Точки ветвления лежат вне контура Каньяра. Положение же полюса  $P = -\gamma$  ( $\gamma = c_p v^{-1}$ ) определяется величиной скорости распространения разрыва. Из первого соотношения (2.4) следует, что при дозвуковых значениях скорости  $v$  полюс лежит вне контура Каньяра; при сверхзвуковых значениях  $v$  полюс лежит внутри контура для точек с координатами

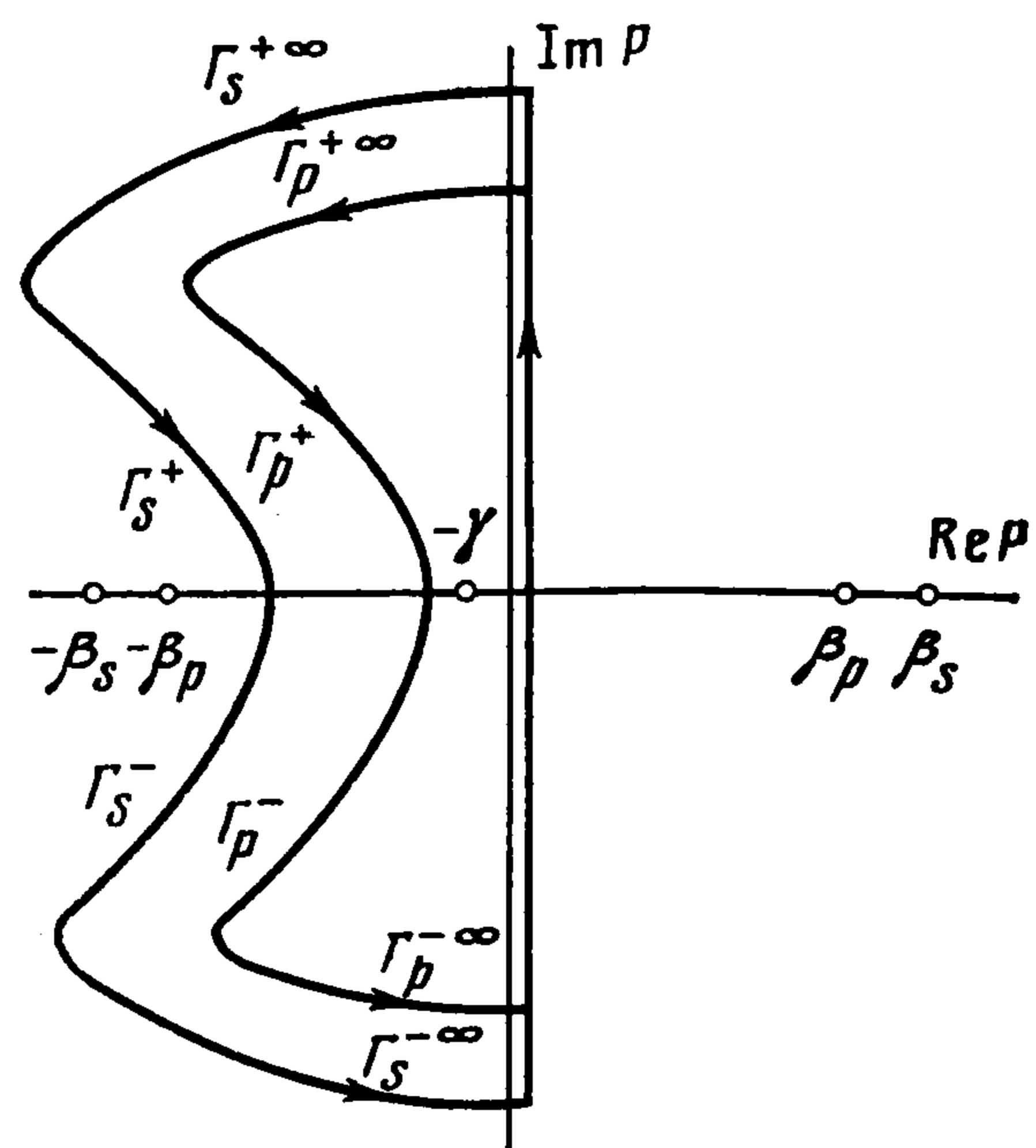
$$x > \pm y \gamma / \sqrt{\beta_{p,s}^2 - \gamma^2} = x_{p,s}$$

Используя теорему о вычетах и учитывая, что интегралы вдоль дуг  $\Gamma^\infty$  равны нулю по лемме Жордана, а также тот факт, что подынтегральное выражение в (2.3) имеет четную действительную и нечетную мнимую части, приходим к соотношению ( $D_{jL}^{p,s}$  — вычет в полюсе  $P = -\gamma$ )

$$U_{jL}^{p,s} = k^{-1} M_{jL}^{p,s} + D_{jL}^{p,s} \quad (2.5)$$

$$M_{jL}^{p,s} = \frac{c_p}{2\pi\beta^2 R} \operatorname{Re} \left[ \int_{Rc_p^{-1}\beta_{p,s}}^{\infty} \frac{F_j^{p,s} m_{p,s}}{(P + \gamma) T_{p,s}} \exp(-kt) dt \right]$$

$$D_{jL}^{p,s} = 1/2 k^{-1} \beta^{-2} F_j^{p,s} \exp [k c_p^{-1} (-\gamma x - y m_{p,s})] H(x - x_{p,s})$$



Фиг. 2

причем в величинах  $F_j^{p,s}$  и  $m_{p,s}$ , входящих в последнее выражение (2.5),  $P$  заменяется на  $-\gamma$ , а само это выражение является табличным для преобразования Лапласа. Выражение  $M_{jL}^{p,s}$  представляет собой прямое преобразование Лапласа от подынтегральной функции, стоящей при экспоненте.

