

УДК 533.6.011 : 534.1

© 1989

В. Н. Лихачев

ФОКУСИРОВАНИЕ УДАРНЫХ ВОЛН В СИЛЬНО ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Методом сращиваемых асимптотических разложений решается задача о фокусировании ударной волны в слабосжимаемой среде, обладающей большой вязкостью. Строятся асимптотики решения в ряде пространственных зон. Зона фокусирования описывается своей асимптотикой, получающейся из сращивания с решением, соответствующим вязкой геометрической акустике. В качестве примера рассматривается отражение ударной волны, образовавшейся в результате разрыва скорости в окрестности одного из фокусов эллипсоида вращения. Получена аналитическая зависимость, описывающая зону фокусирования около второго фокуса. Показано, что в самом фокусе профиль волны приобретает антисимметричный вид: за волной сжатия следует такая же по форме волна разрежения.

Задача о формировании и распространении сферически симметричной ударной волны в сильно вязкой жидкости была решена в работе [1]. Отраженная от эллипсоида волна также приобретает сферическую форму, однако уже не является сферически симметричной.

Структура зоны фокусирования ударной волны небольшой интенсивности может быть описана, если учитывается хотя бы один из факторов: нелинейность или диссипация. Если не учитывать ни одного из них, то амплитуда волны будет подчиняться закону линейной невязкой геометрической акустики вплоть до точки фокуса, а зона фокусирования при этом вырождается в точку [2]. Для достаточно сильных ударных волн за счет нелинейности вогнутый фронт выпрямляется, вследствие чего может не быть сильного возрастания интенсивности волны, а зона фокусирования сдвигается из геометрического фокуса и увеличивается [3, 4]. В устройствах, где требуется точная фокусировка, используются волны малой интенсивности.¹

Структура решения в зоне фокусирования слабой ударной волны определяется диссипацией, хотя уравнения, которые там нужно решать, и не содержат в главном приближении вязких членов. В работе [5] также была высказана аналогичная идея о том, что зона фокусирования описывается в рамках линейной невязкой акустики. В отличие от настоящей работы там исследовалось влияние нелинейности вместо вязкости на фокусирование звуковых волн, а вместо процедуры сращивания использовалось сшивание решений на некотором вполне определенном расстоянии от фокуса.

Если рефлектор или излучатель имеет границу, то в ее окрестности образуется дифракционная волна, которая в линейной постановке приходит в фокусную зону одновременно с самой фокусирующейся волной. В настоящей работе пренебрегается влиянием дифрагированной волны, а также влиянием зоны полутени. Представляется, что для выявления влияния этой зоны более подходящим является подход, предлагаемый в [6], где предлагается сращивать решение геометрической невязкой акустики и решение некоторого диффузионного уравнения, описывающего течение в окрестности фокуса. Это уравнение после некоторых преобразований приводится к уравнению нелинейных звуковых пучков [7]. Однако в работе [6] решение поставленной задачи отсутствует, кроме того, не ясно, как вообще можно получить решение, ограничиваясь лишь двумя асимптотическими зонами без рассмотрения зоны полутени вдали от зоны фокусирования.²

Используемый ниже метод сращиваемых асимптотических разложений по малому параметру, характеризующему слабую сжимаемость среды, ранее применялся для решения ряда одномерных задач [1, 8, 9]. Здесь он обобщается на случай сходящихся ударных волн.

1. **Постановка задачи.** Рассмотрим рефlector, имеющий форму части эллипсоида вращения, отсекаемой плоскостью, перпендикулярной оси вращения. В ближайшем к рефlectorу фокусе происходит сферически симметричный взрыв, который моделируется поршнем, создающим начальный разрыв скорости, равный \bar{U}_0 , на сферической поверхности радиуса \bar{r}_0 с центром в этом фокусе. Таким образом, задача оказывается осесимметричной. С помощью характерных параметров: \bar{T}_0 — характерного значения температуры, $\bar{\rho}_0$ — плотности невозмущенной среды — введем безразмерные величины

$$P = \frac{\bar{P}}{\bar{\rho}_0 \bar{U}_0^2}, \quad U = \frac{\bar{U}}{\bar{U}_0}, \quad x_k = \frac{\bar{x}_k}{\bar{r}_0}, \quad t = \frac{\bar{t} \bar{U}_0}{\bar{r}_0}, \quad T = \frac{\bar{T}}{\bar{T}_0},$$

$$s = \frac{\bar{s} \bar{T}_0}{\bar{U}_0^2}, \quad a = \frac{\bar{a}}{\bar{r}_0}, \quad b = \frac{\bar{b}}{\bar{r}_0}$$

Здесь \bar{P} — давление, \bar{U} — вектор скорости в декартовой системе координат \bar{x}_k , \bar{t} — время, \bar{T} — температура, \bar{s} — энтропия, \bar{a} и \bar{b} — длины большой и малой полуосей эллипсоида.

