

УДК 539.3

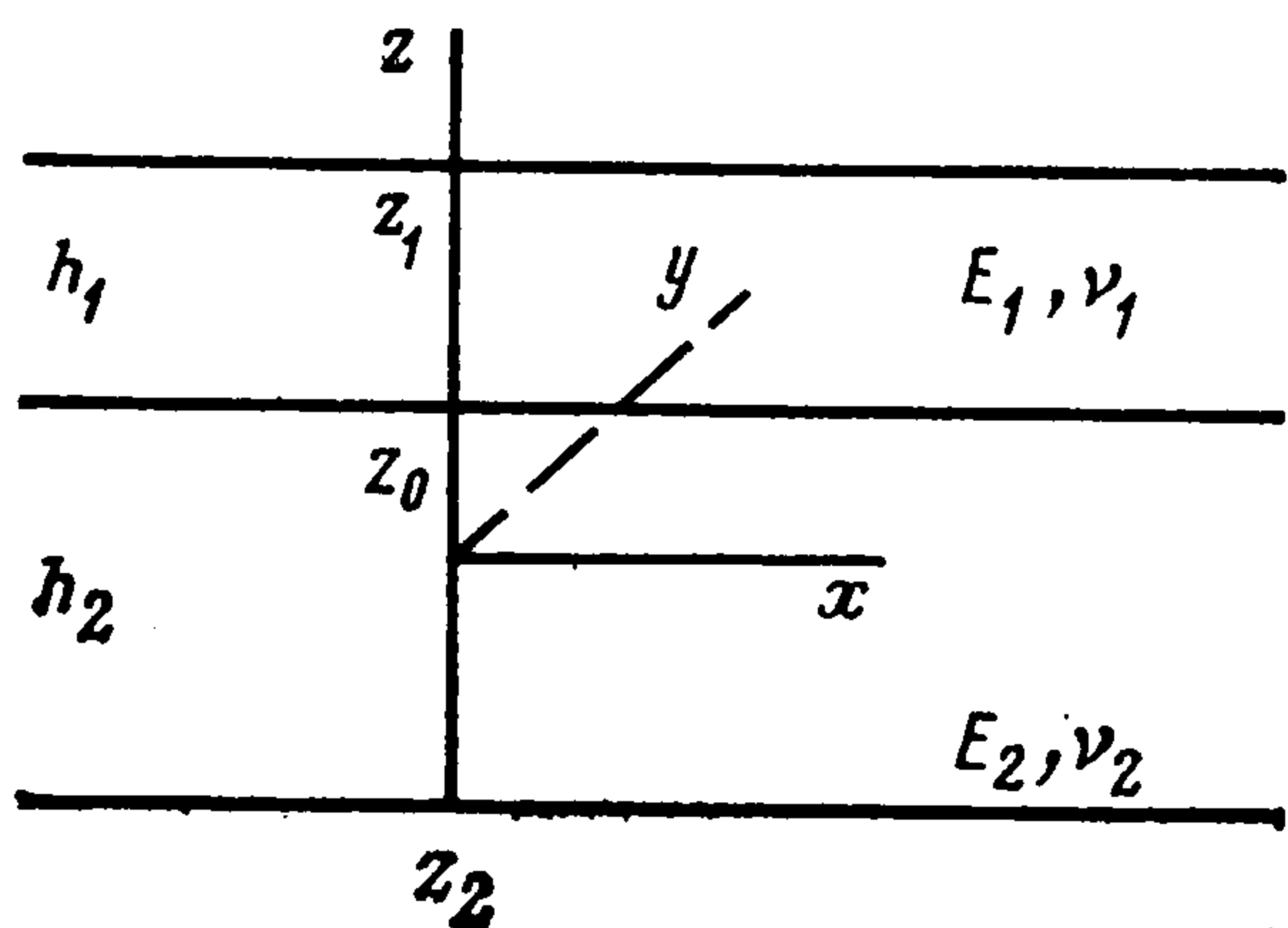
© 1989

И. В. Симонов

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ТРЕХМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТОНКИХ ДВУХСЛОЙНЫХ УПРУГИХ ПЛАСТИНОК

Согласно методу [1—3] дается вывод двумерных уравнений движения тонких двухслойных (несимметричных) упругих пластинок. Найдены осредненные жесткость на изгиб, плотность и коэффициент Пуассона, определено положение «средней» плоскости. В системе координат, привязанной к этой плоскости, система уравнений расщепляется на квазистатические уравнения для продольных движений и динамическое уравнение (обычного типа) для поперечной составляющей смещений. В отличие от [1—3] вводится только один характерный размер в продольном направлении, что является достаточным и упрощает анализ. Приводятся формулы для полного поля напряжений — напряжения, второстепенные для однородных пластинок, могут оказаться существенными при рассуждении о прочности соединения слоев.