Учитывая свойства преобразования Лапласа [15], получаем

$$U_j^{p,s} = \int_0^t M_j^{p,s} dt + D_j^{p,s} \quad (2.6)$$

$$M_j^{p,s} = \frac{c_p}{2\pi\beta^2 R} \operatorname{Re} \left[ \frac{F_j^{p,s} m_{p,s}}{(P + \gamma) T_{p,s}} \right] H(\tau - \beta_{p,s})$$

$$D_j^{p,s} = 1/2 \beta^{-2} F_j^{p,s} H(t - t_{p,s}) H(x - x_{p,s})$$

$$t_{p,s} = (x + y \sqrt{\beta_{p,s}^2 \gamma^{-2} - 1})/v$$

Соотношение (2.6) может быть проинтегрировано аналитически, и окончательный результат представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} U_z^s &= AB_z \beta^2 \operatorname{arc}_1^s H_s + D_z^s \\ U_x^p &= A \{ B_x [2\gamma^2 \operatorname{arc}_1^p - F_p] + B_y [(1 + \beta_3^2) \ln^p - \\ &- \beta_3^2 \gamma \gamma_p^{-1} \operatorname{arc}_2^p + f_p] \} H_p + D_x^p, \quad U_x^s = A \{ B_x [F_s - \beta_3^2 \operatorname{arc}_1^s] - \\ &- B_y [\beta_3^2 \ln^s + 2\gamma \gamma_s \operatorname{arc}_2^s + f_s] \} H_s + D_x^s \\ U_y^p &= A \{ B_x [(2\gamma^2 - 1) \ln^p + 2\gamma \gamma_p \operatorname{arc}_2^p + f_p] + \\ &+ B_y [F_p - \beta_3^2 \operatorname{arc}_1^p] \} H_p + D_y^p, \quad U_y^s = A \{ B_x [\beta_3^2 \gamma \gamma_s^{-1} \operatorname{arc}_2^s - 2\gamma^2 \ln^s - f_s] + \\ &+ B_y [2\gamma^2 \operatorname{arc}_1^s - F_s] \} H_s + D_y^s \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$F_{p,s} = (\tau \sin 2\theta + 2\gamma \sin \theta) T_{p,s}, \quad f_{p,s} = (\tau \cos 2\theta + 2\gamma \cos \theta) T_{p,s},$$

$$\ln^{p,s} = \ln \frac{T_{p,s} + \tau}{\beta_{p,s}}, \quad \operatorname{arc}_1^{p,s} = \operatorname{arctg} \frac{T_{p,s} \sin \theta}{\gamma - \tau \cos \theta}$$

$$\begin{aligned} H_{p,s} &= H(\tau - \beta_{p,s}), \quad T_{p,s} = \sqrt{\tau^2 - \beta_{p,s}^2}, \quad \tau = tc_p/R \\ \beta_3^2 &= 2\gamma^2 - \beta^2, \quad A = 1/(2\pi\beta^2) \end{aligned}$$

для дозвуковых значений  $v$

$$\gamma_{p,s} = \sqrt{\gamma^2 - \beta_{p,s}^2}, \quad D_j^{p,s} = 0 \quad (j = x, y, z) \quad (2.8)$$

$$\operatorname{arc}_2^{p,s} = 1/2 \ln \frac{(\tau \gamma_{p,s} - \gamma T_{p,s})^2 \sin^2 \theta + [\beta_{p,s}^2 - (\tau \gamma - \gamma_{p,s} T_{p,s}) \cos \theta]^2}{\beta_{p,s}^2 [(\gamma - \tau \cos \theta)^2 + (T_{p,s} \sin \theta)^2]}$$

для сверхзвуковых значений  $v$

$$\begin{aligned} \gamma_{p,s} &= \sqrt{\beta_{p,s}^2 - \gamma^2} \\ D_x^p &= \frac{B_x}{\beta^2} \gamma^2 H_{p1} + \frac{B_y}{2\beta^2} \frac{\beta^2 - 2\gamma^2}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \gamma H_{p1} \\ D_y^p &= \frac{B_x}{\beta^2} \gamma \sqrt{1 - \gamma^2} H_{p1} + \frac{B_y}{2\beta^2} (\beta^2 - 2\gamma^2) H_{p1} \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$D_x^s = \frac{B_x}{2\beta^2} (\beta^2 - 2\gamma^2) H_{s1} - \frac{B_y}{\beta^2} \gamma \sqrt{\beta^2 - \gamma^2} H_{s1}$$

$$D_y^s = -\frac{B_x}{2\beta^2} \frac{\beta^2 - 2\gamma^2}{\sqrt{\beta^2 - \gamma^2}} \gamma H_{s1} + \frac{B_y}{\beta^2} \gamma^2 H_{s1}$$