Считаем возмущения такими, что плотность среды меняется слабо: $\bar{\rho} = \bar{\rho}_0 (1 + \varepsilon\rho)$, где малый параметр $\varepsilon = (\partial P / \partial \bar{\rho})_0 \bar{\rho}_0$. Раскладывая давление $\bar{P}(\bar{\rho}, \bar{s})$ в ряд по $\bar{\rho}$, \bar{s} около невозмущенного состояния и вводя коэффициенты разложения k и k_1 , запишем систему уравнений движения сильно вязкой жидкости в виде

$$(1 + \varepsilon\rho) dU/dt = -\nabla\rho - k\varepsilon^2\rho\nabla\rho - k_1\nabla s + \eta\varepsilon^{-1/2}\Delta U + \mu\varepsilon^{-1/2}\nabla\text{div} U \quad (1.1)$$

$$\varepsilon d\rho/dt + (1 + \varepsilon\rho)\text{div} U = 0, \quad (1 + \varepsilon\rho) T ds/dt = \kappa\nabla T +$$

$$+ 1/2\zeta\varepsilon^{-1/2}(\text{div} U)^2 + 1/2\mu\varepsilon^{-1/2}(\partial U_i/\partial x_k + \partial U_k/\partial x_i -$$

$$- 2/3\delta_{ik}\partial U_l/\partial x_l)^2; \quad d/dt = \partial/\partial t + U\nabla$$

$$\zeta = \frac{\bar{\zeta}}{\bar{\rho}_0 \bar{U}_0 \bar{r}_0} \varepsilon^{1/2} \sim 1, \quad \mu = \frac{\bar{\mu} + \bar{\eta}/3}{\bar{\rho}_0 \bar{U}_0 \bar{r}_0} \varepsilon^{1/2} \sim 1, \quad \kappa = \frac{\bar{\kappa} \bar{T}_0}{\bar{\rho}_0 \bar{U}_0^3}$$

Здесь $\bar{\zeta}$, $\bar{\eta}$ — коэффициенты объемной и сдвиговой вязкости, $\bar{\kappa}$ — коэффициент теплопроводности.

Размеры рефlectора считаем большими по сравнению с \bar{r}_0 :

$$a = a^0 \varepsilon^{-1/2} \sim \varepsilon^{-1/2}, \quad b = b^0 \varepsilon^{-1/2} \sim \varepsilon^{-1/2}$$

Сферически симметричная ударная волна, возникшая при указанных выше условиях, формируется при малых временах $t \sim \varepsilon^{1/2}$ (время отсчитываем от момента возникновения разрыва скорости), а затем при временах $t \sim 1$ приобретает гауссов профиль [1]

$$\rho = u_1 \varepsilon^{-1/2} = G(t, r_1 + t\varepsilon^{-1/2}) \quad (1.2)$$

$$G(t, x) = \frac{\varepsilon^{-1/2} t^{-3/2}}{\sqrt{2\pi\alpha}} \exp\left[-\frac{x^2 \varepsilon^{1/2}}{2t\alpha}\right], \quad \alpha = \zeta + \mu$$

где u_1 , r_1 — радиальная составляющая скорости и расстояние от фокуса, где произошел взрыв.

Как показывает соотношение (1.2), ширина ударной волны имеет порядок $\varepsilon^{-1/4}$ за счет большой вязкости, в то время как характерный пространственный размер задачи $\varepsilon^{-1/2}$. Поэтому волна (1.2) распространяется как локально гиперболическая и, пока не дойдет до рефlectора, дает экспоненциально малые возмущения давления и скорости в окрестности рефlectора.

2. **Построение отраженной волны.** Покажем, что вдали от краев рефlectора на расстояниях, намного больших по порядку, нежели $\varepsilon^{-1/4}$, т. е.