1. Постановка задачи. Рассмотрим двухслойную пластину, занимающую конечную или безграничную (в одном или обоих направлениях) область. Обозначим h_i , ρ_i , E_i , ν_i толщины, плотности материалов и упругие



характеристики верхнего ($i = 1$) и нижнего ($i = 2$) слоев. Прямоугольную систему координат выберем, как показано на фигуре: плоскость xu параллельна плоскости пластинки, значения $z = z_0$, z_1 , z_2 фиксируют плоскость полного контакта слоев и лицевые поверхности пластинки. На этих границах поставим следующие условия:

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha z}^{(i)} &= \tau_{\alpha*}^{(i)}(\xi, \eta, \tau), \quad z = z_i \quad (\alpha = \xi, \eta, \zeta) \\ \tau_{\alpha z}^{(1)} &= \tau_{\alpha z}^{(2)}, \quad \mathbf{V}^{(1)} = \mathbf{V}^{(2)}, \quad z = z_0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $\tau_{\alpha\beta}$ и $\mathbf{V} = (v_\xi, v_\eta, v_\zeta)$ — безразмерные компоненты тензора напряжений и вектор смещений, $\tau_{\alpha*}^{(i)}$ — заданные достаточно гладкие функции продольных координат и времени τ . Использована нормировка функций и растяжение масштабов, неодинаковое по разным направлениям:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= E_i \tau_{\alpha\beta}, \quad \mathbf{u} = h\mathbf{V}, \quad 2h = h_1 + h_2 \\ (x, y) &= l(\xi, \eta), \quad z = h\zeta, \quad t = t_0\tau, \quad \varepsilon = h/l \end{aligned}$$

Здесь l — наименьший характерный линейный размер рисунка деформации в продольном направлении, а характерное время t_0 определим так:

$$t_0 = \varepsilon^{\gamma-1} c_1^{-1}, \quad c_1 = \sqrt{E_1/\rho_1}$$

где параметр γ характеризует изменяемость напряженно-деформируемого состояния во времени (ниже рассматривается приближение $\gamma = 0$).

Величина l , особенно в динамике, носит условный характер, часто может быть оценена лишь апостериори, но при асимптотическом анализе ее необходимо ввести, так как точность асимптотических уравнений оп-

ределяется лишь степенью малости отношения h/l . При этом наименьший характерный размер пластинки в продольных направлениях L в отличие от [1—3] ниже воспринимается только как верхняя граница величины l ($l \leq L$) и в анализе не участвует.

Трехмерные динамические уравнения теории упругости в безразмерных переменных принимают вид (индекс $i = 1, 2$ иногда снимается)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_\beta}{\partial \zeta^2} + A_\beta - \varepsilon^{4-2\nu} 2(1+\nu) C_i \frac{\partial^2 v_\beta}{\partial \tau^2} &= 0 \quad (\beta = \xi, \eta) \\ \frac{\partial^2 v_\zeta}{\partial \zeta^2} + A_\zeta - \varepsilon^{4-2\nu} \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{1-\nu} C_i \frac{\partial^2 v_\zeta}{\partial \tau^2} &= 0, \quad C_i = \frac{\rho_i E_1}{E_i \rho_1} \\ A_\beta &= \frac{\varepsilon}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v_\zeta}{\partial \beta \partial \zeta} + \frac{\varepsilon^2}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial \beta} \operatorname{div} \mathbf{v} + \varepsilon^2 \Delta v_\beta \\ A_\zeta &= \frac{\varepsilon}{2(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial \zeta} \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \varepsilon^2 \Delta v_\zeta \\ \mathbf{v} &= (v_\xi, v_\eta), \quad \Delta = \partial^2 / \partial \xi^2 + \partial^2 / \partial \eta^2, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = \partial v_\xi / \partial \xi + \partial v_\eta / \partial \eta \\ \tau_\beta &= \lambda_* \frac{\partial v_\zeta}{\partial \zeta} + \lambda_* \varepsilon \operatorname{div} \mathbf{v} + 2\mu_* \varepsilon \frac{\partial v_\beta}{\partial \beta}, \quad \tau_\zeta = (\lambda_* + 2\mu_*) \frac{\partial v_\zeta}{\partial \zeta} + \lambda_* \varepsilon \operatorname{div} \mathbf{v} \\ \tau_{\xi\eta} &= \mu_* \varepsilon \left(\frac{\partial v_\xi}{\partial \eta} + \frac{\partial v_\eta}{\partial \xi} \right), \quad \tau_{\beta\xi} = \mu_* \left(\frac{\partial v_\beta}{\partial \xi} + \varepsilon \frac{\partial v_\zeta}{\partial \beta} \right) \\ \lambda_* &= \nu [(1-2\nu)(1+\nu)]^{-1}, \quad \mu_* = 1/2 (1+\nu)^{-1} \end{aligned} \quad (1.2)$$