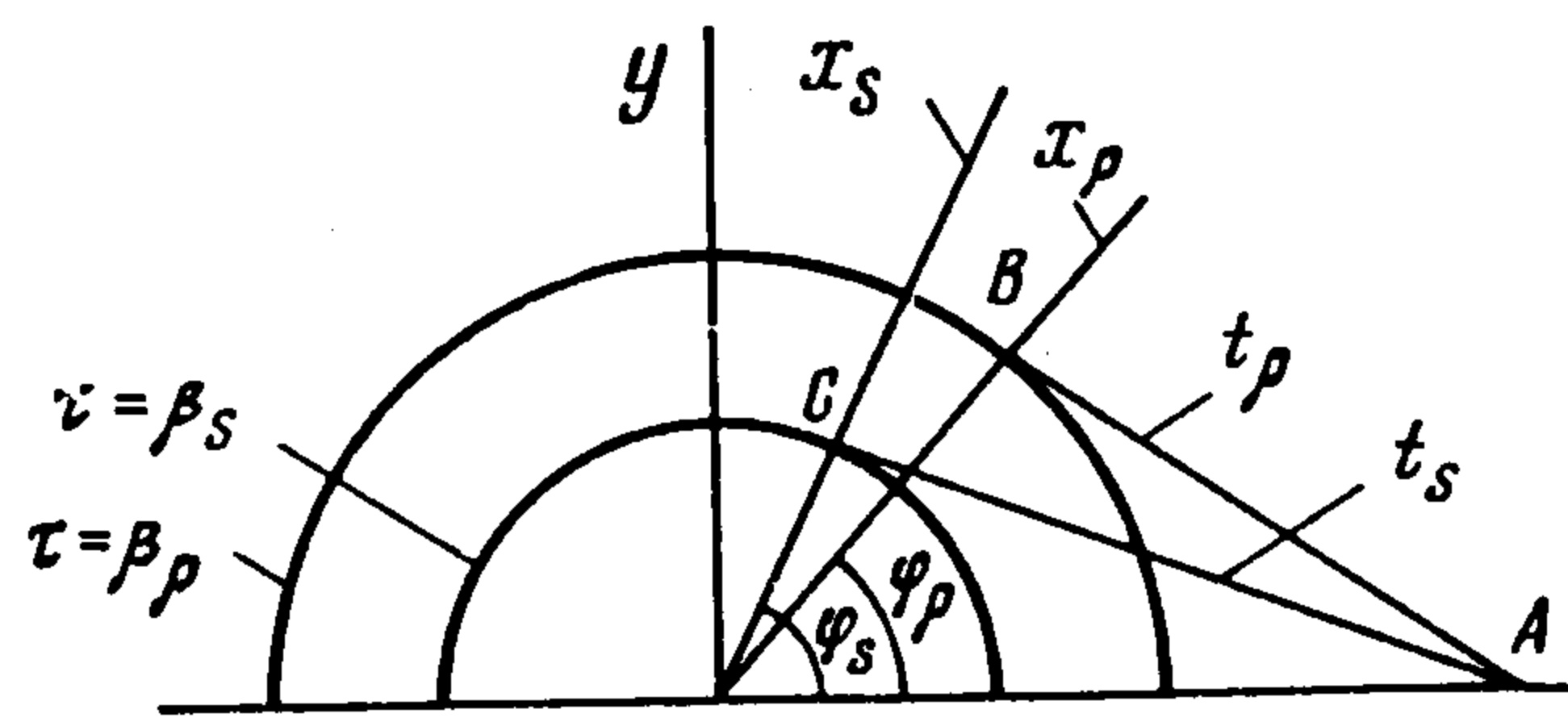
$$D_z^s = 1/2 B_z H_{s1}; \quad H_{p,s1} = H(t - t_{p,s}) H(x - x_{p,s})$$

$$\operatorname{arc}_2^{p,s} = \operatorname{arcsin} \frac{T_{p,s} \gamma_{p,s}}{\beta_{p,s} \sqrt{(\tau - \gamma \cos \theta)^2 + \gamma_{p,s}^2 \sin^2 \theta}}$$

3. Анализ результатов. Решения (2.7) для дозвуковых значений  $v$  совпадают с решениями, полученными [8] методом функционально-инвариантных решений Смирнова — Соболева. Появления в решении величин  $D_j^{p,s}$  соответствует сверхзвуковому распространению разрыва. При трансзвуковом движении разрыва ( $c_s < v < c_p$ ) для  $P$ -волн ( $S$ -волн) используется часть решения (2.7), соответствующая дозвуковому (сверхзвуковому) движению разрыва.

Область действия сверхзвукового решения определяется единичными функциями  $H(t - t_{p,s})$  и  $H(x - x_{p,s})$ , входящими в (2.6). Эта область ограничена прямыми  $t_p$ ,  $t_s$  и  $x_p$ ,  $x_s$ .

Прямые  $x_p$  и  $x_s$  составляют с осью  $x$  соответственно углы  $\varphi_p = \arccos \gamma$  и  $\varphi_s = \arccos(\gamma/\beta)$ . Поэтому общая волновая картина будет состоять из круговых областей, представляющих собой фронты продольной и поперечной волн и конусообразных областей, ограниченных прямыми  $t_p$ ,  $t_s$  и  $x_p$ ,  $x_s$ , обусловленных сверхзвуковым движением разрыва (фиг. 3).



Фиг. 3

Поверхности  $t_{p,s}$  можно рассматривать также как плоские волны, существующие в области  $x > x_{p,s}$  и распространяющиеся вдоль лучей  $x_{p,s}$ , в то время как волновые поверхности  $\tau = \beta_{p,s}$  существуют во всем пространстве.

Исследуем более подробно величины  $D_j^{p,s}$ , определяемые соотношениями (2.6). Для сдвигового разрыва эти величины равны первым слагаемым выражений для  $D_{x,y}^{p,s}$  в (2.9), для отрывного разрыва — вторым слагаемым, для антиплоского сдвигового разрыва величина  $D_z^s$  определена в (2.9). Указанные величины зависят лишь от отношения скоростей объемных волн и скорости вспарывания разрыва и не зависят от времени и координат точки наблюдения, что соответствует скачку в решении (2.7) для сверхзвуковых значений  $v$ . Область  $x > x_{p,s}$  характеризуется тем, что в точки этой части пространства приходят сначала возмущения, вызванные сверхзвуковым движением разрыва, а затем упругие объемные волны. В точки же области  $x < x_{p,s}$  (фиг. 3) приходят только упругие волны.

Направление скачка смещения для конусообразной «сверхзвуковой» поверхности (СП) в  $P$ -волнах перпендикулярно волновому коническому фронту (прямой  $AB$ , фиг. 3), а в  $S$ -волнах параллельно коническому фронту (прямой  $AC$ , фиг. 3). Для антиплоского сдвигового разрыва направление скачка смещения перпендикулярно плоскости фиг. 3, а величина скачка смещения не зависит ни от отношения скоростей объемных волн, ни от скорости вспарывания разрыва.

В реальных условиях распространяющиеся разрывы представляют собой, как правило, сложную комбинацию сдвигового и отрывного разрывов. Поэтому с точки зрения практических приложений представляет интерес анализ полей перемещений внутри конусообразной «сверхзвуковой» области в зависимости от величин отрывной и сдвиговой составляющих вектора перемещения на разрыве, а также от скорости вспарывания разрыва. Определяя для указанной области суммарную величину скачка  $D^p$  и  $D^s$  в  $P$ - и  $S$ -волнах, для сложного разрыва ( $B_x = B \cos \alpha$ ,  $B_y = B \sin \alpha$ ,  $B_z = 0$ ) получаем

$$D^p = \gamma B \beta^{-2} (\cos \alpha + \delta_p \sin \alpha) H_{p1}, \quad D^s = \gamma B \beta^{-2} (\delta_s \cos \alpha - \sin \alpha) H_{s1} \quad (3.1)$$

$$\delta_p = \frac{\beta^2 - \gamma^2}{2\gamma\sqrt{1 - \gamma^2}}, \quad \delta_s = \frac{\beta^2 - 2\gamma^2}{2\gamma\sqrt{\beta^2 - \gamma^2}}$$

Видно, что для сложного разрыва величины скачков смещений в  $P$ - и  $S$ -волнах существенным образом зависят от угла  $\alpha$  ( $\alpha = \arctg(B_y/B_x)$ ), который составляет вектор подвижки на разрыве с плоскостью разрыва (т. е. от соотношения сдвиговой и отрывной составляющих вектора перемещения на разрыве), а также от скорости вспарывания разрыва.