намного больших длины волны, волна (1.2) отражается как обычная волна в невязкой] жидкости. Введем в окрестности произвольной точки рефлектора M вдали от его краев декартовы координаты x_M, y_M, z_M с центром в точке M . Тогда зона отражения характеризуется масштабами переменных

$$x_M = x_M^\circ \varepsilon^{-1/4}, \quad y_M = y_M^\circ \varepsilon^{-1/4}, \quad z_M = z_M^\circ \varepsilon^{-1/4}, \quad \tau_M = (t - t_M) \varepsilon^{-1/4}$$

$$x_M^\circ, y_M^\circ, z_M^\circ, \tau_M \sim 1$$

где $t_M = r_{1M} \varepsilon^{1/2}$, r_{1M} — расстояние от первого фокуса до точки M . Масштабы искомым переменных: $\rho \sim \varepsilon^{-1/4}$, $u \sim \varepsilon^{1/4}$.

В главном приближении для ρ, u получается обычная система уравнений линейной невязкой акустики. Асимптотика (1.2) в рассматриваемой зоне примет вид

$$\rho = u_1 \varepsilon^{-1/2} = G(t_M, r_1 + t \varepsilon^{-1/2}) \quad (2.1)$$

Заметим, что асимптотика (2.1) удовлетворяет этой системе уравнений.

Условие прилипания, налагаемое на твердой границе на скорость течения в вязкой жидкости, приведет к возникновению пограничного слоя, имеющего ширину, много меньшую, нежели $\varepsilon^{-1/4}$. Вне этой зоны волна отражается как в идеальной жидкости, при удалении от рефлектора приобретает вид

$$\rho = -u_r \varepsilon^{-1/2} = G(t_M, r + t \varepsilon^{-1/2} - 2a) \quad (2.2)$$

где r — расстояние до второго фокуса, куда движется отраженная волна, u_r — радиальная компонента скорости в сферической системе координат с центром во втором фокусе, остальные компоненты скорости равны нулю.

Как (2.1), так и (2.2) удовлетворяют уравнениям линейной невязкой геометрической акустики, а их суперпозиция — еще и нулевому граничному условию для нормальной составляющей скорости. В суперпозиции (2.1) и (2.2) с ростом времени при отходе от рефлектора решение (2.1) становится экспоненциально малым и остается одна сходящаяся сферическая волна (2.2) с некоторым распределением амплитуды вдоль ее поверхности.

Влиянием полутеневого волны, возникающей от отражения падающей волны от точек, отстоящих от края рефлектора на расстоянии порядка $\varepsilon^{-1/4}$, в дальнейшем будем пренебрегать.

Решение (2.2) будет справедливым при отходе волны от рефлектора на расстояние Δr , удовлетворяющее условию $\varepsilon^{-1/4} \ll \Delta r \ll \varepsilon^{-1/2}$. Таким образом, решение (2.2) является промежуточной асимптотикой, получающейся при сращивании решения, описывающего распределение параметров в зоне отражения от рефлектора ($\Delta r \sim \varepsilon^{-1/4}$), с решением геометрической акустики ($\Delta r \sim \varepsilon^{-1/2}$). При этом большая вязкость среды приводит к ее влиянию на решение уже в главном приближении.

3. Построение отраженной сходящейся волны в зоне геометрической акустики. Обозначим U, x, y, z векторы скорости и декартовы координаты, связанные со вторым фокусом, куда идет отраженная волна. Возьмем масштабы переменных в виде

$$x = x_0 \varepsilon^{-1/2}, \quad y = y_0 \varepsilon^{-1/2}, \quad z = z_0 \varepsilon^{-1/2}, \quad t \sim 1$$

$$U = \varepsilon^{1/4} U_1(x_0, y_0, z_0, t, \theta) + \delta_2 U_2(x_0, y_0, z_0, t, \theta) + \dots$$

$$\rho = \varepsilon^{-1/4} \rho_1 + \delta_2 \varepsilon^{-1/4} \rho_2 + \dots, \quad s \sim \max(\varepsilon, \kappa)$$

$$\theta = \delta_s^{-1} \Phi(x_0, y_0, z_0, t)$$

Подставляя эти разложения в уравнения (1.1) получим, что изменение энтропии при достаточно малом коэффициенте теплопроводности оказывается малым.