При решении системы уравнений (1.2) воспользуемся разложением искомых функций в асимптотические ряды по малому параметру ε [1—3] (суммирование от $s = 0$ до $s = \infty$)

$$\begin{aligned} v_\beta &= \varepsilon^{\kappa+1} \sum \varepsilon^s v_\beta^{(s)}, \quad v_\zeta = \varepsilon^\kappa \sum \varepsilon^s v_\zeta^{(s)} \\ \tau_\alpha &= \varepsilon^\kappa \sum \varepsilon^s \tau_\alpha^{(s)}, \quad \tau_{\xi\eta} = \varepsilon^{\kappa+2} \sum \varepsilon^s \tau_{\xi\eta}^{(s)}, \quad \tau_{\beta\zeta} = \varepsilon^{\kappa+1} \sum \varepsilon^s \tau_{\beta\zeta}^{(s)} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Уравнения (1.2) после подстановки (1.3) можно проинтегрировать по ζ , что порождает представления функций $v_\beta^{(s)}, \dots$ в виде отрезков рядов по степеням ζ :

$$\begin{aligned} v_\beta^{(s)} &= \sum_{k=0}^{K+1} \zeta^k v_{\beta k}^{(s)}, \quad v_\zeta^{(s)} = \sum_{k=0}^K \zeta^k v_{\zeta k}^{(s)} \\ \tau_{\xi\eta}^{(s)} &= \sum_{k=0}^{K+1} \zeta^k \tau_{\xi\eta k}^{(s)}, \quad \tau_{\beta\zeta}^{(s)} = \sum_{k=0}^K \zeta^k \tau_{\beta\zeta k}^{(s)}, \quad \tau_\alpha^{(s)} = \sum_{k=0}^{K-1} \zeta^k \tau_{\alpha k}^{(s)} \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $K = 2m$, если $s = 2m$ или $s = 2m + 1$; индекс α пробегает значения ξ, η, ζ , а индекс $\beta = \xi, \eta$.

Для составляющих $v_k^{(s)}$ из уравнений (1.2) получим рекуррентные соотношения, которые позволяют определять их по известным из предыдущих приближений величинам:

$$\begin{aligned} (k+2)(k+1) v_{\beta k+2}^{(s)} + \frac{k+1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial \beta} v_{\zeta k+1}^{(s)} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial \beta} \operatorname{div} \mathbf{v}_k^{(s-2)} + \\ + \Delta v_{\beta k}^{(s-2)} - 2(1+\nu) C_i \frac{\partial^2 v_{\beta k}^{(s-4+2\nu)}}{\partial \tau^2} &= 0 \quad (k = 0, 1, \dots, K-1) \\ (k+2)(k+1) v_{\zeta k+2}^{(s)} + \frac{k+1}{2(1-\nu)} \operatorname{div} \mathbf{v}_{k+1}^{(s-2)} + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \Delta v_{\zeta k}^{(s-2)} - \\ - \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{1-\nu} C_i \frac{\partial^2 v_{\zeta k}^{(s-4+2\nu)}}{\partial \tau^2} &= 0 \quad (k = 0, 1, \dots, K-2) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Кроме того, имеем уравнения связи составляющих напряжений с составляющими компонент смещений — результат подстановки выражений

(1.3), (1.4) в закон Гука

$$\begin{aligned}\tau_{\beta k}^{(s)} &= (k+1)\lambda_* v_{\xi k+1}^{(s)} + 2\mu_* \frac{\partial v_{\beta k}^{(s-2)}}{\partial \beta} + \lambda_* \operatorname{div} \mathbf{v}_k^{(s-2)} \\ \tau_{\xi k}^{(s)} &= (k+1)(\lambda_* + 2\mu_*) v_{\xi k+1}^{(s)} + \lambda_* \operatorname{div} \mathbf{v}_k^{(s-2)} \\ \tau_{\xi \eta k}^{(s)} &= \mu_* \left(\frac{\partial v_{\xi k}}{\partial \eta} + \frac{\partial v_{\eta k}}{\partial \xi} \right)^{(s)} \quad \tau_{\beta \xi k}^{(s)} = \mu_* \left((k+1) v_{\beta k+1} \frac{\partial v_{\xi k}}{\partial \beta} \right)^{(s)}\end{aligned}\quad (1.6)$$

2. Случай $s = 0, 1, K = 0$. Из системы уравнений (1.2), записанной для s — компонент функций без разложения по координате ζ , в предположении $\gamma < 2$ следует

$$v_{\xi}^{(s)} = v_{\xi 0}^{(s)} + \zeta v_{\xi 1}^{(s)}, \quad \tau_{\beta}^{(s)} = \lambda_* v_{\xi 1}^{(s)}, \quad \tau_{\xi} = (\lambda_* + 2\mu_*) v_{\xi 1}^{(s)} \quad (2.1)$$

