

УДК 533.6.011

© 1989

Г. А. Тирский, С. В. Утюжников

СРАВНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ТОНКОГО И ПОЛНОГО ВЯЗКОГО УДАРНОГО СЛОЯ В ЗАДАЧЕ СВЕРХЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ ПРИТУПЛЕННЫХ КОНУСОВ ВЯЗКИМ ГАЗОМ

На примере сверхзвукового обтекания затупленных по сфере конусов вязким теплопроводным газом проведено сравнение решений уравнений тонкого (гиперзвукового) вязкого ударного слоя (ТВУС) с заданной формой ударной волны с решением полных уравнений вязкого ударного слоя (ПВУС), в которых не делается предположения о тонкости ударного слоя и, что важно, форма ударной волны находится в процессе решения задачи. Показано, что «удачное» задание формы ударной волны при решении задачи гиперзвукового обтекания затупленных конусов в рамках уравнений ТВУС дает, во-первых, возможность получить решение далеко вниз по потоку, и, во-вторых, существенно его уточнить, если оно вообще может быть получено в рамках уравнений ТВУС, по сравнению с распространенным асимптотическим подходом, в котором форма ударной волны берется при решении этих уравнений эквидистантной форме тела.

При описании движения вязкого теплопроводного газа около тела, движущегося со сверхзвуковой скоростью, при помощи упрощенных («параболизированных») уравнений Навье — Стокса, как правило, используется двухслойная модель Ченга [1, 2]. Согласно Ченгу, вся возмущенная область газа перед телом разбивается на область вязкого ударного слоя и переходную область, соответствующую скачку уплотнения. При этом переходная область описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений, которая после соответствующих упрощений переходит в обобщенные условия Ренкина — Гюгонио. Область вязкого ударного слоя описывается с помощью различных систем уравнений, которые получаются как асимптотическим путем посредством выделения одного или нескольких малых параметров задачи (см., например, [3]), так и эвристическим способом посредством оценки вклада каждого члена системы уравнений [4]. И в том и в другом случае область применения модели априорно неясна и может быть определена только путем сравнения с решениями полных уравнений Навье — Стокса. Следует заметить, что область применимости упрощенных уравнений Навье — Стокса для получения ряда основных аэродинамических и тепловых характеристик, как правило, оказывается значительно шире формальных асимптотических оценок.

1. Модель тонкого вязкого ударного слоя (ТВУС). Исторически первой системой упрощенных уравнений Навье—Стокса и наиболее распространенной ввиду ее математической простоты является система уравнений ТВУС (см., например, [1—6]), которая получается в предположении $\gamma \rightarrow 1$, $M_\infty \rightarrow \infty$, $Re_\infty \rightarrow \infty$ (γ — показатель адиабаты, M — число Маха, Re — число Рейнольдса). Уравнения ТВУС содержат все члены, входящие в уравнения гиперзвукового невязкого ударного слоя [7]. Система двумерных уравнений ТВУС в криволинейной системе координат, нормально связанной с телом, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (r^\nu \rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (H_1 r^\nu \rho v) &= 0 \\ \rho \left(\frac{u}{H_1} \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{uv}{RH_1} \right) &= - \frac{1}{H_1} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \omega \rho \frac{u^2}{RH_1} &= \frac{\partial P}{\partial y} \\ \rho \left(\frac{u}{H_1} \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{\sigma} \left(\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\sigma - 1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial y} \right) \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь x — длина дуги контура тела, y — расстояние по нормали от поверхности тела; u и v — физические компоненты скорости по направлениям x и y ; H — полная удельная энтальпия; σ — число Прандтля; $R(x)$ — радиус кривизны контура тела; H_1 и r — метрические коэффициенты Ламе: $H_1 = 1 + y/Q$, r — расстояние от данной точки пространства до оси тела; $\nu = 0$ в плоском случае, $\nu = 1$ — в осесимметричном; ω — параметр, определяющий вклад центробежной силы ($0 \leq \omega \leq 1$) (см. подробнее п. 3). Система (1.1) должна быть дополнена уравнением состояния.

В качестве граничных условий на теле для скорости применяется условие прилипания; считается, что поверхность тела непроницаемая или с поверхности тела осуществляется вдув заданной интенсивности. Для температуры стенки задается одно из возможных граничных условий первого, второго или третьего рода. Члены, описывающие эффекты скольжения и скачка температуры в предположении справедливости модели ТВУС, являются внепорядковыми.