В первом приближении система принимает вид

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = - \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \nabla_0 \Phi, \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial U_1}{\partial \theta} \nabla_0 \Phi = 0 \quad (3.1)$$

$$\nabla_0 = \{\partial/\partial x_0, \partial/\partial y_0, \partial/\partial z_0\}$$

Во втором приближении ($\delta_2 = \varepsilon^{1/2}$, $\delta_s = \varepsilon^{1/4}$)

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial U_2}{\partial \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = - \nabla_0 \rho_1 - \frac{\partial \rho_2}{\partial \theta} \nabla_0 \Phi + \eta \frac{\partial^2 U_1}{\partial \theta^2} \nabla_0^2 \Phi +$$

$$+ \mu \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial \theta^2} \nabla_0 \Phi \right) \nabla_0 \Phi \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2}{\partial \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \operatorname{div}_0 U_1 + \frac{\partial U_2}{\partial \theta} \nabla_0 \Phi = 0$$

Из (3.1) следует, что

$$|\nabla_0 \Phi|^2 - (\partial \Phi / \partial t)^2 = 0, \quad U_1 = \lambda(x_0, y_0, z_0, t, \theta) \nabla_0 \Phi, \quad \rho_1 = -\lambda \partial \Phi / \partial t$$

Определяя λ из условия совместности системы (3.2), будем иметь

$$2 \frac{\partial \lambda}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - 2 \nabla_0 \lambda \nabla_0 \Phi - \Delta_0 \Phi = \alpha \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^3 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \theta^2} \quad (3.3)$$

Отраженная волна около рефрактора приобретает сферическую форму (2.2). Удобно ввести сферические координаты

$$x_0 = r_0 \cos \varphi \cos \psi, \quad y_0 = r_0 \sin \varphi \cos \psi, \quad z_0 = r_0 \sin \psi$$

Тогда при учете начального условия будем иметь $\Phi = -r_0 - t$. Из (3.3) в переменных $\Lambda = \lambda r_0$, $\xi_0 = t + r_0$, $\eta_0 = t - r_0$ получим

$$\partial \Lambda / \partial \eta_0 - 1/4 \alpha \partial^2 \Lambda / \partial \theta^2 = 0 \quad (3.4)$$

Будем сравнивать решение в зоне отражения волны с решением уравнения (3.4), которое возьмем в виде

$$\Lambda = \Lambda_0(\psi) [\eta_0 + \eta_0^\circ(\psi)]^{-1/2} \exp \left[\frac{-(\theta + \theta_0(\psi))^2}{\alpha (\eta_0 + \eta_0^\circ(\psi))} \right] \quad (3.5)$$

В промежуточной зоне асимптотика решения имеет вид (2.2). Из сравнения найдем, что

$$\Lambda_0(\psi) = t_M^{-3/2} r_{0M} \sqrt{(t_M - r_{0M} + 2a^\circ) / (2\pi\alpha)} \quad (3.6)$$

$$\theta_0 = -2a^\circ, \quad \eta_0^\circ = 2a^\circ, \quad t_M = t_M(\psi), \quad r_{0M} = r_{0M}(\psi)$$

Учитывая, что вне области $\xi_0 - 2a^\circ \sim \varepsilon^{1/4}$ правая часть первого равенства (3.6) экспоненциально мала, получим окончательную асимптотику в зоне геометрической акустики

$$\rho = \frac{\varepsilon^{-1/4} \Lambda_0(\psi)}{r_0 \sqrt{2(a^\circ - r_0)}} \exp \left[\frac{-(\xi_0 - 2a^\circ)^2}{2\alpha \varepsilon^{1/2} (2a^\circ - r_0)} \right] \quad (3.7)$$

В окрестности второго фокуса $r_0 \rightarrow 0$, и решение (3.7) имеет особенность. Поэтому возникает необходимость отыскания там другого асимптотического разложения.

4. Построение решения в зоне фокусирования. Масштабы переменных в этой зоне:

$$x = x_* \varepsilon^{-1/4}, \quad y = y_* \varepsilon^{-1/4}, \quad z = z_* \varepsilon^{-1/4}, \quad t = 2a^\circ + t_* \varepsilon^{1/4},$$

$$U = \varepsilon_* U_*, \quad \rho = \varepsilon_* \varepsilon^{-1/2} \rho_*$$

В главном приближении имеем

$$\partial U_* / \partial t_* = - \nabla_* \rho_*, \quad \partial \rho_* / \partial t_* + \operatorname{div}_* U_* = 0 \quad (4.1)$$