Рассмотрим более подробно следующие два диапазона изменения этого угла:  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$  и  $\pi/2 < \alpha < \pi$ .

При  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$  направление сдвиговой компоненты вектора перемещения на верхнем берегу разрыва совпадает с направлением вспарывания движущегося края разрыва. В этом случае скачки смещения за СП в  $P$ -волнах для чисто сдвигового и чисто отрывного разрывов направлены в одну сторону. Поэтому максимальная амплитуда смещений в  $P$ -волне для сложного разрыва при  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$  будет достигать величины

$$D_{\max}^p = 1/2 B \beta^{-2} \left[ \frac{\beta^4 - 4\gamma^2 \beta^2 + 4\gamma^2}{1 - \gamma^2} \right]^{1/2} \quad (3.2)$$

при  $\alpha = \alpha_{\max}^p = \arctg \delta_p$ .

Для СП  $S$ -волн скачки смещений параллельны коническому фронту и при  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$  направлены в разные стороны для чисто сдвигового и чисто отрывного разрывов (от  $C$  к  $A$  и от  $A$  к  $C$  соответственно, фиг. 3). Поэтому при  $\alpha = \alpha_0^s = \arctg \delta_s$  получаем  $D_0^s = 0$ , т. е. при  $\alpha = \alpha_0^s$ , несмотря на сверхзвуковое движение разрыва, СП  $S$ -волны будет отсутствовать, а излучение  $S$ -волн будет аналогичным возникающему при дозвуковом движении разрыва.

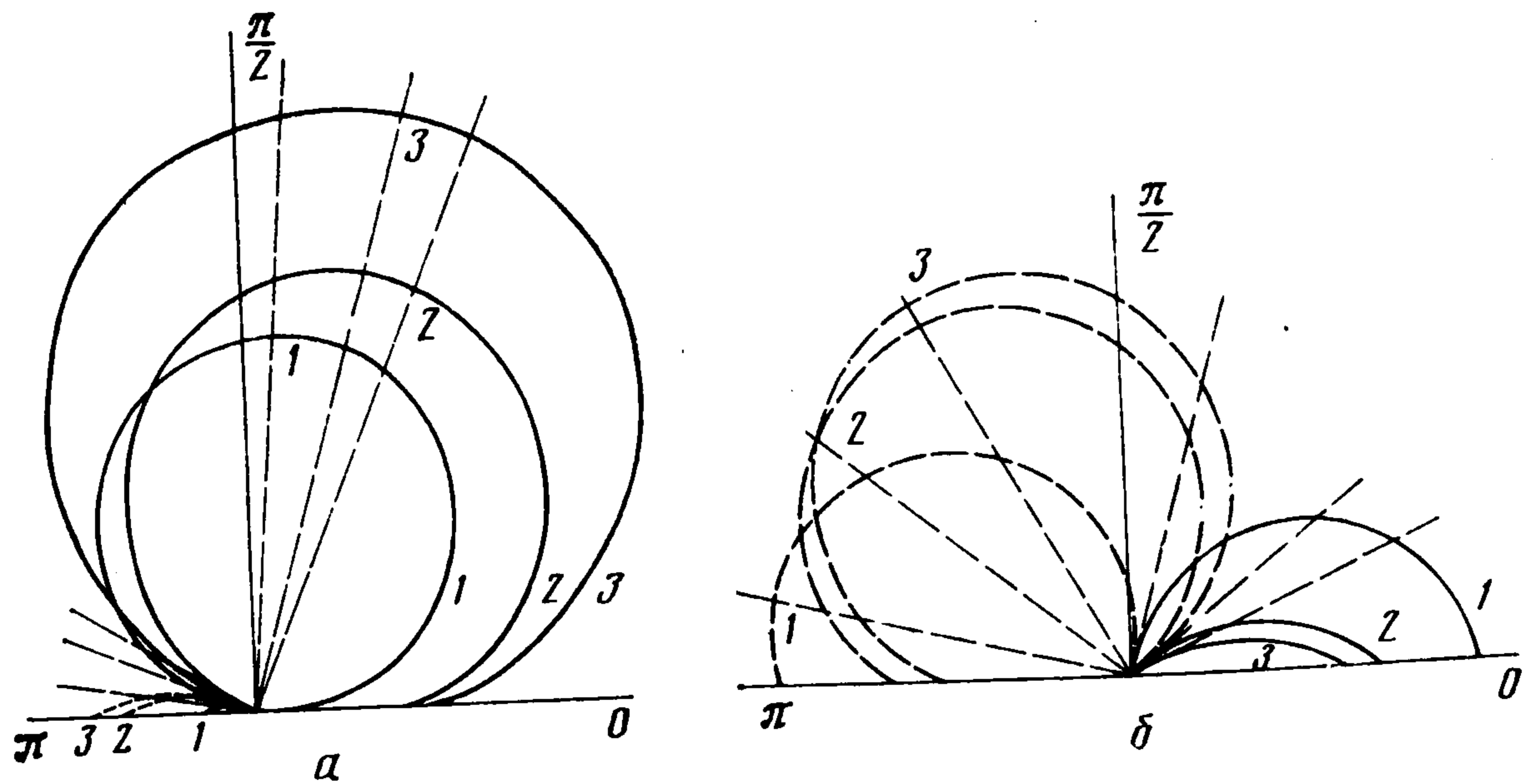
При  $\pi/2 < \alpha \leq \pi$  направление сдвиговой компоненты вектора перемещения на разрыве противоположно направлению вспарывания движущегося края разрыва. В этом случае скачки смещения за фронтом СП в  $P$ -волнах для чисто сдвигового и чисто отрывного разрывов направлены в разные стороны и при  $\alpha = \alpha_0^p = \pi/2 + \alpha_{\max}^p$  получаем  $D_0^p = 0$ , т. е. при  $\alpha = \alpha_0^p$ , несмотря на сверхзвуковое движение разрыва, будет отсутствовать СП  $P$ -волны, а волновая картина излучения  $P$ -волн будет аналогичной возникающей при дозвуковом движении разрыва.