а из соображения возможности удовлетворения произвольным краевым условиям (1.1) аналогично [1—3] полагаем $\tau_{\xi}^{(s)} = v_{\xi 1}^{(s)} = 0$. Это означает, выполнение следующей системы соотношений для величин при $s = 0, 1$:

$$\begin{aligned}v_{\xi 1}^{(s)} = \tau_{\alpha}^{(s)} = \tau_{\beta \xi}^{(s)} &\equiv 0, \quad v_{\xi}^{(s)} = v_{\xi 0}^{(s)}, \quad v_{\beta}^{(s)} = v_{\beta 0}^{(s)} + \zeta v_{\beta 1}^{(s)} \\ v_{\beta 1}^{(s)} + \frac{\partial v_{\xi 0}^{(s)}}{\partial \beta} &= 0, \quad \tau_{\xi \eta}^{(s)} = \mu_* \left(\frac{\partial v_{\xi}}{\partial \eta} + \frac{\partial v_{\eta}}{\partial \xi} \right)^{(s)}\end{aligned}\quad (2.2)$$

Кроме того, из геометрических условий контакта двух слоев (1.1) и равенств (2.2) заключаем, что

$$v_{\alpha 0}^{(1,s)} = v_{\alpha 0}^{(2,s)}, \quad v_{\beta 1}^{(1,s)} = v_{\beta 1}^{(2,s)} \quad (2.3)$$

где цифра вверху означает, что данная величина относится к слою 1 или 2. Таким образом, равенства (2.3) позволяют снять первый верхний индекс у этих функций совсем.

3. Квазистатические уравнения для продольных компонент смещения (случай $s = 2, 3, K = 2$). Остановимся на выборе значения γ , полагая, что отношения упругих модулей и плотностей слоев не вносят новых малых или больших параметров в задачу (иначе это требует видоизменения проводимого ниже анализа).

При $\gamma < 0$ получаются квазистатические уравнения для всех компонент смещения. Они справедливы при очень медленных изменениях внешних условий. Выбор $\gamma > 0$ влечет за собой появление инерционных членов в основных уравнениях как для поперечной, так и для продольных составляющих смещения. Чтобы эти инерционные члены стали существенными в уравнениях продольных движений пластинки, характерное время должно быть сравнимо с временем пробега длины пластинки L . При $t_0 \ll Lc_1^{-1} = t_1$ учет инерционных добавок в уравнениях продольных движений делается несущественным (практически достаточно $2t_0 < t_1$).

Далее рассматривается промежуточный случай $\gamma = 0$. Это равенство означает физически, что характерное время изменчивости напряженно-деформируемого состояния t_0 примерно в ε^{-1} раз больше времени пробега расстояния l упругой волной. При гармонических колебаниях с периодом T и характерной длиной волны в продольном направлении $\lambda \sim 2l$ условие $\gamma = 0$ можно переписать в виде ограничения на частоту $\omega = 2\pi/T \sim 4\pi hc_1 \lambda^{-2}$.

Для нормального к плоскости пластинки напряжения имеем $\tau_{\xi}^{(s)} = \zeta \tau_{\xi 1}^{(s)} + \tau_{\xi 0}^{(s)}$. Этого произвола в поведении функции $\tau_{\xi}^{(s)}$ по координате ζ оказывается недостаточно, чтобы в данном порядке по s удовлетворить

любым условиям на лицевых поверхностях. Аналогично случаям однородной [1, 3] и трехслойной симметричной [2] пластинкам вынуждены положить

$$\tau_{\zeta}^{(s)} \equiv 0, \quad s = 0, 1, 2, 3 \quad (3.1)$$

что означает асимптотическую малость этого напряжения по сравнению с остальными напряжениями. Полученное ранее условие $\tau_{\beta\zeta}^{(s)} = 0$ ($s = 0, 1$) соответствует гипотезе Кирхгоффа—Лява. Следствиями условий (3.1) и уравнений (1.5) являются такие соотношения:

$$\begin{aligned} v_{\beta 1}^{(s-2)} + \frac{\partial v_{\zeta 0}^{(s-2)}}{\partial \beta} = 0 &\Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{v}_1^{(s-2)} = -\Delta v_{\zeta 0}^{(s-2)} \\ v_{\zeta 1}^{(s)} + \frac{\nu}{1-\nu} \operatorname{div} \mathbf{v}_0^{(s-2)} = 0, \quad 2v_{\zeta 2}^{(s)} = \frac{\nu}{1-\nu} \Delta v_{\zeta 0}^{(s-2)} = -\frac{\nu}{1-\nu} \operatorname{div} \mathbf{v}_1^{(s-2)} &(3.2) \\ 2v_{\beta 2}^{(s)} + \frac{\partial v_{\zeta 1}^{(s)}}{\partial \beta} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial \beta} \operatorname{div} \mathbf{v}_0^{(s-2)} + \Delta v_{\beta 0}^{(s-2)} = 0 \\ 3v_{\beta 3}^{(s)} + \frac{\partial v_{\zeta 2}^{(s)}}{\partial \beta} - \frac{1}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial \beta} \Delta v_{\zeta 0}^{(s-2)} = 0 \quad (s = 2, 3) \end{aligned}$$