Переходя к переменным $\xi_* = t_* + r_*$, $r_* = \sqrt{x_*^2 + y_*^2 + z_*^2}$, ψ , φ , для осесимметричного течения получим

$$\frac{\partial^2 \rho_*}{\partial r_*^2} + \frac{2}{r_*} \frac{\partial \rho_*}{\partial r_*} + \frac{1}{r_*^2 \sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\sin \psi \frac{\partial \rho_*}{\partial \psi} \right) = - \frac{2}{r_*} \frac{\partial}{\partial r_*} \left(r_* \frac{\partial \rho_*}{\partial \xi_*} \right)$$

Разделяя переменные $\rho_* = Y(r_*, \psi) Y_1(\xi_*)$, $Y = R(r_*) \Omega(\psi)$ и беря одно из собственных значений комплексным, найдем

$$\begin{aligned} \frac{dY_1}{d\xi_*} + iaY_1 = 0, \quad \frac{1}{\sin \psi} \frac{d}{d\psi} \left(\sin \psi \frac{d\Omega}{d\psi} \right) + q\Omega = 0 \\ \frac{d}{dr_*} \left(r_*^2 \frac{dR}{dr_*} \right) - 2air_* \frac{d}{dr_*} (r_* R) - qR = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Ограниченные решения будут лишь при $q = n(n+1)$, где n — целое. В общем решении (4.2) также надо оставить только функции, ограниченные при $r_* \rightarrow 0$. В результате решение в окрестности фокуса можно искать в виде

$$\rho_* = \frac{1}{\sqrt{2r_*}} \text{Real} \left\{ \sum P_n(\cos \psi) \int C_n(\omega) \exp(-i\omega t_*) J_{\nu_n}(r_* \omega) d\omega \right\} \quad (4.3)$$

$$\nu_n = \sqrt{q_n + 1/4}, \quad q_n = n(n+1)$$

где P_n — сферические функции, J_{ν_n} — функция Бесселя, суммирование ведется от $n=0$ до $n=\infty$, интегрирование по ω — от $-\infty$ до $+\infty$.

Для скорости можно получить выражения непосредственно их исходной системы.

Срачиваем (4.3) с (3.7). Промежуточная асимптотика (3.7) получается в виде ($r_0 \rightarrow 0$)

$$\rho = \frac{\varepsilon^{-3/4} \Lambda_0(\psi)}{2\sqrt{a^\circ} r} \exp\left(-\frac{\xi_*^2}{4\alpha a^\circ}\right) \quad (4.4)$$

Промежуточная асимптотика (4.3) ($r_* \rightarrow \infty$)

$$\begin{aligned} \rho = \frac{\varepsilon_* \varepsilon^{-1/2}}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{r_*} \text{Real} \left\{ \sum P_n(\cos \psi) \left[\int \frac{C_n(\omega)}{\sqrt{\omega}} \exp(-i\omega \xi_*) \times \right. \right. \\ \left. \times \exp\left(i\left(\frac{\pi \nu_n}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) d\omega + \int \frac{C_n(\omega)}{\sqrt{\omega}} \exp\left(-i\left(\frac{\pi \nu_n}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) \times \right. \\ \left. \left. \times \exp(-i\omega(t_* - r_*)) d\omega \right] \right\} \quad (4.5) \end{aligned}$$

Во втором интеграле в (4.5) берется асимптотика при $\xi_* = \text{const}$, $t_* \rightarrow -\infty$, $r_* \rightarrow \infty$, т. е. показатель экспоненты второго интеграла стремится к $-i\omega\infty$. Следовательно, главный член асимптотики содержит лишь первый интеграл. Из условия срачивания видно, что нужно брать $C_n(\omega) = \sqrt{\omega} f(\omega) B_n$, где B_n не зависит от ω , $\varepsilon_* = 1$. Срачивание будет иметь место, если

$$\sum P_n(\cos \psi) \exp(i(\pi \nu_n/2 + \pi/4)) B_n = \sqrt{\pi/a^\circ} \Lambda_0(\psi)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} B_n = -\sqrt{\frac{\pi}{a^\circ}} \frac{2n+1}{2} \exp\left(-i\left(\frac{\pi \nu_n}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) \int_0^\pi \Lambda_0(\psi) P_n(\cos \psi) \sin \psi d\psi \\ f(\omega) = \sqrt{\alpha a^\circ/\pi} \exp(-\alpha a^\circ \omega^2) \end{aligned}$$

Окончательно в окрестности фокуса решение примет вид

$$\rho = \sqrt{\frac{\alpha a^\circ}{2\pi}} \text{Real} \left\{ \sum P_n(\cos \psi) B_n \int \sqrt{\omega} \exp(-\alpha a^\circ \omega^2 - i\omega t_*) \frac{J_{\nu_n}(r_* \omega)}{\sqrt{r_*}} d\omega \right\} \quad (4.6)$$