Для СП  $S$ -волн при  $\pi/2 < \alpha \leq \pi$  скачки смещения для чисто отрывного и чисто сдвигового разрывов направлены в одну сторону. Поэтому максимальная величина смещения в  $S$ -волнах для сложного разрыва при  $\pi/2 < \alpha \leq \pi$  будет достигать величины

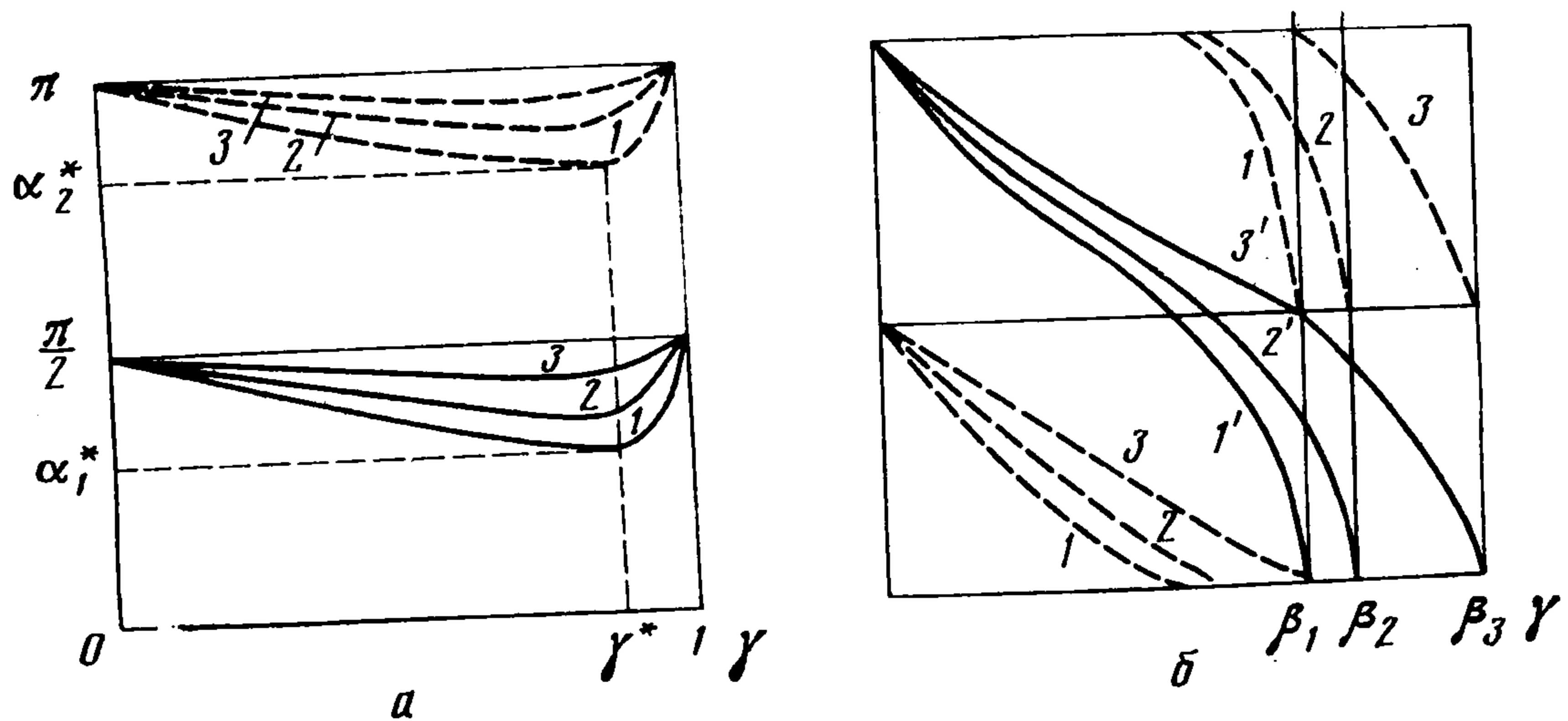
$$D_{\max}^s = 1/2 B \beta / \sqrt{\beta^2 - \gamma^2} \quad (3.3)$$

при  $\alpha = \alpha_{\max}^s = \pi/2 + \alpha_0^s$ .