Перепишем три условия для напряжения $\tau_{\beta\zeta}$ на лицевых плоскостях и на плоскости контакта через составляющие $\tau_{\beta\zeta k}^{(s)}$ при $s = 2, 3$, исключим из этих уравнений $\tau_{\beta\zeta 0}^{(1, s)}$ и $\tau_{\beta\zeta 0}^{(2, 3)}$. Получим соотношение

$$\sum_{i=1}^2 (-1)^i E_i \{ \delta_s^3 \tau_{\beta*}^{(i)} + (\zeta_0 - \zeta_i) \tau_{\beta\zeta 1}^{(i, s)} + (\zeta_0^2 - \zeta_i^2) \tau_{\beta\zeta 2}^{(i, s)} \} = 0 \quad (3.3)$$

$$\delta_s^s = 1, \quad \delta_s^m = 0, \quad m \neq s$$

Из основных уравнений (1.6) при учете двух последних равенств (3.2) имеем

$$\begin{aligned} \tau_{\beta\zeta 1}^{(s)} &= -\frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial \beta} \operatorname{div} \mathbf{v}_0^{(s-2)} - \frac{1}{2(1+\nu)} \Delta v_{\beta 0}^{(s-2)} \\ \tau_{\beta\zeta 2}^{(s)} &= \frac{1}{2(1+\nu)} \left(3v_{\beta 3}^{(s)} + \frac{\partial v_{\zeta 2}^{(s)}}{\partial \beta} \right) = \frac{1}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial \beta} \Delta v_{\zeta 0}^{(s-2)} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Подставляя эти выражения в соотношение (3.3), получим искомые уравнения для продольных движений

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\zeta_1 - \zeta_0}{1-\nu_1} - e \frac{\zeta_2 - \zeta_0}{1-\nu_2} \right) \frac{\partial}{\partial \beta} \operatorname{div} \mathbf{v}_0^{(s)} + \left(\frac{\zeta_1 - \zeta_0}{1+\nu_1} - e \frac{\zeta_2 - \zeta_0}{1+\nu_2} \right) \Delta v_{\beta 0}^{(s)} + \\ &+ \left(\frac{\zeta_0^2 - \zeta_1^2}{1-\nu_1^2} - e \frac{\zeta_0^2 - \zeta_2^2}{1-\nu_2^2} \right) \frac{\partial}{\partial \beta} \Delta v_{\zeta 0}^{(s)} = -2\delta_s^1 (\tau_{\beta*}^{(1)} - e\tau_{\beta*}^{(2)}) \left(e = \frac{E_2}{E_1}, \quad s = 0, 1 \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Для поперечных движений уравнения будут получены при анализе случая $s = 4, 5$. Завершая исследование при $s = 2, 3$, приведем формулы для напряжений, имеющих наибольший порядок величины по ε :

$$\tau_{\beta\zeta}^{(s)} = \delta_s^3 \tau_{\beta*}^{(i)} + (\zeta - \zeta_i) \tau_{\beta\zeta 1}^{(s)} + (\zeta^2 - \zeta_i^2) \tau_{\beta\zeta 2}^{(s)}, \quad \tau_{\beta}^{(s)} = \tau_{\beta 0}^{(s)} + \zeta \tau_{\beta 1}^{(s)} \quad (3.6)$$

$$\tau_{\beta 0}^{(s)} = \frac{\nu}{1-\nu^2} \operatorname{div} \mathbf{v}_0^{(s-2)} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial v_{\beta 0}^{(s-2)}}{\partial \beta}, \quad \tau_{\beta 1}^{(s)} = -\frac{\nu}{1-\nu^2} \Delta v_{\zeta 0}^{(s-2)} - \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 v_{\zeta 0}^{(s-2)}}{\partial \beta^2}$$

где функции $\tau_{\zeta\beta k}^{(s)}$ выражаются через $v_{\alpha 0}^{(s-2)}$ по формулам (3.4). Величины $v_{\alpha}^{(s)}$, $\tau_{\xi\eta}^{(s)}$ ($s = 2, 3$) являются высшими приближениями по отношению к смещениям $v_{\alpha}^{(s-2)}$ и напряжению $\tau_{\xi\eta}^{(s-2)}$ и определяются на следующем шаге.