5. Определение давления в фокусе. Учитывая, что $J_{\nu_n}(r_*\omega)/\sqrt{r_*} \rightarrow \sqrt{\omega}\Gamma(\nu_0 + 1)$ при $n = 0$ и этот предел равен нулю при $n \neq 0$, из (4.6) можно получить в фокусе

$$\rho_f(t_*) = -K(t_*) \int_0^\pi \Lambda_0(\psi) \sin \psi d\psi \quad (5.1)$$

$$K(t_*) = (4\varepsilon^{1/2}a^{\alpha/2})^{-1} t_* \exp(-t_*^2/(4a^\alpha))$$

Если предположить, что существует промежуточная асимптотическая зона, где одновременно волна имеет профиль (4.4) и описывается системой (4.1), то можно задаться начальными условиями при $t_* = t_*^\circ < 0$ ($r_* = -t_*^\circ$):

$$\rho|_{t_*^\circ} = B \exp\left[-\frac{(t_*^\circ + r_*)^2}{4a^\alpha}\right], \quad B = -\frac{\varepsilon^{1/2}\Lambda_0(\psi)}{2\sqrt{a^\alpha t_*^\circ}} \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t_*}\Big|_{t_*^\circ} = -\frac{B}{2a^\alpha} (t_*^\circ + r_*) \exp\left[-\frac{(t_*^\circ + r_*)^2}{4a^\alpha}\right]$$

Тогда, используя формулу Пуассона, получим выражение, отличающееся от (5.1) наличием множителя $[1 + (a^\alpha/t_* - t_*)/t_*^\circ]$ в правой части. Однако, учитывая, что начальные условия в виде (5.2) можно брать лишь вне зоны фокусирования, перейдем в последнем выражении к пределу при $t_*^\circ \rightarrow -\infty$. Это даст зависимость (5.1). Таким образом, оба способа получения зависимости давления от времени в фокусе эквивалентны асимптотически. В окрестности фокуса использование формулы Пуассона затруднительно, поэтому надо использовать решение в виде (4.6).

Функция $\Lambda_0(\psi)$ зависит от отражающего устройства. Для рассматриваемого случая

$$\Lambda_0(\psi) = [\sqrt{\pi\alpha}(1 - 2\delta \cos \psi + \delta^2)]^{-1}, \quad \delta = \sqrt{a^2 - b^2}/a$$

Если рефлектор представляет собой часть эллипсоида с углом раствора ψ_0 , то можно получить для давления в фокусе

$$\rho_f(t_*) = \frac{K(t_*)}{2\sqrt{\pi}} g(\delta), \quad g(\delta) = \frac{1}{\delta} \ln \frac{1 + \delta^2 - 2\delta \cos \psi_0}{(1 - \delta)^2} \quad (5.3)$$

Из (5.3) при $\delta \rightarrow 0$ получается зависимость давления от времени в фокусе для сферического рефлектора