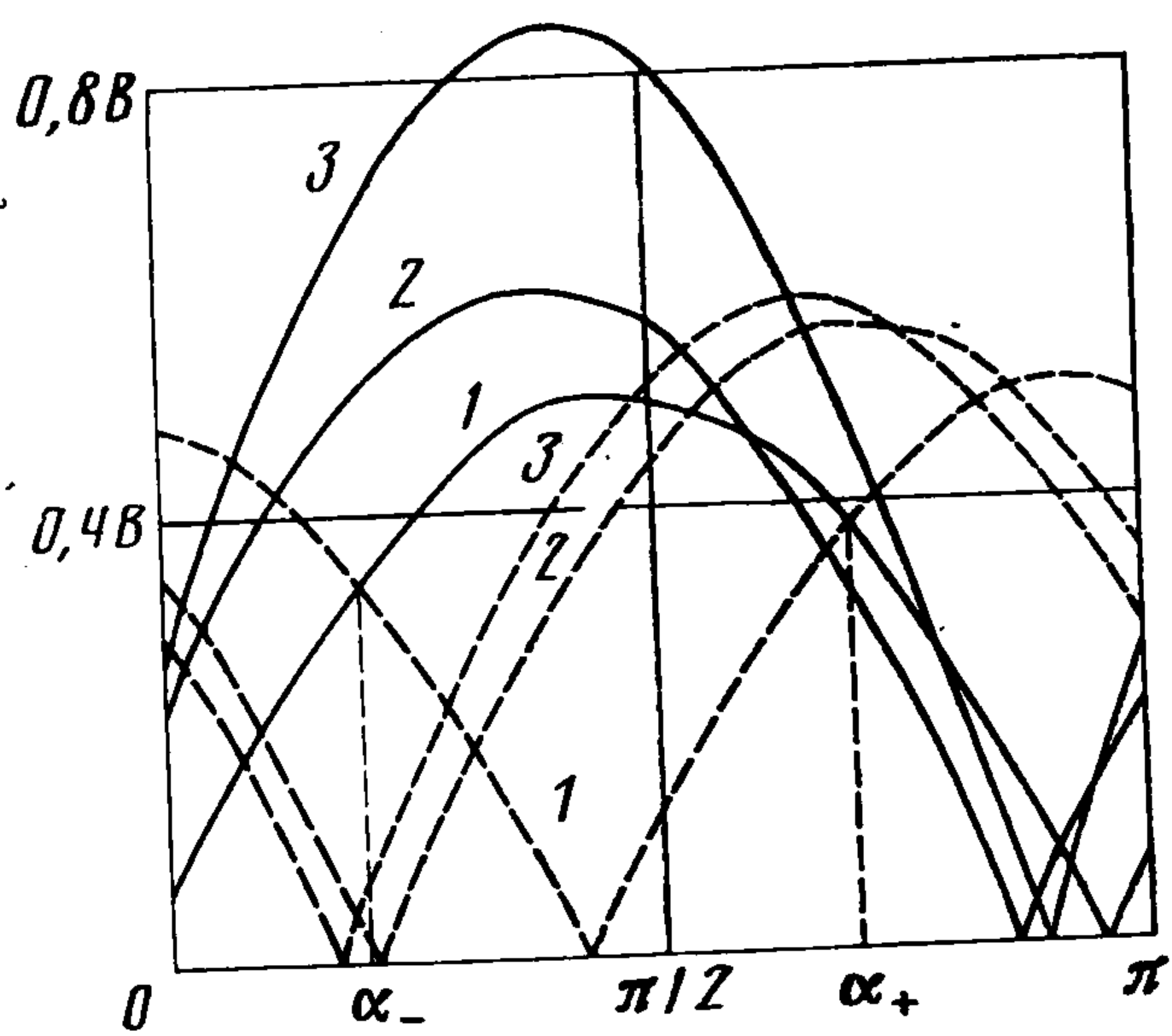
На фиг. 4, *a*, *б* в полярной системе координат приведены соответственно графики функций  $D^p$  и  $D^s$  в зависимости от вариаций угла  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq \leq \pi$ ) для различных значений скорости вспарывания разрыва (кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям  $\gamma = 0,2; 0,83; 0,95$  при  $\beta = 1,9$  (мел) и  $B = 1$ . Сплошные линии соответствуют положительным значениям  $D^{p,s}$ , штриховые — отрицательным). Значения функции  $D^p$  достигают максимумов  $D_{\max}^p = 0,5; 0,61; 0,85$  при  $\alpha_{\max}^p = 80; 60; 67^\circ$  (для кривых 1, 2, 3 соответственно). Абсолютные значения функции  $D^s$  достигают максимумов  $D_{\max}^s = 0,5; 0,53; 0,58$  при  $\alpha_{\max}^s = 165; 127; 113^\circ$  (направления,



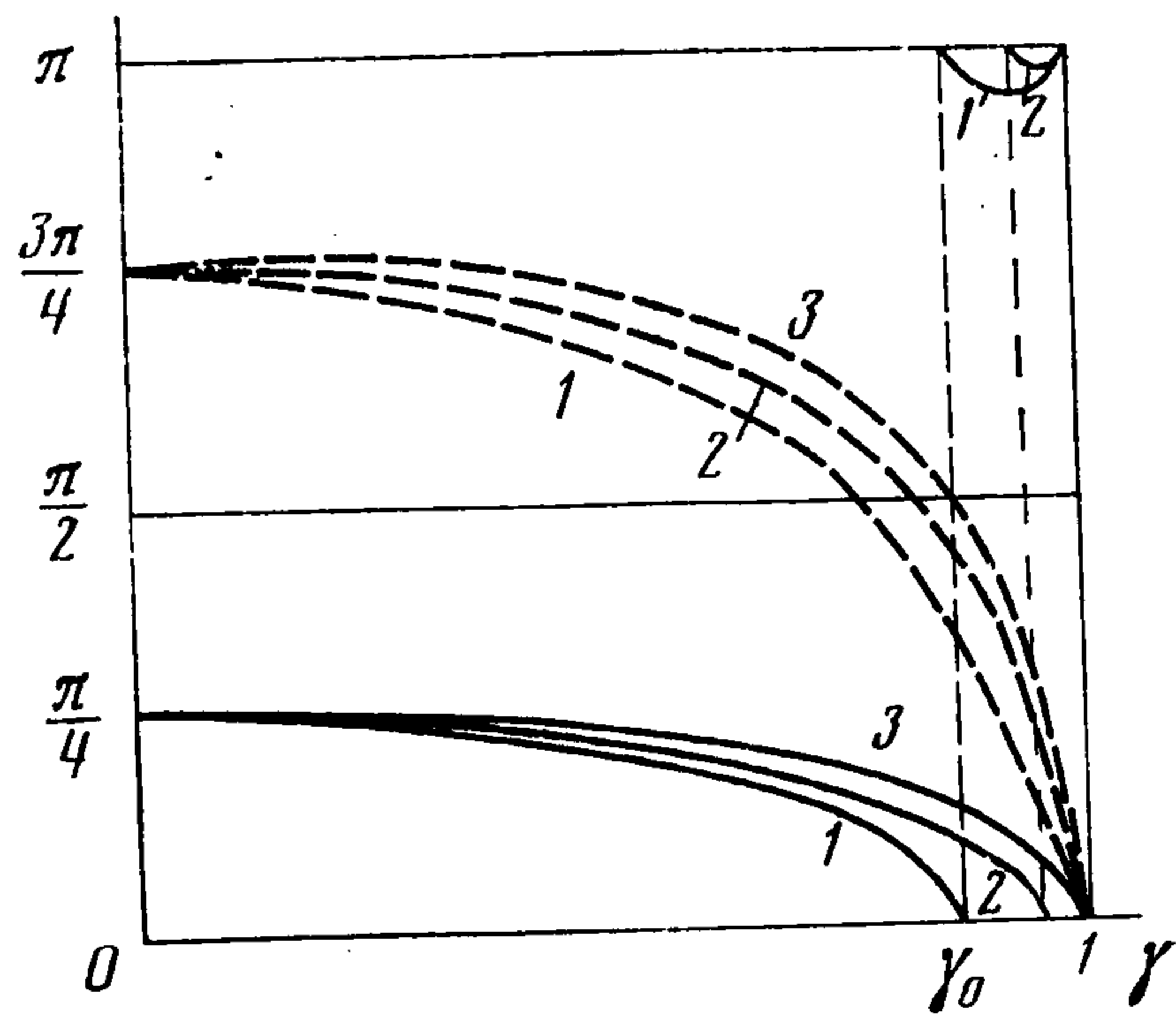
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