4. Уравнения изгибных движений пластинки (случай $s = 4, 5$). Так как $\tau_{\zeta}^{(s)} = 0$ при $s < 4$, то из условия независимости поверхностной на-

грузки от размера h и условия необращения в нуль следующего члена разложения τ_ζ в ряд по ε следует выбор величин κ : $\kappa = -4$. Из условий для напряжения τ_ζ на плоскостях $z = z_j$ ($j = 0, 1, 2$) исключим функции $\tau_{\zeta_0}^{(1,s)}$ и $\tau_{\zeta_0}^{(2,s)}$:

$$\sum_{i=1}^2 (-1)^i E_i \left[\sum_{k=1}^3 (\zeta_0^k - \zeta_i^k) \tau_{\zeta_k}^{(i,s)} + \delta_s^4 \tau_{\zeta_*}^{(i)} \right] = 0 \quad (4.1)$$

Выразим все компоненты $\tau_{\zeta_k}^{(s)}$ ($k = 1, 2, 3$), входящие в (4.1), через $v_{\zeta_0}^{(s-4)}$. Сначала из закона Гука (1.6) для этих величин при помощи уравнения движения для ζ -компоненты смещений исключим $v_{\zeta_{k+1}}^{(s)}$

$$\tau_{\zeta_k}^{(s)} = \frac{C_i}{k} \frac{\partial^2 v_{\zeta_k}^{(s-4)}}{\partial \tau^2} - \mu_* \operatorname{div} \mathbf{v}_k^{(s-2)} - \frac{\mu_*}{k} \Delta v_{\zeta_{k-1}}^{(s-2)}$$

При $k = 2, 3$ из первых двух уравнений движения (1.5) получим выражения для $\operatorname{div} \mathbf{v}_k^{(s-2)}$, заменяя в этих уравнениях $k + 2$ на k и действуя оператором div на обе части каждого из уравнений:

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_k^{(s-2)} = (2 - \nu) (k\nu)^{-1} \Delta v_{\zeta_{k-1}}^{(s-2)}$$

где принято во внимание следствие из второй строки формул (3.2). При учете равенства $v_{\zeta_{k-1}}^{(s-4)} = 0$ при $k = 2, 3$ из предыдущих формул и второго и третьего равенства (3.2) вытекает

$$\tau_{\zeta_2}^{(s)} = \frac{1}{2(1-\nu^2)} \Delta \operatorname{div} \mathbf{v}_0^{(s-4)}, \quad \tau_{\zeta_3}^{(s)} = -\frac{1}{6(1-\nu^2)} \Delta \Delta v_{\zeta_0}^{(s-4)} \quad (4.2)$$

При преобразовании выражения для компоненты $\tau_{\zeta_1}^{(s)}$ используем граничные условия для напряжения $\tau_{\beta\zeta}$ из (1.1) и равенства (3.4), (3.6):

$$\tau_{\zeta_1}^{(s)} = \left\{ C_i \frac{\partial^2 v_{\zeta_0}}{\partial \tau^2} - \delta_s^5 \operatorname{div} \tau_*^{(i)} - \frac{\zeta_i}{1-\nu_i^2} \Delta \operatorname{div} \mathbf{v}_0 + \frac{\zeta_i^2}{2(1-\nu_i^2)} \Delta \Delta v_{\zeta_0} \right\}^{(s-4)}$$

Найденные выражения для величин $\tau_{\zeta_k}^{(s)}$ подставим в (4.1) и после некоторых преобразований получим замыкающие уравнения

$$d_0 \Delta \Delta v_{\zeta_0}^{(s)} + d_1 \frac{\partial^2 v_{\zeta_0}^{(s)}}{\partial \tau^2} = \delta_s^0 (\tau_{\zeta_*}^{(1)} - e \tau_{\zeta_*}^{(2)}) + \delta_s^1 h^{-1} \operatorname{div} (h_1 \tau_*^{(1)} + e h_2 \tau_*^{(2)}) + p_0 h \Delta v_0^{(s)} \quad (4.3)$$

$$d_0 = \frac{h_1^2}{h^2} \frac{2\zeta_1 + \zeta_0}{6(1-\nu_1^2)} - \frac{h_2^2}{h^2} \frac{e(2\zeta_2 + \zeta_0)}{6(1-\nu_2^2)}, \quad d_1 = \frac{h_1 \rho_1 + h_2 \rho_2}{h \rho_1}$$

$$p_0 = \frac{h_1^2}{2h^2(1-\nu_1^2)} - \frac{e h_2^2}{2h^2(1-\nu_2^2)} \quad (s = 0, 1)$$

Система уравнений (3.5), (4.3) расщепляется на систему квазистатических уравнений только для продольных составляющих смещений $v_{\beta_0}^{(s)}$ и динамические уравнения для поперечных движений аналогично случаю однородной пластинки [3], если зафиксировать систему координат так, чтобы коэффициент при $\Delta v_{\zeta_0}^{(s)}/\partial \beta$ в уравнениях (3.5) обратился в нуль. Из этого условия однозначно определяется положение «средней плоскости» — координата $\zeta_0 = z_0/h$

$$\zeta_0 = \frac{\kappa_0 h_2^2 - h_1^2}{2h(\kappa_0 h_2 + h_1)}, \quad \zeta_i = \zeta_0 - \frac{h_i (-1)^i}{h}, \quad \kappa_0 = e \frac{1-\nu_1^2}{1-\nu_2^2} \quad (4.4)$$