Граничными условиями на внутренней (условной) границе ударной волны для системы (1.1) являются обобщенные условия Ренкина — Гюгонио, записанные в гиперзвуковом приближении

$$\begin{aligned} v_s &= u_s \operatorname{tg} \beta_s - k_s \sin \beta / \cos \beta_s \\ u_s &= \cos \beta \cos \beta_s + k_s \sin \beta \sin \beta_s - (\mu du / dy)_s / \sin \beta \\ H_s &= 1 - (\mu_s / (\sigma \sin \beta)) (\partial H / \partial y)_s \\ P_s &= (1 - k_s) \sin^2 \beta + 1 / (\gamma M_\infty^2) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь $k_s = \rho_s^{-1}$, β_s — угол наклона ударной волны к телу, β — угол наклона ударной волны к оси тела.

Постановка задачи «дополняется» (смысл этого выражения будет ясен ниже) априорным заданием формы головной ударной волны, как правило, эквидистантной поверхности тела.

Система уравнений ТВУС практически совпадает с системой уравнений Прандтля. Ее решение даже проще, чем решение уравнений пограничного слоя, так как здесь не возникает проблемы с заданием внешнего поля давления (оно находится в процессе решения задачи из третьего уравнения системы (1.1)). Следует заметить, что в вышеуказанной постановке задача переопределена ввиду того, что ударная волна служит свободной границей, положение которой должно быть определено в ходе решения задачи. Как показано в [8], и это следует из результатов работы [9], задача по определению положения ударной волны является эллиптической в том смысле, что на данную точку ударной волны может влиять область, расположенная и ниже по течению, даже если механизм передачи слабых возмущений вверх по потоку не описывается самой системой уравнений движения, как в случае уравнений ТВУС (см. п. 2).

Для того чтобы решить такую задачу, необходимо применять для определения положения ударной волны тот или иной итерационный метод, что сопряжено с известными трудностями. Поэтому в подавляющем большинстве работ, связанных с применением уравнений ТВУС, положение ударной волны задавалось, как правило, эквидистантно поверхности тела и даже не уточнялось.

2. Модель полного вязкого ударного слоя (ПВУС). Дальнейшим развитием модели ТВУС является система уравнений ПВУС, предложенная в работе [10], а также близкая к ней система параболизированных уравнений

Навье—Стокса [11]. В координатах x, y система уравнений ПВУС записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} (r^\nu \rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (H_1 r^\nu \rho v) = 0 \\ & \rho \left(\frac{u}{H_1} \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{uv}{RH_1} \right) = - \frac{1}{H_1} \frac{\partial P}{\partial x} + \\ & \quad + \frac{1}{H_1^2 r^\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left[H_1^2 r^\nu \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{u}{H_1 R} \right) \right] \\ & \rho \left(\frac{u}{H_1} \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{u^2}{RH_1} \right) = - \frac{\partial P}{\partial y} \\ & \rho \left(\frac{u}{H_1} \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} \right) = \frac{1}{H_1 r^\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(H_1 r^\nu \frac{\mu}{\sigma} \times \right. \\ & \quad \left. \times \left(\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\sigma - 1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial y} - \frac{\sigma u^2}{RH_1} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.1)$$

При постановке граничных условий на теле для системы уравнений ПВУС в случае умеренных и умеренно малых чисел Рейнольдса ($10 \lesssim \text{Re}_\infty \lesssim 10^3$) необходимо учитывать эффекты скольжения и скачка температуры.

Граничными условиями на ударной волне, положение которой определяется в процессе решения задачи, для уравнений ПВУС являются обобщенные условия Ренкина — Гюгонио, отличающиеся от (1.2) заменой во втором равенстве величины $(\partial u / \partial u)_s$ на $(\partial u / \partial y - u / (RH_1))_s$.