$$\rho_f(t_*) = -\frac{K(t_*)}{2\sqrt{\pi}} (1 - \cos \psi_0) \quad (5.4)$$

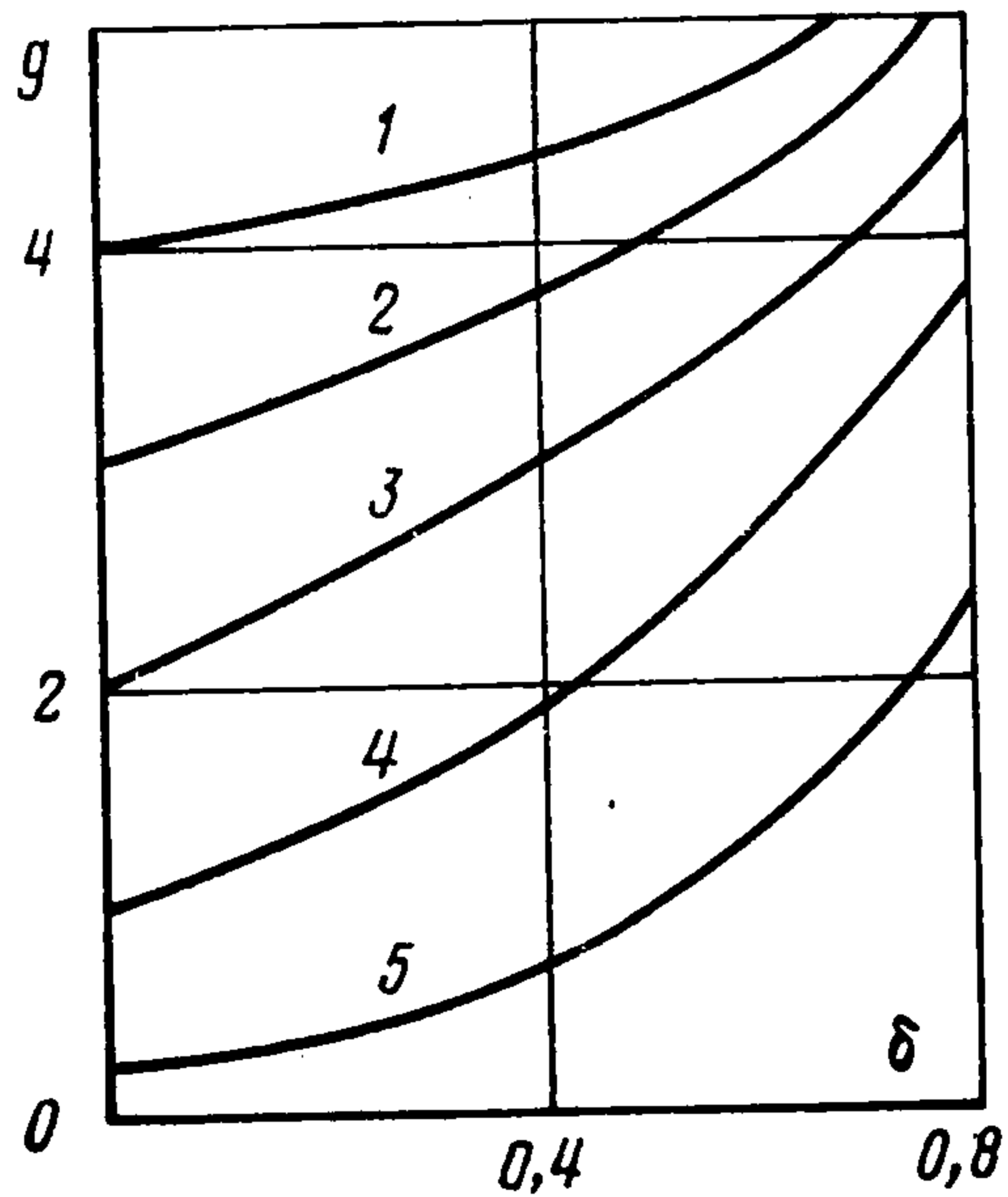
Беря $\psi_0 = \pi$, получим зависимость в фокусе при отражении от полного эллипсоида или полной сферы. В последнем случае получается решение задачи о фокусировании сферически симметричной волны.

Таким образом, как показывает соотношение (5.1), в фокусе волна имеет антисимметричный профиль: вслед за волной сжатия идет такая же по форме волна разрежения. Видно, что максимальное и минимальное давления в фокусе достигаются при $t_* = \mp \sqrt{2a^\alpha}$ и равны по модулю

$$\rho_{f \max} = g(\delta) \varepsilon^{-1/2}/(4\sqrt{2\pi e} a^\alpha)$$

Зависимость амплитуды волны от эксцентриситета и угла раствора рефлектора дается функцией, показанной для разных углов раствора эллипсоида на фигуре (кривые 1—5 соответствуют углам $\psi_0 = \pi, 5\pi/6, \pi/2, \pi/3, \pi/6$). При $\delta \rightarrow 1$ все кривые логарифмически стремятся к бесконечности. С уменьшением угла ψ_0 уменьшается и амплитуда волны. Это уменьшение может быть скомпенсировано за счет увеличения эксцентри-

итета эллипсоида. Хотя для каждого угла раствора зависимость амплитуды от эксцентриситета носит монотонный характер, сам рост $\partial g/\partial \delta$ зависит от ψ_0 , близких к π и нулю, при малых δ наблюдается слабый рост амплитуды, однако в промежутке между π и нулем этот рост увеличивается (см., например, кривую 3, наклон которой при малых δ больше, нежели у кривых 1 и 5).