Следствием уравнений (3.5) являются соотношения:

$$\operatorname{div} \Delta \mathbf{v}_0^{(s)} = \Delta \operatorname{div} \mathbf{v}_0^{(s)} = -q_0 \delta_s^1 \operatorname{div} (\tau_*^{(1)} - e \tau_*^{(2)}), \quad q_0 = \left[\frac{h_1 h^{-1}}{1-\nu_1^2} + \frac{e h_2 h^{-1}}{1-\nu_2^2} \right]^{-1} \quad (4.5)$$

Коммутативность операторов Δ и div в декартовой системе координат имеет место. Подстановка выражения для $\text{div } \Delta v_0^{(s)}$ в уравнение (4.3) приводит к независимым уравнениям для главной части поперечного смещения.

Конструктивно уравнения (3.5), (4.3) получены из трехмерных уравнений теории упругости с погрешностью $O(\varepsilon^2)$. Естественными краевыми условиями для них являются классические краевые условия теории пластинок. Погрешность, вносимая интегральными условиями на торцах в решение, вообще говоря, зависит от выбора этих условий (возможна постановка уточненных краевых условий ([4]), но не превышает $O(\varepsilon)$ в рассмотренных ранее случаях [1, 4] всюду в области определения, за исключением пограничного слоя. Для многослойных пластинок этот вопрос требует отдельного рассмотрения.

Поскольку задача расщепилась, целесообразно привести формулы для описания реакции на нормальную и касательную нагрузки отдельно. При этом неявно предполагается наличие однородных краевых условий для смещений и их производных на торцах пластинки.

5. Полные системы соотношений для описания полей смещений и напряжений по двумерной теории. При действии только нормальной нагрузки ($\tau_{\beta*}^{(i)} = 0$) нулевыми будут составляющие смещения $v_{\xi_0}^{(s)}$, $v_{\eta_0}^{(s)} v_{\zeta_0}^{(1)}$ ($s = 0, 1$). Единственное уравнение для поперечного смещения $u_z = h v_{\zeta_0}^{(0)}$ и выражения напряжений и продольных смещений через это смещение в размерной форме выглядят так (см. формулы (1.3), (2.1), (2.2), (3.4), (3.6), (4.2), (4.3)):

$$\begin{aligned}
 D_* \Delta \Delta u_z + 2h\rho_* \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= \sigma_{z*}^{(1)} - \sigma_{z*}^{(2)} \\
 D_* &= h^3 d_0 E_1, \quad \rho_* = (2h)^{-1} (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) \\
 u_\rho &= -z \frac{\partial u_z}{\partial \rho}, \quad \sigma_\rho^{(i)} = -\frac{z E_i}{1 - \nu_i^2} \left[\nu_i \Delta u_z + (1 - \nu_i) \frac{\partial^2 u_z}{\partial \rho^2} \right] \quad (\rho = x, y) \\
 \sigma_{xy}^{(i)} &= -\frac{z E_i}{1 + \nu_i} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_{\rho z}^{(i)} = E_i \frac{z^2 - z_i^2}{2(1 - \nu_i^2)} \frac{\partial}{\partial \rho} \Delta u_z \\
 \sigma_z^{(i)} &= F_i E_i h c_1^{-2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + \frac{G_i E_i}{E_1} (\sigma_{z*}^{(2)} - \sigma_{z*}^{(1)}) + \sigma_{z*}^{(i)} \\
 F_i &= C_i \frac{z - z_i}{h} + d_1 G_i, \quad G_i = \frac{(z - z_i)^2 (z + 2z_i)}{6d_0 h^3 (1 - \nu_i^2)} \\
 M_x &= -D_* \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \nu_* \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right), \quad Q_{xz} = -D_* \frac{\partial}{\partial x} \Delta u_z \quad (x \leftrightarrow y) \\
 M_{xy} &= -D_* (1 - \nu_*) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \\
 \nu_* D_* &= \left(4 + 6 \frac{z_0}{h_1} \right) \nu_1 D_1 + \left(4 - 6 \frac{z_0}{h_2} \right) \nu_2 D_2, \quad D_i = \frac{h_i^3 E_i}{12(1 - \nu_i^2)}
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Здесь также приведены выражения для изгибающих моментов и перерезывающих сил. Они получены в результате интегрирования напряжений, исходя из обычных интегральных представлений для этих величин. Моменты вычислялись относительно средней плоскости, положение которой определено формулой (4.4).