Принципиальное отличие системы (2.1) от системы (1.1) заключается в отказе от малости нормальной составляющей скорости v , т. е. выполнение условия $\gamma \rightarrow 1$ необязательно. Поэтому уравнение импульсов в проекции на нормаль к телу содержит в левой части все слагаемые ускорения. Система уравнений (2.1) содержит все члены полных уравнений Навье—Стокса, вносящие вклад во второе приближение пограничного слоя по малому параметру $\text{Re}^{-1/2}$ как для внутреннего, так и для внешнего разложений. При таком подходе учитываются члены $O(1)$ и $O(\text{Re}^{-1/2})$, а отбрасываются только члены $O(\text{Re}^{-1})$, ответственные за молекулярный перенос массы, импульса и энергии вдоль тела. В отличие от системы уравнений (1.1) уравнения (2.1) уже описывают распространение возмущений вверх по потоку в дозвуковых областях течения, а система уравнений (2.1) там имеет эллиптический тип. Так как при наличии эффекта прилипания газа у стенки всегда имеют место дозвуковые области, задача Коши по x для системы уравнений ПВУС некорректна вдоль всей поверхности обтекаемого тела.

В связи с этим систему уравнений ПВУС часто решают методом установления. Отмечалось [12], что время, требуемое для решения на ЭВМ системы стационарных уравнений ПВУС методом установления, сравнимо со временем расчета системы полных уравнений Навье — Стокса. Для решения уравнений ПВУС был предложен [13]¹ высокоэкономичный по затратам памяти и времени ЭВМ численный метод решения, основанный на проведении глобальных итераций, позволивший сократить затраты машинного времени примерно в десять раз. Тем не менее решение системы уравнений ПВУС остается достаточно сложной и трудоемкой задачей. Поэтому там, где это допускают требования по точности, целесообразно применять более упрощенные модели, например модель ТВУС, но для этого необходимо ясно представлять неустраняемую погрешность модели.

Погрешность модели ТВУС для гладких тел типа сферы и гиперболоида или параболоида вращения была исследована в более ранних работах (например, [14]).

¹ См. также Утюжников С. В. Численный метод решения полных уравнений вязкого ударного слоя: Дис. ... физ.-мат. наук. М.: МФТИ, 1986. 175 с.

Было предложено [14] при решении уравнений ТВУС не фиксировать аргумент форму ударной волны, а уточнять ее методом глобальных итераций, используя интегральное соотношение баланса массы газа [13]. На примере расчета обтекания гиперболоида вращения с углом полураствора 10° показано, что в рамках уравнений ТВУС это позволяет значительно уменьшить погрешность модели.

3. Сравнение моделей. Результаты расчетов. Проведено исследование погрешности модели ТВУС для случая обтекания сферически затупленных конусов посредством сравнения решений систем уравнений тонкого и полного вязкого ударного слоя. Уравнения ТВУС в том числе решались и с уточнением положения ударной волны аналогично работе [4]. При исследовании погрешности модели ТВУС авторы исходили из известных данных о том, что различие решений системы уравнений ПВУС и системы полных уравнений Навье—Стокса по распределению давления, трения и тепловых потоков в случае обтекания затупленных конусов при $Re_\infty > > 10^3$ не превышает 1—2%. Система уравнений ПВУС решалась численным методом [13].

При проведении численных расчетов использовались независимые переменные типа переменных А. А. Дородницына ξ, η [4]:

$$\xi = x, \quad \eta(x, y) = \int_0^y \rho r^\nu \Delta^{-1} dn, \quad \Delta = \int_0^{y_s} \rho r^\nu dn \quad (3.1)$$

где $y_s(x)$ — отход ударной волны от тела.

Применяемая разностная схема имела второй порядок аппроксимации производных по x и четвертый по y . Для расчета течения с большими градиентами использовалось переменное распределение шагов разностной сетки по η , которые выбирались в каждой точке в зависимости от изменения функций в ее окрестности. Распределение узлов разностной сетки по ξ осуществлялось таким образом, что один из узлов попадал в точку сопряжения сферы с конусом, являющуюся точкой разрыва кривизны образующей. При решении уравнений ПВУС для расчета точки сопряжения со вторым порядком аппроксимации применялись точные соотношения для разрыва первых и вторых производных от искомых функций в естественной системе координат, полученные в [15].