в которых функции  $D^{p,s}$  достигают максимумов и обращаются в ноль, на фиг. 4, а, б обозначены штриховыми отрезками).

На фиг. 5 приводятся зависимости значений углов  $\alpha$  от скорости испаривания разрыва, при которых достигается максимум (сплошные линии) и отсутствуют СП (штриховые линии) в  $P$ - (фиг. 5, а) и  $S$ - (фиг. 5, б) волнах (кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям  $\beta$ , равным 1, 7 (гранит), 1,9 (мел), 2,44 (глинистый сланец)). Для  $P$ -волн эти кривые имеют минимум при  $\gamma^* = \beta [2(\beta^2 - 1)]^{-1/2}$ , причем  $\alpha_1^* = \arctg(\beta \sqrt{\beta^2 - 2})$  и  $\alpha_2^* = \pi/2 + \alpha_1^*$ .

Аналогичные кривые для  $S$ -волн (фиг. 5, б) не имеют точек экстремумов, а значения углов, при которых достигается максимум, монотонно

изменяются от  $\pi$  до нуля при изменении  $\gamma$  от нуля до  $\beta$ . Значения же углов  $\alpha^s_0$ , при которых отсутствует скачок смещения в  $S$ -волнах, изменяются от  $\pi/2$  при  $\gamma = 0$  до нуля при  $\gamma = \beta/\sqrt{2}$  и от  $\pi$  до  $\pi/2$  при изменении  $\beta/\sqrt{2} < \gamma < \beta$ .

Из анализа диаграмм направленности сейсмического излучения в  $P$ - и  $S$ -волнах [8, 9, 11—13] для разрыва, распространяющегося со скоростью  $v < c_s < c_p$ , известно, что, как правило, абсолютная величина амплитуды смещений в  $s$ -волнах на порядок превосходит величину, амплитуды смещений в  $P$ -волнах. Для сверхзвукового движения разрыва со скоростью  $v > c_p > c_s$  порядки величин смещений за фронтом СП в  $P$ - и  $S$ -волнах совпадают.

На фиг. 6 изображены абсолютные величины амплитуд смещений  $D^p$  (сплошные линии) и  $D^s$  (штриховые линии) для сложного разрыва при различных значениях  $\gamma$  (кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям  $\gamma = 0,2; 0,83; 0,95$  при  $\beta = 1,9$ ). Из анализа фиг. 6, а также соотношений (3.1) следует, что абсолютная величина скачка смещения в  $P$ -волнах будет больше скачка смещения в  $S$ -волнах при  $\alpha > \alpha_-$  и  $\alpha < \alpha_+$ , где

$$\alpha_{\pm} = \text{arctg} [(\beta\delta_s \pm 1)/(\beta \mp \delta_p)]$$

а при  $\alpha < \alpha_-$  и  $\alpha > \alpha_+$  абсолютная величина скачка смещений в  $S$ -волнах больше величины скачка в  $P$ -волнах.

На фиг. 7 изображены зависимости изменения углов  $\alpha_-$  и  $\alpha_+$  от скорости вспарывания разрыва ( $\gamma = c_p/v$ ) при  $\beta = 1,7; 1,9; 2,44$ . Параметр  $\alpha_+$  меняется от  $3\pi/4$  до нуля при изменении  $\gamma$  от нуля до единицы. Величина угла  $\alpha_-$  для материалов со значением  $\beta > 1,926$  изменяется от  $\pi/4$  до нуля при  $0 \leq \gamma \leq 1$ , а для материалов со значением  $\beta < 1,926$  — от  $\pi/4$  до нуля при  $0 \leq \gamma \leq [1/2\beta^2(1 - (\beta^2 + 1)^{-1/2})]^{1/2} = \gamma_0$ .

При  $\gamma = \gamma_0$  в функции  $\alpha_-$  происходит скачок на величину  $\pi$  (фиг. 7).

Из соотношений (3.2) и (3.3) следует, что при  $v \rightarrow \infty$  ( $\gamma \rightarrow 0$ ) максимальная величина скачка смещений  $D_{\max}^p = B/2$  будет достигаться за фронтом СП в  $P$ -волне для чисто отрывного разрыва, т. е. при  $\alpha = \pi/2$ . В  $S$ -волне максимальная величина скачка смещений  $D_{\max}^s = B/2$  будет иметь место для чисто сдвигового разрыва, т. е. при  $\alpha = 0, \alpha = \pi, v \rightarrow \infty$ . При  $\gamma \rightarrow 1$  ( $v \rightarrow c_p$ ) и  $\gamma \rightarrow \beta$  ( $v \rightarrow c_s$ ) соответственно величины  $D_{\max}^p$  и  $D_{\max}^s$  стремятся к бесконечности, однако области, в которых они принимают очень большие значения, стягиваются в точку, так как углы  $\varphi_p = \text{arccos } \gamma$  и  $\varphi_s = \text{arccos } (\gamma/\beta)$  (фиг. 3) становятся бесконечно малыми.