Фиг. 1

6. Выводы. Использование метода сравниваемых асимптотических разложений позволяет получить аналитическое решение задачи во всей пространственно-временной области. Возможность построения составных асимптотик, однако, ограничена поведением разложений в смежных областях. Решение геометрической акустики в зоне фокусирования стремится к бесконечности. Из-за этого аддитивное составное разложение приобретает в фокусе лишнее слагаемое, равное

$$\varepsilon^{-1/2} \Lambda_0(\psi) \frac{\partial}{\partial r_0} \left[\sqrt{2(2a^\circ - r_0)} \exp\left(\frac{-\xi^2}{2\alpha\varepsilon^{1/2}(2a^\circ - r_0)}\right) \right] \Big|_{r_0=0}$$

Поэтому составное разложение, пригодное как в зоне геометрической акустики, так и в зоне фокусирования, построить нельзя.

За счет вязкости ударная волна до прихода в фокус успевает настолько размазаться, что дифракционная фокусная зона в главном приближении описывается уравнениями идеальной жидкости.

Взрывная ударная волна, приобретающая в сильно вязкой жидкости гауссов профиль, приходит в фокус в виде антисимметричного возмущения, причем его амплитуда может быть увеличена либо за счет увеличения угла раствора эллипсоида ψ_0 (при фиксированной длине полуосей), либо за счет увеличения эксцентриситета.

Однако по мере уменьшения ψ_0 все большую роль будет играть зона полутени и дифрагированная от краев волна. Само приближение геометрической акустики перестает быть справедливым в окрестности крайних лучей ($\psi = \psi_0$).

От вязкости давление как в самом фокусе, так и в его окрестности зависит лишь в комбинации $\alpha a^\circ = \bar{U}_0 \bar{a} (2\bar{\zeta} + \bar{\eta}/3) / (\bar{C}_0^2 \bar{r}_0^2 \bar{\rho}_0)$, где \bar{C}_0 — скорость звука в невозмущенной среде. Максимальное и минимальное давление в фокусе обратно пропорционально этой величине.

Полученное решение (4.6) можно использовать для расчета других фокусирующихся ударных волн со сферическими фазовыми поверхностями, в частности для фокусирующейся волны, получающейся после отражения плоской ударной волны от параболического рефлектора.

Хотя вопрос о влиянии дифракционных волн не исследовался, ясно, что полученное в ней решение будет тем хуже, чем меньше угол раствора фокусирующейся волны. Зато для рефлектора в виде полного эллипсоида, когда фокусирующаяся волна имеет форму полной сферы, это решение вообще не содержит указанного недостатка, так как в этом случае нет ни дифрагированной волны, ни зоны полутени. В этом случае в зоне фокусирования никаких диффузионных уравнений получиться не может. Эти два предельных случая — случая малого раскрытия рефлектора, рассмотренного в работе [6], и его полного раскрытия — приводят к принципиально разным струк-

турам решения в зоне фокусирования. Получить решение, пригодное для всех случаев, можно лишь учитывая зону полутени вдали от фокуса. Заметим, что методы, используемые в работе [10], также не позволяют учесть влияние краев рефлектора на фокусирование ударной волны в вязкой жидкости, так как основаны на волновой акустике идеальных сред.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лихачев В. Н.* Влияние диссипации на распространение сферической взрывной ударной волны // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 3. С. 384—393.
2. *Fridlander F. G.* Sound pulses. L.— N. y.: Cambridge: Univ. Press, 1958. 202 с.
3. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
4. *Sturtevant B., Kulkarny V. A.* The focusing of weak shock waves // J. Fluid Mech. 1976. V. 73. Pt. 4. P. 651—671.
5. *Островский Л. А., Сутин А. М.* Фокусировка акустических волн конечной амплитуды // Докл. АН СССР. 1975. Т. 221. № 6. С. 1300—1303.
6. *Cramer M. S.* The focusing of weak shock waves at an axisymmetric arete // J. Fluid Mech. 1981. V. 110. P. 249—253.
7. *Бахвалов Н. С., Жилейкин Я. М., Заболотская Е. А.* Нелинейная теория звуковых пучков. М.: Наука, 1982. 174 с.
8. *Лихачев В. Н.* Профиль цилиндрической ударной волны и пиковое приближение // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 2. С. 244—250.
9. *Гонор А. Л., Лихачев В. Н.* Распространение ударной волны на большие расстояния // Докл. АН СССР. 1983. Т. 271. № 3. С. 567—569.
10. *Каневский И. Н.* Фокусировка звуковых и ультразвуковых волн. М.: Наука, 1977. 336 с.

Москва

Поступила в редакцию
8.II.1988