Положение ударной волны при использовании модели ТВУС на сферической части задавалось по следующей приближенной формуле [9]:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta_s &= c [(2c - 1) c^{-2} + \operatorname{tg}^2 \alpha]^{1/2} - \operatorname{tg} \alpha \\ c &= 1/2 R_s(0) (R(0) + y_s(0))^{-1} \end{aligned} \quad (3.2)$$

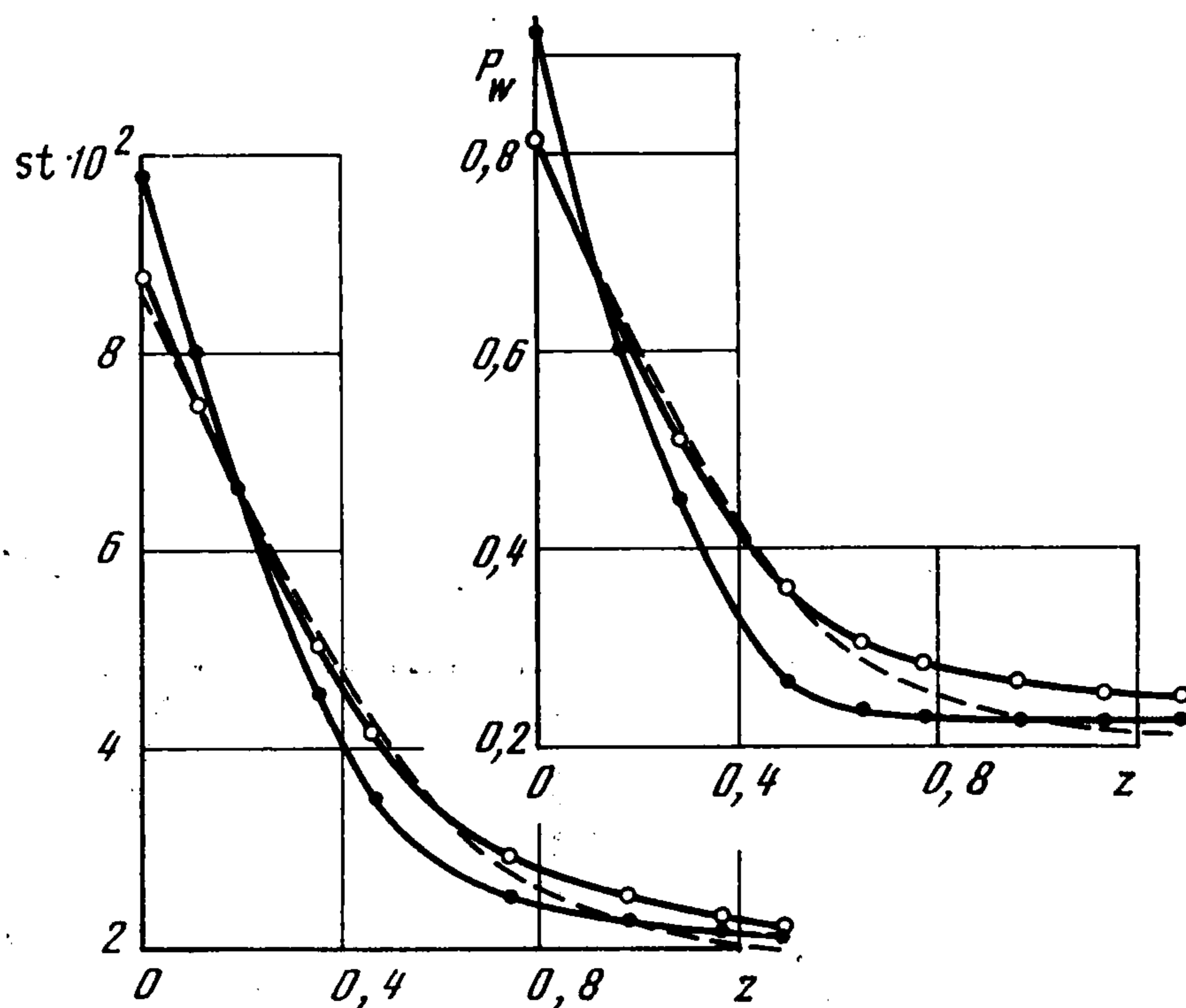
где $R_s(x)$ — радиус кривизны ударной волны. Для оценки $y_s(0)$ и $R_s(0)$ применялись известные аппроксимационные формулы [16]. На конической части тела использовалась следующая полуэмпирическая формула (см. работу, указанную в сноске на с. 965):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta_s &= \operatorname{tg} \beta_s(x_c) \exp[k_c(x - x_c)] \\ k_c &= \frac{1}{H_{1s} \operatorname{tg} \beta_s} \left. \frac{d \operatorname{tg} \beta_s}{dx} \right|_{x_c=0} - \frac{1}{H_{1s} \sin \beta_s \cos \beta_s R} \Big|_{x_c=0} \end{aligned} \quad (3.3)$$

(x_c — координата точки сопряжения). Сравнение с численными решениями показало, что составная формула (3.2), (3.3) дает достаточно хорошее приближение — ошибка порядка 10—30%.