Следует отметить, что построенные решения (2.7)—(2.9) получены при условии, что вектор  $\mathbf{B} = \text{const}$ , поэтому они представляют собой некоторую математическую идеализацию реальных физических процессов. Для более реального моделирования физических процессов на поверхности разрыва следует задавать вектор подвижки в виде некоторой функции, зависящей от координат и времени. На основании линейности основных уравнений решение задачи с произвольным вектором подвижки на разрыве может быть получено путем применения операции свертки к построенным решениям (2.7)—(2.9). Поэтому, рассматривая (2.7)—(2.9) как решения, полученные в обобщенных функциях, их можно эффективно использовать для построения решений ряда более общих задач.

Интересен вопрос о том, сохраняются ли выводы, сделанные на основании полученного решения, после применения к нему операции свертки. По мнению авторов, качественные эффекты, связанные с поведением диаграмм направленности сейсмического излучения на конусообразной поверхности, вызванной сверхзвуковым движением разрыва, сохраняются.

В качестве примера можно рассмотреть решение задачи, когда на разрыве задан постоянный скачок скоростей. Тогда поверхность разрыва будет иметь форму тонкого клина, а вектор подвижки  $\mathbf{V}_1$  на разрыве будет линейно зависеть от времени  $t$ . В этом случае поле скоростей будет определяться соотношениями (2.7)—(2.9), а для получения полного поля перемещений решения (2.7)—(2.9) следует проинтегрировать по времени  $t$ . Таким образом, поле перемещений в задаче о сверхзвуковом движении разрыва с постоянным скачком скоростей можно представить в виде

$$U_j^{p,s} = \int_{t_{0p,s}}^t U_{1j}^{p,s}(x, y, \tau) d\tau + D_j^{p,s}(t - t_{p,s}) \quad (3.4)$$

где  $U_{1j}^{p,s}$  — функции из соотношений (2.7), стоящие при единичных функциях  $H_{p,s}$ ;  $D_j^{p,s}$  определены в (2.7), (2.9);  $t_{0p,s}$  — времена прихода объемных  $P$ - и  $S$ -волн в точку наблюдения;  $t_{p,s}$  — времена прихода «сверхзвуковых» волн в точку наблюдения.

Анализ полученных результатов свидетельствует о том, что решение в «сверхзвуковой» области уже определяется гладкими функциями, не имеющими разрывов и линейно зависящими от времени. Характер же поведения этого решения такой же, как и решений (2.7)—(2.9), т. е. выводы, сделанные на основании анализа результатов (2.7)—(2.9), в общем сохраняются. Отличие будет заключаться в том, что для фиг. 4 и 6 необходимо указывать, в какие именно моменты времени построены эти графики.

Так, если по решению (3.4) строить графики, аналогичные приведенным на фиг. 4, то их вид будет в точности совпадать с графиками фиг. 4, если для  $P$ -волн их построить в такой момент времени  $t_1$ , что  $t_1 - t_p = 1$ , а для  $S$ -волн — в такой момент времени  $t_2$ , что  $t_2 - t_s = 1$ . Если же по решению (3.4) строить графики, аналогичные приведенным на фиг. 6, то их вид будет совпадать с графиками фиг. 6, если для  $P$ -волн их построить в момент времени  $t_3$ , а для  $S$ -волн в момент времени  $t_4$ , такие, что  $t_3 - t_p = t_4 - t_s$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Слепян Л. И., Фишков А. Л. К задаче о распространении разреза с межзвуковой скоростью // Докл. АН СССР. 1981. Т. 261. № 6. С. 1316—1319.
2. Симонов И. В. О поведении решений динамических задач в окрестности края разреза, движущегося с трансзвуковой скоростью в упругой среде // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 2. С. 109—116.
3. Симонов И. В. Трансзвуковое обтекание тонкого твердого тела упругой средой // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 1. С. 114—112.
4. Павленко А. Л., Апибян Ж. Г. Сверхзвуковое обтекание жесткого клина линейно-упругой средой // Изв. АН УзССР. Сер. техн. наук. 1969. № 2. С. 18—23.
5. Борзых А. А., Черепанов Г. П. К теории разрушения твердых тел под воздействием мощных импульсных пучков электронов // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 6. С. 1120—1128.
6. Борзых А. А. Одна пространственная автомодельная задача о сверхзвуковом расклинивании упругого тела // ПММ, 1981. Т. 45. Вып. 2. С. 348—355.
7. Быковцев Г. И., Колокольчиков А. В., Сыргунев П. Н. Автомодельные решения уравнений динамики идеального упругопластического тела при условии пластичности Треска // ПМТФ, 1984. № 6. С. 148—156.
8. Быковцев А. С. Распространение сложных разрывов с кусочно-постоянными и переменными скоростями вдоль криволинейных и ветвящихся траекторий // ПММ, 1986. Т. 50. Вып. 5. С. 804—814.
9. Bykovtsev A. S. Modelling of Fracture Processes Occurring in the Focal Zone of a Tectonic Earthquake // Proc. Intern. Conf. on Computational Mech. Berlin et al.: Springer-Verlag. 1986. V. 1. Pt 3. P. 221—226.
10. Madariaga R. The dynamic field of Haskell's rectangular dislocation fault model // Bull. Seismol. Soc. America. 1978. V. 68. № 4. P. 869—887.
11. Быковцев А. С. О волновых полях, создаваемых распространяющимися дислокационными разрывами // Экспериментальная сейсмология в Узбекистане. Ташкент: Фан, 1983. С. 171—193.
12. Bykovtsev A. S., Kramarovskiy D. B. The Displacement Field Produced by the Propagating Rectangular Rupture Plane: The Exact Three-Dimensional Solution // Proc. Intern. Conf. on Computational Mech. Berlin et al.: Springer-Verlag, 1986. V. 2. Pt 6. P. 315—320.
13. Быковцев А. С., Крамаровский Д. Б. О распространении сложной площадки разрушения: Точное трехмерное решение // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 1. С. 117—129.
14. Cagniard L. Reflection and refraction of progressive seismic waves. N. Y.: McGraw-Hill. 1962. 282 p.
15. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. Абрамовица М., Стигана И. М.: Наука, 1979: 830 с.