Итак, показано, что все соотношения классической теории изгиба сохраняются в системе координат, фиксированной согласно формуле (4.4). При этом в уравнении движения и в выражениях для моментов и сил в (5.1) используются осредненные жесткость на изгиб D_* плотность ρ_*

и коэффициент Пуассона ν_* . При соответствующих предельных переходах они переходят в параметры однородной пластинки. Все остальные формулы для напряжений и продольных смещений (за исключением формулы для напряжения σ_z) совпадают с классическими формулами внутри каждого слоя. Изгибные напряжения испытывают скачок на границе раздела, остальные величины непрерывны на этой границе. Поведение при $h \rightarrow 0$ сходно со случаем однородной пластинки:

$$u_z \sim h^{-3}, \quad u_\rho, \sigma_\rho, \quad \sigma_{xy} \sim h^{-2}, \quad \sigma_{\rho z} \sim h^{-1}, \quad \sigma_z \sim h^0$$

Реакция двухслойной пластинки на касательную нагрузку в основном описывается следующей системой соотношений. Нулевыми будут все составляющие смещений с индексом $s = 0$. Из формул (1.3), (1.4), (2.2), (3.5), (3.6), (4.2)–(4.5) получим уравнения для остальных удерживаемых составляющих смещений и выражения для напряжений в размерном виде:

$$\Delta u_0 + p \nabla \operatorname{div} u_0 = 2q_+ E_1^{-1} (\sigma_*^{(1)} - \sigma_*^{(2)}), \quad u_0 = h v_0^{(1)}$$

$$D_* \Delta \Delta u_z + 2h \rho_* \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = h p_1 \operatorname{div} \sigma_*^{(1)} - h p_2 \operatorname{div} \sigma_*^{(2)}$$

$$u_\rho = u_{\rho 0} - z \frac{\partial u_z}{\partial \rho} \quad (\rho = x, y) \quad (5.2)$$

$$\sigma_\rho^{(i)} = \frac{E_i}{1 - \nu_i^2} \left[\nu_i \operatorname{div} u_0 + (1 - \nu_i) \frac{\partial u_{\rho 0}}{\partial \rho} \right] - \frac{z E_i}{1 - \nu_i^2} \left[(\nu_i \Delta u_z + (1 - \nu_i) \frac{\partial^2 u_z}{\partial \rho^2}) \right]$$

$$\sigma_{\rho z}^{(i)} = \sigma_{\rho z}^{(i)*} + \frac{z_i - z}{2(1 - \nu_i)} E_i \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \operatorname{div} u_0 + \frac{1 - \nu_i}{1 + \nu_i} \Delta u_{\rho 0} \right) + \frac{z^2 - z_i^2}{2(1 - \nu_i^2)} E_i \frac{\partial}{\partial \rho} \Delta u_z$$

$$\sigma_{xy}^{(i)} = \frac{E_i}{2(1 + \nu_i)} \left(\frac{\partial u_{x0}}{\partial y} + \frac{\partial u_{y0}}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \right)$$

$$\sigma_z^{(i)} = h c_1^{-2} F_i E_i \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + \operatorname{div} \left\{ \frac{q_0 E_i (z - z_i)^2}{2h E_1 (1 - \nu_i^2)} (\sigma_*^{(1)} - \sigma_*^{(2)}) - \right. \\ \left. - (z - z_i) \sigma_*^{(i)} + h G_i \frac{E_i}{E_1} (p_1 \sigma_*^{(1)} - p_1 \sigma_*^{(2)}) \right\}$$

$$q_\pm = \left(\frac{h_1}{1 \pm \nu_1} + \frac{e h_2}{1 \pm \nu_2} \right)^{-1}, \quad p = \frac{q_+}{q_-}, \quad p_i = p_0 q_0 - (-1)^i \frac{h_i}{h}$$

где $\sigma_*^{(i)}$ — вектор касательных усилий, заданный на лицевых сторонах.

Уравнения (6.2) по форме совпадают с аналогичными уравнениями для продольных движений пластинки [3]. При $\nu_1 = \nu_2$, $E_1 = E_2$ или если $h_i = 0$ ($i = 1$ или 2) они полностью совпадают. Переменные касательные усилия вызывают ненулевое поперечное смещение, подчиняющееся второму уравнению (6.2). Только свободным членом оно отличается от динамического уравнения из (6.1). Для постоянной касательной нагрузки $u_z = 0$, а система соотношений (6.2) существенно упрощается. Порядки всех величин по h при $h \rightarrow 0$ на единицу меньше, чем при изгибе.

Автор благодарит М. И. Гусейн-Заде за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 4. С. 668–686.
2. Гусейн-Заде М. И. О некоторых свойствах напряженного состояния тонкого упругого слоя // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 6. С. 1132–1140.
3. Гусейн-Заде М. И. Асимптотический анализ трехмерных динамических уравнений тонкой пластинки // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 6. С. 1072–1078.
4. Гусейн-Заде М. И. Асимптотический анализ граничных и начальных условий в динамике тонких пластинок // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 5. С. 899–907.

Москва

Поступила в редакцию
I.III.1989