Проводимые ниже результаты расчетов соответствуют обтеканию сферически затупленных конусов потоком совершенного газа при $M_\infty = 20$, $Re_\infty = 10^4$, $T_w = 0,5$ (T_w — температурный фактор).

На фиг. 11 приведено распределение вдоль поверхности конуса с углом полураствора 30° теплового потока в виде числа Стантона $St = \lambda (\partial T / \partial y)_w / [\rho_\infty v_\infty H_\infty (1 - T_w)]$ и давления, отнесенного к $\rho_\infty v_\infty^2$, z — координата вдоль оси конуса, отсчитываемая от точки торможения потока. Штриховые линии соответствуют расчету на основании уравнений ТВУС с заданным положением ударной волны (3.2), (3.3); кривая, обозна-



Фиг. 1

ченая светлыми точками, соответствует расчету на основании модели ТВУС с итерационным определением положения ударной волны; кривая с темными точками относится к расчету на основании модели ПВУС. Как видно из графиков, в отличие от класса гладких тел итерационное уточнение положения ударной волны на основании модели ТВУС дает приблизительно ту же погрешность в определении значений искомых функций на теле, что и в случае применения приближенной формулы (3.2), (3.3). Отличие в определении значения местного коэффициента трения $cf = \frac{1}{2}\mu_w (\partial u/\partial y)_w / (\rho_\infty v_\infty^2)$ на основании модели ТВУС составляет 10—15%.

Для целей исследования обтекания конусов с углом полураствора, превышающим 45° , модель ТВУС выглядит вполне приемлемой, так как допускаемая при этом погрешность не превышает 10%. В качестве примера на фиг. 2 приведены расчетные данные по распределению значения местного коэффициента трения cf вдоль поверхности конуса с углом полураствора 45° . В случае же обтекания тонких притупленных конусов модель ТВУС неприменима или плохо применима. (Результаты расчета распределения давления вдоль поверхности конуса с углом полураствора 15° приведены на фиг. 2; обозначения те же, что на фиг. 1.)

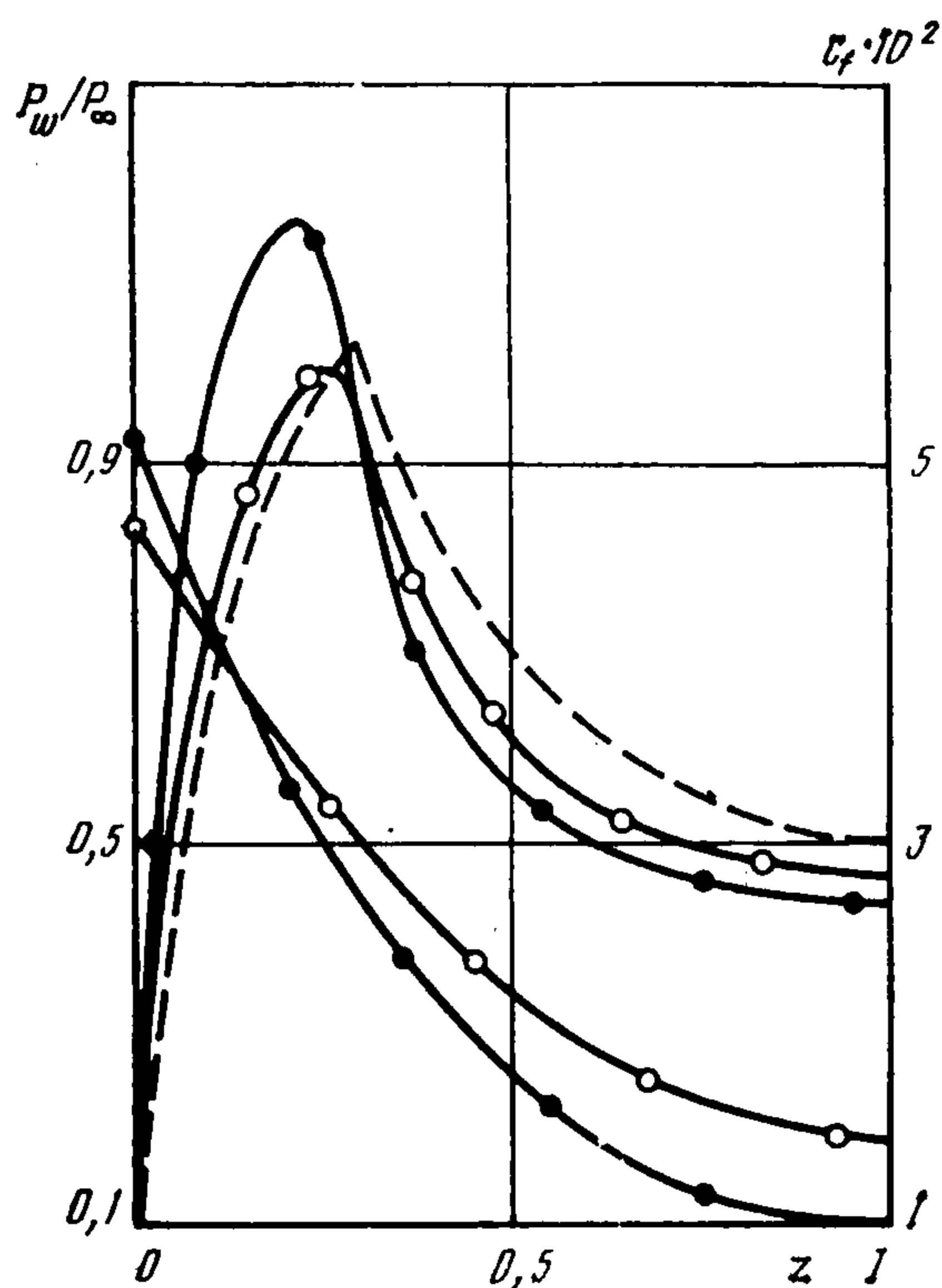
Заметим, что при проведении расчетов значение параметра ω в (1.1) полагалось равным нулю, поскольку для данного класса тел такое приближение более точное [16]. Кроме того, значение ω , отличное от нуля, приводит к «нефизическому» разрыву давления в точке сопряжения сферы и конуса.

Для каждой из моделей течения было проведено сравнение точности выполнения интегральных законов сохранения, записанных на основе полной системы уравнений Навье — Стокса. Контрольный объем определялся вращением вокруг оси тела образующей ABCDE (фиг. 3), где линия BC параллельна нормали к поверхности тела, линия DC параллельна оси тела, точка C лежит на внешней границе ударной волны. Относительное различие входных (индекс плюс) и выходных (индекс минус) потоков массы, импульса и энергии вычислялось в процентах из соотношения

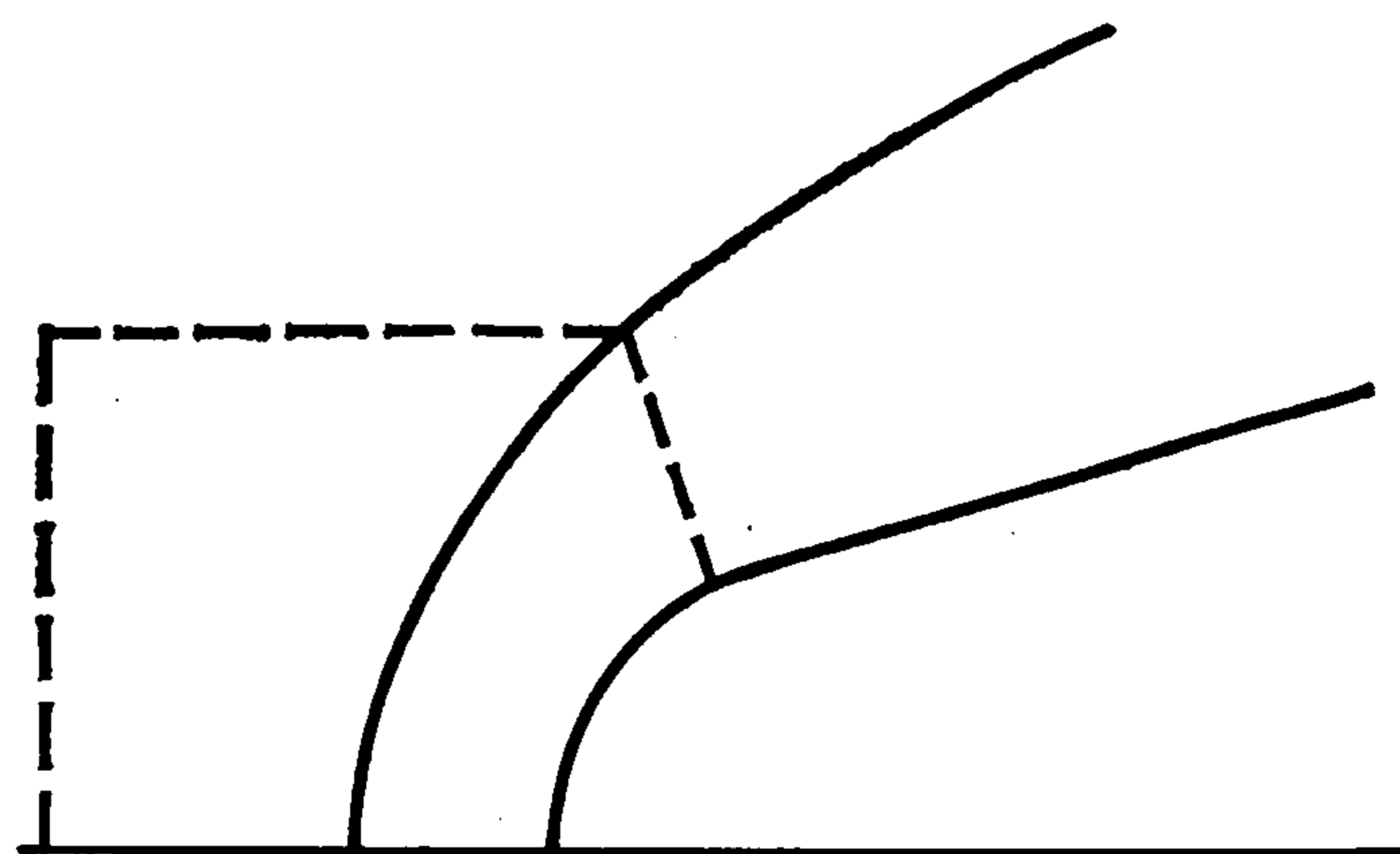
$$\delta Q = |(Q_+ + Q_-)/Q_-| \times 100 \quad (3.4)$$

Здесь под входным потоком понимается поток через поверхность AB, а под выходным — поток через поверхность CD, а также потери импульса и энергии на поверхности DE, т. е. на тела.

Некоторые варианты приведенных сравнений даны в таблице. Здесь δQ_m , δQ_i , δQ_e — дисбалансы потоков массы, импульса и энергии соответственно, вычисляемые по формуле (3.4). ТВУС (ГИ) означает применение модели ТВУС с итерационным определением положения ударной волны. Расчеты проведены для разных углов θ полураствора конуса. В каждом из вариантов точка D контрольного объема совпадала с точкой сопряжения сферы и конуса. В случае модели ТВУС $\delta Q_m = 7$ при $\theta = 45^\circ$ и $\delta Q_m = 5$ при $\theta = 30^\circ$. Так как положение ударной волны при проведении глобальных итераций определяется из условия баланса массы, то в вариантах ПВУС и ТВУС (ГИ) дисбаланс массы равен нулю. При $\theta = 15^\circ$ расчет ТВУС начинался с получен-



Фиг. 2



Фиг. 3

ного ранее расчета для $\theta = 30^\circ$, поэтому вариант ТВУС при $\theta = 15^\circ$ отсутствует в таблице.

На основании результатов настоящей работы и работы [14] можно сделать следующие выводы. Модель ТВУС при достаточно хорошем задании положения ударной волны дает приемлемые результаты для расчета обтекания сильно затупленных гладких тел типа гиперboloида или параболоида вращения. Традиционное задание формы ударной волны эквидистантно контуру тела может давать существенную погрешность особенно в определении давления на теле, что значительно сужает область применимости модели.

Для целей численного моделирования обтекания притупленных конусов модель ТВУС практически применима только в случае больших углов

Модель	$\theta = 45^\circ$		30°		15°	
	δQ_i	$\delta Q_e \cdot 10^2$	δQ_i	$\delta Q_e \cdot 10^2$	δQ_i	$\delta Q_e \cdot 10^2$
ПВУС	0,4	2	0,3	2	0,5	3
ТВУС (ГИ)	1,7	0,4	5,6	0,5	10,6	2
ТВУС	1,6	0,2	5,7	1		

полураствора конуса ($\geq 40^\circ$). При этом задание формы ударной волны эквидистантно телу приводит к «нефизическому» разрыву кривизны ударной волны, и, как следствие, к разрыву касательной к телу составляющей градиента давления. Для задания положения ударной волны рекомендуется пользоваться более точными приближениями (например приближением (3.2), (3.3)). Получаемая при этом погрешность в определении распределений по телу давления, трения и теплопередачи в целом сохраняется и в случае итерационного уточнения положения ударной волны в рамках модели ТВУС.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершбейн Э. А., Пейгин С. В., Турский Г. А. Сверхзвуковое обтекание тел при малых и умеренных числах Рейнольдса // Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ, 1985. Т. 19. С. 3—85.

2. *Пейгин С. В., Турский Г. А.* Трехмерные задачи сверх- и гиперзвукового обтекания тел потоком вязкого газа // Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ, 1988. Т. 22. С. 62—177.
3. *Bush W. B.* On the viscous hypersonic blunt body problem // J. Fluid Mech. 1964. V. 20. № 3. P. 353—367.
4. *Турский Г. А.* К теории гиперзвукового обтекания плоских и осесимметричных затупленных тел вязким химически реагирующим газом при наличии вдува // Науч. тр. Ин-та механ. МГУ, 1975. № 39. С. 5—38.
5. *Davis R. T., Rubin S. G.* Non-Navier Stokes viscous flow computations // Comput. and Fluids. 1980. V. 8. № 1. P. 101—131.
6. *Гершбейн Э. А., Щелин В. С., Юницкий С. А.* Численные и приближенные аналитические решения уравнений гиперзвукового пространственного вязкого ударного слоя при умеренно малых числах Рейнольдса // Гиперзвуковые пространственные течения при наличии физико-химических превращений. М.: Изд-во МГУ, 1981. С. 72—92.
7. *Черный Г. Г.* Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.
8. *Srivastava B. N., Werle M. J., Davis R. T.* Numerical solutions of hypersonic viscous shock—layer equations // AIAA Journal. 1979. V. 17. № 1. P. 107—110.
9. *Турский Г. А.* Приближенное аналитическое определение отхода головной ударной волны при сверхзвуковом обтекании затупленных тел // Математическое моделирование нестационарных задач механики сплошных сред. М.: Всесоюз. заочн. машиностроит. ин-т, 1985. С. 34—50.
10. *Davis R. T., Flügge-Lotz I.* Second — order boundary — layer effects in hypersonic flow past axisymmetric blunt bodies // J. Fluid Mech. 1964. V. 20. No 4. P. 593—623.
11. *Толстых А. И.* О численном решении задач сверхзвукового обтекания затупленных тел потоком вязкого газа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1966. Т. 6. № 1. С. 113—120.
12. *Головачев Ю. П., Попов Ф. Д.* Расчет сверхзвукового обтекания затупленных тел вязким газом при больших числах Рейнольдса // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1972. Т. 12. № 5. С. 1292—1303.
13. *Васильевский С. А., Турский Г. А., Утюжников С. В.* Численный метод решения уравнений вязкого ударного слоя // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1987. Т. 27. № 5. С. 741—750.
14. *Васильевский С. А., Турский Г. А.* Численный метод решения уравнений вязкого ударного слоя // Исследования по гиперзвуковой аэродинамике и теплообмену с учетом неравновесных физико-химических реакций. М.; Изд-во МГУ, 1987. С. 5—24.
15. *Утюжников С. В.* Об использовании криволинейной системы координат, связанной с телом, для численного моделирования обтекания затупленных конусов // Тр. 10-й конф. молодых ученых МФТИ. Долгопрудный, 1985. С. 11—16.
16. *Лунев В. В.* Гиперзвуковая аэродинамика. М.: Машиностроение, 1975. 327 с.

Москва

Поступила в редакцию
12.XII.1988